F 762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEH - CMEHA
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

1-2

ANUL V
IANUARIE—IUNIE 1954

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

1-2

ANUL V

IANUARIE—IUNIE 1954

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

*COMITETUL DE REDACȚIE*

Academician D. POMPEIU — redactor responsabil;
A. HALANAY — redactor adjunct;
academician S. STOILOV; GH. MIHOC;
N. TEODORESCU; G. VRĂNCEANU.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul V, nr. 1—2 Ianuarie—iunie 1954

SUMAR

| | Pag. |
|---|---|
| Academicianul Dimitrie Pompeiu | 7 |
| Lucrările academicianului Dimitrie Pompeiu | 11 |
| S. STOILOV, Singularităţile funcţiilor analitice uniforme şi lucrările academicianului Dimitrie Pompeiu | 19 |
| TUDOR GANEA, Distanţa dintre mulţimi închise introdusă de academicianul Dimitrie Pompeiu | 25 |
| ALEXANDRU FRODA, Mulţimi de distanţe în spaţiul euclidian total | 29 |
| C. T. IONESCU TULCEA, Funcţii de mulţime şi integralele lor | 73 |
| C. TELEMAN, Asupra grupurilor de mişcare maxime ale spaţiilor riemanniene $V_n$ | 143 |
| G. VRĂNCEANU, Asupra unei clase de spaţii riemanniene omogene | 173 |
| ALEXANDRU NICOLESCU, Asupra unui invariant proiectiv | 225 |
| Lista comunicărilor ţinute în cadrul Institutului de matematică în anul 1953 | 235 |

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

# ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome V, nos 1 — 2 Janvier-juin 1954

SOMMAIRE

| | Page |
|---|---|
| L'académicien Dimitrie Pompeiu | 7 |
| Les travaux de l'académicien D. Pompeiu | 11 |
| S. STOILOV, Les singularités des fonctions analytiques uniformes et les travaux de l'académicien Dimitrie Pompeiu | 19 |
| TUDOR GANEA, The distance between closed subsets defined by D. Pompeiu | 25 |
| ALEXANDRU FRODA, Ensembles de distances dans l'espace euclidien total | 29 |
| C. T. IONESCU TULCEA, Fonctions d'ensemble et leurs intégrales | 73 |
| C. TELEMAN, Sur les groupes maximums de mouvement des espaces de Riemann $V_n$ | 143 |
| G. VRĂNCEANU, Sur une classe d'espace riemanniens homogènes | 173 |
| ALEXANDRU NICOLESCU, Un invariant projectif | 225 |
| Les communications présentées dans le cadre de l'Institut de Mathématiques au cours de l'année 1953 | 235 |

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том V, № 1—2 Январь—июнь 1954

## СОДЕРЖАНИЕ

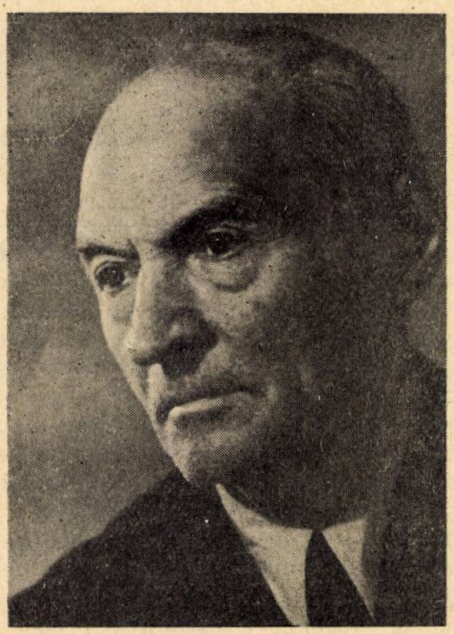
| | Стр. |
|---|---|
| Академик Димитрий Помпею | 7 |
| Работы академика Д. Помпею | 11 |
| С. СТОЙЛОВ, Сингулярные однородных аналитических функций и работы академика Димитрия Помпею | 19 |
| Т. ГАНЯ, Расстояние между замкнутыми множествами, определенное академиком Димитрием Помпею | 25 |
| А. ФРОДА, Множество расстояний в полном евклидовом пространстве | 29 |
| К. Т. ИОНЕСКУ ТУЛЧА, Функции множества и их интегралы | 73 |
| К. ТЕЛЕМАН, О группах максимального движения римановых пространств | 143 |
| Г. ВРЭНЧАНУ, О классе гомогенных римановых пространств | 173 |
| А. НИКОЛЕСКУ, О проективном инварианте | 225 |
| Список сообщений, доложенных в Институте математики за 1953 год | 235 |

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

# ACADEMICIANUL DIMITRIE POMPEIU

Vasta şi strălucita operă matematică a lui Dimitrie Pompeiu ocupă în mişcarea ştiinţifică din patria noastră un loc de frunte. Inrîurirea sa asupra generaţiilor de matematicieni romîni — şi în special asupra acelora care s-au format în ultimele decenii — a fost adesea hotărîtoare.

Dar influenţa matematicianului Dimitrie Pompeiu s-a făcut simţită în ţara noastră nu numai prin lucrările sale ştiinţifice, sau prin



prelegerile atît de vii, de variate şi de sugestive pe care le-a ţinut în Universităţile noastre şi la Şcoala politehnică din Bucureşti. Ea s-a exercitat într-o foarte mare măsură şi prin legăturile directe pe care D. Pompeiu nu a încetat să le întreţină, în decursul îndelungatei sale cariere ştiinţifice, cu matematicienii noştri de toate vîrstele, prin radierea personalităţii sale generoase, comunicative, a spiritului său subtil şi nuanţat, a gîndirii sale matematice profunde. Se poate spune că o mare parte din

realizările contemporane ale şcolii matematice romîne poartă vizibil pecetea influenţei acestei gîndiri.

Ceea ce caracterizează personalitatea matematică atît de originală a academicianului D. P o m p e i u, este amploarea şi varietatea puterii sale creatoare, este simplicitatea aparentă a multora din ideile sale, care s-au arătat ulterior atît de fecunde, perspicacitatea cu care, dintr-un ansamblu complex de rezultate diferite — uneori disparate — a ştiut, nu o singură dată, să degaje, cu măiestrie, faptul simplu şi elegant care vorbeşte direct şi adînc, atît inteligenţei cît şi imaginaţiei matematice.

D i m i t r i e P o m p e i u şi-a început activitatea ştiinţifică în primii ani ai secolului nostru. Teza sa de doctorat, susţinută la Sorbona în 1905, este azi o lucrare bine cunoscută în literatura ştiinţifică mondială. Precedată de un şir de Note prezentate Academiei de Ştiinţe din Paris, teza lui P o m p e i u cuprinde sub o formă sintetică — uneori succintă — un număr important de fapte şi rezultate — în parte azi clasice — care au dat naştere unora dintre capitolele cele mai atrăgătoare ale teoriei funcţiilor analitice de variabilă complexă.

Începutul veacului al XX-lea marchează în Istoria ştiinţei matematice un pas hotărîtor: el coincide cu primele cercetări sistematic întreprinse în ceea ce s-a numit *teoria generală a funcţiilor*, deci cu primele rezultate fundamentale obţinute în această disciplină nouă.

Dar metodele atunci noi, pe care le punea la dispoziţia analiştilor, opera atît de originală a lui G e o r g C a n t o r nu constituiau numai un instrument util pentru studiul funcţiilor generale de variabilă reală; ele deschideau drumul şi pentru abordarea unui studiu metodic al singularităţilor de cele mai variate tipuri; spre clasificarea naturală a funcţiilor analitice bazată pe singularităţile lor.

Cum era şi firesc, acest moment al istoriei matematice a şi avut ca imediată repercusiune un nou şi important avînt al cercetărilor asupra funcţiilor de variabilă complexă. Această teorie, născută în secolul trecut, fusese, în a doua jumătate a sa, îmbogăţită în mod considerabil prin contribuţiile celor mai mari matematicieni ai acelui timp. Noi probleme se puneau atunci acestei discipline deja clasice, probleme dictate de necesitatea adîncirii unor particularităţi ale funcţiilor analitice, de nevoia cunoaşterii mai amănunţite a tipurilor diverse de singularităţi ce se pot prezenta, de necesitatea unei analize mai pătrunzătoare a lor. Problemele acestea se cereau abordate cu instrumentele noi pe care le punea la dispoziţie teoria mulţimilor, căci de aici era firesc să se aştepte şi rezultate noi. Teza lui P o m p e i u este, din acest punct de vedere, una din lucrările matematice caracteristice ale epocii sale. Vom aminti aici numai cîteva din acele idei şi rezultate cuprinse în opera academicianului P o m p e i u, care sînt la baza unor dezvoltări moderne importante, generatoare a unor teorii noi.

Printre aceste idei trebuie făcut loc noţiunii de *distanţă între două mulţimi*, noţiune introdusă în ştiinţă şi riguros definită, pentru prima dată de P o m p e i u. Noţiunea joacă azi un rol important în teoria spaţiilor abstracte şi în analiza funcţională, dar ea este folosită, după exemplul lui P o m p e i u, şi în unele cercetări moderne de teoria funcţiilor. Paternitatea acestei noţiuni în ştiinţa matematică este de altfel azi recunoscută în tratatele speciale, cum se poate constata, de exemplu, în vol. I al Topologiei lui C. K u r a t o w s k i, apărut în 1948, la Varşovia.

Comportarea funcţiilor analitice în vecinătatea mulţimilor lor de singularităţi a preocupat intens şi adînc pe P o m p e i u. Problema este de fapt fundamentală în teoria funcţiilor, iar cunoştinţele noastre clasice în această chestiune sînt datorate eforturilor celor mai mari matematicieni ai secolului trecut. Instrumentele şi metodele noi pe care le-a adus cu sine secolul nostru au permis însă realizarea unor progrese foarte importante.

Deşi problema, în toată generalitatea ei, este încă departe de a fi epuizată au fost mult aprofundate fenomenele matematice corespunzătoare. Ideea generală care a condus pe P o m p e i u în investigaţiile sale este că această comportare depinde în primul rînd — cel puţin pentru cazul funcţiilor uniforme — de *întinderea* mulţimii singulare, de măsura ei (pozitivă sau nulă), şi mai puţin de proprietăţile ei structurale. Prin numeroasele rezultate originale — unele azi celebre — P o m p e i u a căutat permanent să ilustreze această idee generală. Astfel, teorema relativă la comportarea unei funcţii uniforme în vecinătatea mulţimii ei singulare, cînd aceasta (în sensul precizat de P o m p e i u) este de lungime nulă (teoremă care a fost regăsită mai tîrziu şi de alţii) a fost dată de P o m p e i u încă din 1905, împreună cu ansamblul întreg de propoziţii înrudite. Dar rezultatul cel mai celebru al acad. P o m p e i u în această direcţie de cercetări — rezultate care tocmai prin caracterul său neaşteptat (şi am putea spune surprinzător) a atras încă de mai bine de 40 ani atenţia lumii matematice asupra lucrărilor sale — este incontestabil descoperirea funcţiilor analitice continue pe singularităţile lor, acestea formînd în plan o mulţime perfectă total discontinuă. Funcţiile acestea — numite azi, în general, *funcţii de tipul lui Pompeiu* — prezintă un deosebit interes tocmai prin fenomenul pe care-l pun în evidenţă. Ele contribuie la înţelegerea mai adîncă a conceptului general de funcţie analitică în sensul riguros al cuvîntului, la pătrunderea mai profund în noţiunea de punct singular concepută în toată generalitatea sa. De aceea ele au făcut pînă azi obiectul a numeroase cercetări, din care, după cele ale lui P o m p e i u însuşi, menţionăm, în Franţa, în special cercetările bine cunoscute ale lui A. D e n j o y, în U.R.S.S., pe cele ale lui G o l u b e v, ale lui U r î s o n, ale lui F e d o r o f f; în Polonia, în ţările scandinave, în Japonia şi în alte ţări, s-au adus noi contribuţii şi s-au folosit în diverse chestiuni înrudite rezultatele dobîndite.

Cercetările menţionate au pus în lumină fapte extrem de interesante şi foarte instructive. Parte din ele fuseseră prevăzute şi enunţate în unele lucrări ale sale de însuşi P o m p e i u.

Aceste rezultate au la prima vedere, un caracter puţin straniu, neobişnuit la funcţiile analitice uzuale cunoscute anterior; şi aceste ciudăţenii par a motiva în parte părerea generală anterioară descoperirii funcţiilor lui P o m p e i u că atare funcţii ar fi imposibile. Este deci cu atît mai remarcabil că proprietatea lor caracteristică — adică tocmai aceea a cărei posibilitate fusese pusă la îndoială înaintea rezultatelor lui P o m p e i u — derivă oarecum în mod firesc — după cum încă de la început el a arătat printr-o ingenioasă interpretare fizică — dintr-o proprietate clasică, bine-cunoscută, a potenţialului ordinar (newtonian sau logaritmic) al unei mase materiale. Existenţa funcţiilor lui P o m p e i u, deşi *a priori* pusă la îndoială pentru motive aparent logice, aşadar devine astfel o consecinţă naturală a unui fapt fizic bine cunoscut.

În teoria funcţiilor de variabilă reală, acad. Pompeiu a adus de asemenea însemnate contribuţii. Să semnalăm printre ele o altă descoperire de care se leagă numele său, aceea a funcţiilor reale, în orice punct derivabile, a căror derivată se anulează în orice interval. Exemplul construit de Pompeiu se găseşte azi în principalele tratate clasice de teoria funcţiilor de variabilă reală şi a fost folosit în numeroase cercetări. In particular, la noi în ţară, Alex. Froda a arătat de curînd cum aceste funcţii, graţie particularităţilor lor, pot servi la cercetarea naturii integralelor ecuaţiilor diferenţiale în care membrul al doilea este funcţie discontinuă, cercetări care se pot apropia, într-o oarecare măsură de rezultate bine cunoscute ale lui Lavrentiev.

Tot domeniului teoriei funcţiilor de variabilă reală aparţin cercetările iniţiate de Pompeiu asupra intervalului de contracţie în clasica teoremă a creşterilor finite. Această problemă a dat naştere ulterior la foarte numeroase lucrări, la noi în ţară şi în străinătate, în Franţa, la cercetări remarcabile ale lui Montel şi ale lui Favard, în Polonia ale lui Biernascki ş.a. Ele au dezvoltat şi tratat problema în diverse direcţii. Dar ea a fost rezolvată complet, în sensul în care fusese propusă şi îndrumată de Pompeiu, de matematicianul bulgar Ciakolov. Lucrările acad. Pompeiu au atins domeniile cele mai variate ale matematicii, investigaţiile sale în teoria ecuaţiilor diferenţiale, în calculul funcţional, în geometrie, în mecanică, sînt numeroase şi multe din ele au deschis cîmpuri noi de cercetări, ce au fost explorate de elevii săi. Aici trebuie să menţionăm în mod deosebit o altă noţiune nouă introdusă de Pompeiu în studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale, noţiune care poartă azi curent, numele pe care i l-a dat Pompeiu de *derivată areolară*, Derivata areolară a lui Pompeiu a făcut obiectul unor cercetări variate, în ţară şi în străinătate, iar aplicaţiile ei s-au dovedit fecunde. Printre matematicienii noştri care au dezvoltat şi împins mai departe cercetările acad. Pompeiu în această direcţie, citäm pe acad. Gr. C. Moisil, pe Miron Nicolescu membru corespondent al Academiei R. P. R., şi N. Teodorescu. Ei au arătat posibilităţile oferite de noţiunea introdusă de Pompeiu, în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale, şi au pus-o în lumină în moduri diverse.

Încheiem această prezentare foarte succintă a operei matematice a acad. Dimitrie Pompeiu, cu omagiul de vie admiraţie, de adîncă recunoştinţă, de caldă afecţiune, pe care colegii acad. Pompeiu, elevii şi prietenii săi, matematicienii romîni tineri şi bătrîni, îl aduc maestrului lor venerat şi iubit.

COMITETUL DE REDACŢIE

## LUCRĂRILE ACADEMICIANULUI DIMITRIE POMPEIU

1. *Sur les fonctions de variables complexes*, Comptes Rendus, Paris, 1902, vol. 134, p. 1195—1197.
2. *Sur un système de trois fonctions de variables réelles*, Comptes Rendus, 1903, vol. 137, p. 841—843.
3. *Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes*, Comptes Rendus, 1904, vol. 139, p. 914—915.
4. *Sur la continuité des fonctions de variables complexes*, Ann. de la Fac. des Sci. de Toulouse, 1905, t. 7, s. 2, p. 264—315.
5. *Sur l'extension du théorème des accroissements finis aux fonctions analytiques d'une variable complexe*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 1905, vol. 19, p. 309—313.
6. *Sur la notion de masse en Mécanique*, Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy, 1906, t. IV, p. 90—98.
7. *Sur le théorème des accroissements finis*, Annales Sci. de l'Univ. de Jassy, 1906, t. III, p. 244—250.
8. *Sur une extension possible de la notion de vraie valeur*, Ens. math., 1906, vol. 8, p. 203—206.
9. *Sur les séries de fonctions holomorphes*, Bull. des Sci. math., Paris, 1906, vol. 30, s. 2, p. 57—59.
10. *Sur les fonctions dérivées*, Math. Ann., 1907, vol. 63, p. 326—332.
11. *Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes*, Comptes Rendus, Paris, 1909, vol. 145, p. 103—105.
12. *Sur les singularités discontinues des fonctions analytiques uniformes*, Comptes Rendus, Paris, 1909, vol. 149, p. 1050—1051.
13. *Sur la représentation des fonctions analytiques par des intégrales définies*, Comptes Rendus, Paris, 1909, vol. 149, p. 1355—1357.
14. *Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes*, Ens. math., 1910, vol. 12, p. 18—20.
15. *Sur les intégrales curvilignes*, Nouv. Ann. de Math., 1910, t. 10, s. 4, p. 221—227.
16. *Sur un exemple de fonction analytique partout continue*, Amer. Journ. of Math., 1910, vol. 32, p. 327—332.
17. *Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 1910, vol. 29, p. 306—307.
18. *Sur la règle du parallélograme*, Ann. sci. de l'Univ. de Jassy, 1910, t. VI, p. 71—83.
19. *Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes*, Comptes Rendus, Paris, 1910, vol. 150, p. 454—455.
20. *Sur les fonctions analytiques uniformes*, Nieuw Archief voor Wiskunde, Amsterdam, 1910, vol. 9, s. 2, p. 172—175.
21. *Sur les fonctions représentées par les intégrales définies*, Ann. sci. Ac. Polyt. Port., 1910, vol. 5, p. 214—219.

22. *Sur les fonctions de variable complexe*, Comptes Rendus, Paris, 1911, vol. 153, p. 624—626.
23. *Einige Sätze über monogene Funktionen*, Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. der Wissensch. in Wien, 1911, vol. 120, p. 1249—125.
24. *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 1912, vol. 33, p. 108—113.
25. *Sur une relation d'intégrabilité dans la théorie des fonctions holomorphes*, Arch. der Math. und Phys., 1912, vol. 19, s. 3, p. 224—228.
26. *Sur une classe d'intégrales doubles*, Bull. de la Sect. Scient. de l'Académie Roumaine, 1912, t. I, p. 128—131.
27. *Sur une classe d'intégrales doubles*, 2ème note, Bull. de la Sect. Scien. de l'Acad. Roumaine, 1912, t. 1, p. 265—271.
28. *Sur une classe d'intégrales doubles*, 3ème note, Bull. de la Sect. Scien. de l'Acad. Roumaine, 1912, t. 1, p. 289—296.
29. *Sur certaines séries de fractions simples*, Nieuw Archief voor Wiskunde, 1913, vol. 10, s. 2, p. 353—356.
30. *Sur une équation intégrale*, Math. Ann., 1913, vol. 74, p. 275—277.
31. *Sur le principe de d'Alembert*, Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1913—1914, t. 2, p. 267—272.
32. *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe et sur certaines équations intégrales*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 1913, vol. 35, p. 277—281.
33. *Sur une application du calcul fonctionnel à la théorie des fonctions*, Comptes Rendus, 1913, vol. 156, p. 376—378.
34. *Sur le prolongement par continuité des fonctions d'une variable complexe* Ens. math., 1913, vol. 15, p. 305—307.
35. *Sur la théorie du potentiel et son type de singularité des fonctions analytiques uniformes*, Ann. sci. Acad. Polyt. Port., 1913, vol. 8, p. 226—241.
36. *Sur une classe d'intégrales doubles*, 4ème note, Bull de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1914—1915, t. 3, p. 272—277.
37. *Sur les polynomes d'approximation*, Tôhoku Math. Journ., 1914, vol. 6, p. 115—119.
38. *Un problème relatif aux ensembles abstraits*, Comptes Rendus, 1915, vol. 159, p. 527—530.
39. *Les séries de puissances et les relations de Cauchy*, Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy, 1914, t. VIII, p. 205—210.
40. *Sur la convergence des séries de fonctions*, Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1914—1915, t. III, p. 95—99.
41. *Sur la convergence des séries de fonctions*. Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1915—1916, t. IV, p. 120—126.
42. *Sur l'équation différentielle linéaire du premier ordre*, Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1915—1916, t. IV, p. 275—276.
43. *Sur la convergence des produits infinis*, Ann. sci. de l'Univ. de Jassy, 1915, t. IX, nr. 1, 2, p. 46—52.

44. *Sur une solution double de l'équation de Riccati*, Comptes Rendus, 1915, vol. 161, p. 235—237.

45. *Sur les séries à termes positifs et sur les fonctions dérivées*, Comptes Rendus, 1916, vol. 163, p. 430—432.

46. *Remarque sur la notion d'écart dans la théorie des ensembles abstraits*, Tôhoku Math Journ., 1917, vol. 11, p. 229—231.

47. *Sur certaines fonctions analytiques uniformes obtenues comme limites des fonctions uniformes*, Ens. math., 1917, vol. 19, p. 151—159.

48. *Sur une définition des fonctions holomorphes*, Comptes Rendus, 1918, vol. 166, p. 209—212.

49. *Sur une condition équivalente à la monogénéité et sur la démonstration du théorème fondamental de Cauchy*, Comptes Rendus, 1920, vol. 170, p. 379—381.

50. *Sur les fonctions holomorphes*, Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy, 1920, t. X, p. 1—4.

51. *Sur les séries de puissances*, Bul. Soc. de Stiințe din Cluj, (Roum.) 1921, vol. 1, p. 27—29.

52. *Sur une forme du théoréme des accroissements finis*, Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1924—1925, t. IX, p. 61—64.

53. *Sur les formules de transformation qui définissent des mouvements*, Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1929, t. XII, p. 67—68.

54. *Sur la monogénéité des fonctions d'une variable complexe*, Comptes Rendus, 1925, vol. 180, p. 1721—1723.

55. *Sur l'équation différentielle linéaire du premier ordre*, Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1926, vol. 10, p. 1—4.

56. *Sur une propriété des fonctions holomorphes*, Bull. Math. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1927, vol. 30, p. 67—68.

57. *Sur le théorème des accroissements finis*, Ann. sci. Univ. de Jassy, 1928, vol. 15, p. 235—237.

58. *Le vecteur-accélération*, Bull. Math. de la Soc. Roum. des Sci., 1928, vol. 31, p. 7—14.

59. *Sur les séries numériques divergentes*, Comptes Rendus, 1928, vol. 186, p. 1417—1418.

60. *Sur une formule généralisant l'intégrale de Cauchy et sur son interprétation en hydrodynamique*, Comptes Rendus, 1928, vol. 187, p. 1121—1123.

61. *Les fonctions élémentaires et les groupes continus*, Ens. Math., 1928, vol. 27, p. 101—105.

62. *Monogénéité et holomorphie*, Mathematica, 1929, t. II, p. 16—17.

63. *Sur le théorème des accroissements finis*, Mathematica, 1929, t. II, p. 70—75.

64. *Sur la condition des vitesses dans un fluide incompressible*, Bull. de Math. et Phys. pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Bucarest, 1929, vol. I, p. 42—43.

65. *Sur les formules de transformation qui définissent des mouvements*, Bull. Acad. Roumaine, 1929, vol. 12, p. 67—72.

66. *Sur la condition des accélérations dans le mouvement d'un fluide incompressible*, Prace mat.-fiz., 1929, vol. 36, p. 39—47.
67. *Remarques sur l'équation différentielle linéaire du premier ordre*, Bul. Timişoara, 1929, vol. 2, p. 179—180.
68. *Sur la transformation d'une équation différentielle en équation aux différences*, Mathematica, 1929, vol. 1, p. 96—98.
69. *Sur la transformation linéaire*, Avec une note de J. Rey Pastor. Boletin Seminario mat. Argentina, 1929, vol. 2, p. 1—8.
70. *Les singularités des fonctions analytiques uniformes*, Bull. math. de la Soc. Roumaine des Sci., 1929, vol. 31, s. 2, p. 105—116.
71. *Sur une propriété intégrale des fonctions de deux variables réelles*, Bull. Acad. Bruxelles, 1929, vol. 15, s. 5, p. 265—269.
72. *Sur certains systèmes d'équations linéaires et sur une propriété intégrale des fonctions de plusieurs variables*, Comptes Rendus, 1929, vol. 188, p. 1138—1139.
73. *Sur les formules de transformation qui définissent des mouvements*, Bull. de la Soc. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1929, t. XII, p. 67—72.
74. *Sur l'unicité du prolongement des fonctions harmoniques*, Rendiconti Acad. dei Lincei Roma, 1929, vol. 9, s. 6. p. 631—633.
75. *Sur une forme géométrique du théorème fondamental de Cauchy*, Comptes Rendus, 1929, vol. 188, p. 609—611.
76. *Sur une propriété des fonctions continues dépendant de plusieurs variables*, Bull. sci. Math., 1929, vol. 53, s.2, p. 328—332.
77. *Cercetările de algebră, cele din urmă ale lui Traian Lalescu*, Revista universitară Bucureşti, 1929, vol. 1, p. 227—228.
78. *Remarques sur les fonctions holomorphes et les fonctions continues d'une variable complexe*, Mathematica, 1928, vol. 1, p. 128—129.
79. *Sur le calcul des dérivées partielles avec applications à l'analyse et à la mécanique*, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1939, vol. 54, p. 113—123.
80. *Paul Appell*, Mathematica, 1930, vol. 4, p. 186—187.
81. *Sur une propriété intégrale caractéristique des fonctions linéaires*, Bull. de Math. et Phys. pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Bucarest, 1930, vol. 2, p. 3—5.
82. *Sur une équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne*, Comptes Rendus, 1930, vol. 190, p. 1107—1109.
83. *Sur un théorème de M. Bouligand*, Ann. de l'Univ. de Jassy, 1930, vol. 16, p 4—5.
84. *Sur une propriété des fonctions holomorphes*, Comptes Rendus, 1931, vol. 192, p. 794—795.
85. *Le théorème des accroissements finis et les fonctions holomorphes*, Bull. de Math. et Phys. pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Bucarest, 1931, vol. 2, p. 155—159.
86. *Sur une propriété des fonctions holomorphes et sur un problème de géométrie élémentaire*, Bull. de Math. et Phys. pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Bucarest, 1931, vol. 2, p. 79—80.

87. *Sur les fonctions de deux variables réelles*, Comptes Rendus, Acad. Sci., Paris, 1932, vol. 194, p. 346—348.

88. *Théorème d'existance pour les zéros des fonctions holomorphes*, Comptes Rendus, Acad. Sci., Paris, 1932, vol. 195, p. 689—690.

89. *Sur un théorème analogue à celui de Rouché, relatif aux zéros des fonctions holomorphes*, Comptes Rendus, Acad. Sci., Paris, 1932, vol. 195, p. 855—857.

90. *Sur un procédé de démonstration pour établir la formule de la moyenne*, Tôhoku Math. Journ., 1933, vol. 38, p. 145—146.

91. *Un problème relatif à la monogénéité des fonctions d'une variable complexe*, Comptes Rendus, Acad. Sci., Varsovie, 1933, vol. 26, p. 15—17.

92. *Sur une proprieté des fonctions holomorphes*, Ann. Scuola norm. Pisa, 1933, t. II, s. 2, p. 227—230.

93. *Sur un point de la théorie des fonctions algébriques*, Bull. de Math. et Phys. pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Bucarest, 1933, vol. 3, p. 164—168.

94. *Remarque sur le théorème de la moyenne*, Bull. de Math. et Phys. pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Bucarest, 1934, vol. 5, p. 3—6.

95. *Sur la définition des fonctions analytiques à deux variables*, Comptes Rendus, Acad. Sci., Paris, 1934, vol. 199, p. 609—610.

96. *Sur les équations fonctionnelles des polynomes à variables réelles*, Bull. Soc. Math. France, 1934, vol. 62, p. 185—192.

97. *Remarque sur une démonstration de la formule intégrale de Cauchy*, Tôhoku Math. Journ., 1935, vol. 40, p. 85—88.

98. *La visite de M. Emile Borel en Roumanie*, Mathematica, Cluj, 1935, vol. 10, p. 209—211.

99. *Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire*, Bull. de Math. et Phys. pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Bucarest, 1936, vol. 6, p. 6—7.

100. *Les relations de Cauchy, pour les polynomes à une variable complexe*, Bull. Math. de la Soc. Roum. des Sci., 1936, vol. 38, s. 1, p. 67—71.

101. *Paul Montel, membre de l'Institut*, Mathematica, Cluj, 1937, vol. 13, p. 272—274.

102. *Sur quelques applications de la propriété du module d'une fonction holomorphe*, Bull. de Math. et Phys. pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Bucarest, 1937, vol. 7, p. 22—23.

103. *Une équation fonctionnelle à propos du centre de gravité de l'aire d'un triangle*, Bull. de Math. et Phys. pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Bucarest, 1937, vol. 8, p. 3—5.

104. *Quelques remarques sur les polynomes à une variable complexe*, Bull. math. Un. Interbalkanique, 1937, vol. 1, p. 187—189.

105. *Sources d'identité*, Publ. math. Univ., Belgrade, 1938, vol. 6—7, p. 273—275.

106. *Un théorème d'existence*, Bull. de Math. et Phys. pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Bucarest, 1938, vol. 9, p. 46—47.

107. *Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre*, Bull. math. de la Soc. Roum. des Sci., 1938, vol. 40, s. 1—2, p. 57—60.

108. *Du point à l'infini comme point singulier isolé.*, Bull. de Math. et Phys. pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Bucarest, 1938, vol. 10, p. 13—19.

109. *Sur l'équation fonctionnelle de Poinsot et autres équations analogues*, Bull. de Math. et Phys. pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Bucarest, 1938, vol. 9, p. 54—56.

110. *La géométrie et les imaginaires; démonstration de quelques théorèmes élémentaires*, Bull. de Math. et Phys. pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Bucarest, 1939, t. XI, p. 29—34.

111. *Remarque sur l'équation de Riccati*, Comptes Rendus, Acad. Sci., Paris, 1940, vol. 210, p. 692—693.

112. *De la définition du pôle en théorie des fonctions*, Disqu. math. phys., Bucarest, 1940, vol. 1, p. 57—59.

113. *De la constante arbitraire dans les opérations d'intégration*, Bull. Polytechn. Bucarest, 1941, vol. 12, p. 235—241.

114. *Sur le théorème des accroissements finis*, Mathematica, Timişoara, 1941, vol. 17, p. 129—136.

115. *Les sommes de nombres entiers*, Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1941, vol. 23, p. 225—228.

116. *Un théorème de géométrie*, Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1941, vol. 24, p. 223—226.

117. *Les fonctions indéfiniment symétriques et leurs équations différentielles*, Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1941, t. XXIV, p. 291—296.

118. *Orientarea figurilor în geometrie*, Pozitiva, 1941, t. II, p. 81—83.

119. *Préface au volume Coordonnées barycentriques, par C. Cosnitza*, Annales Roum. de Math., 1941, v. 4, Numerus 8, p. 63—64.

120. *Préface au volume G. Tzitzeica, Oeuvres*, Ed. Acad. Roum., 1941, t. I, p. I—II.

121. *Despre o specie de exagoane*, Revista Matematică din Timişoara, 1942, t. XXI, p. 125.

122. *Les définitions de l'holomorphie et le prolongement analytique*, Mathematica, Timişoara, 1942, vol. 18, p. 112—124.

123. *Formes diverses du théorème des accroissements finis*, Bull. de Math. et Phys. pures et appliquées de l'Ecole Polytéchnique Bucarest, 1942, t. XIII, p. 23—25.

124. *Sur l'arithmétique de l'infini*, Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1942, t. XXIV, p. 569—572.

125. *Les fonctions indéfiniment symétriques et les équations différentielles*, Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1942, vol. 24, p. 291—296.

126. *Sur l'arithmétique de l'infini*, Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roumaine, 1942, vol. 24, p. 569—572.

127. *Ceva despre parabolă*, Revista Matematică din Timişoara, 1943, t. XXIII, p. 569—572.

128. *O observație la împărțirea polinoamelor*, Revista Matematică din Timișoara, 1943, t. XXIII, p. 27.

129. *Raționamentul aritmetic*, Revista Matematică din Timișoara, 1943, t. XXIII, p. 111.

130. *La représentation analytique des polynomes et deux applications*, Bull. Scient. de l'Ecole Polytechnique de Timișoara, 1943, t. XI, fasc. 1—2, p. 3—5.

131. *Réfléxions sur l'arithmétique de l'infini*, Bull. Scient. de l'Ecole Polytechnique de Timișoara, 1943, t. XI, fasc. 1—2, p. 14—21.

132. *Un problème de Géométrie*, Bull. Scient. de l'Ecole Polytechnique de Timișoara, 1944, t. XI, fasc. 3—4, p. 171—173.

133. *Sur une proposition analogue au théorème des accroissements finis*, Mathematica, Timișoara, 1946, t. XXII, p. 143—146.

134. *Raționamentul aritmetic; cîteva exemple*, Revista Matematică din Timișoara, 1946, t. XXVI, p. 27.

135. *Un exercițiu de algebră și o problemă de analiză*, Revista Matematică din Timișoara, 1947, t. XXVII, p. 79.

136. *Despre explicație în matematică*, Revista Matematică din Timișoara, 1948, t. XXVII, p. 65.

137. *Algebra și aritmetica*, Revista Matematică din Timișoara, 1949, t. XXVIII, p. 185.

138. *Un exemplu de prelungire a unei soluții la o ecuație cu derivate parțiale*, Comunicări, Acad. R.P.R., 1951, t. I, nr. 5, p. 391.

139. *O teoremă de aritmetică*, Gazeta Matematică și Fizică, 1951, nr. 4, p. 29.

140. *Corespondență biunivocă între mulțimi formate din numere întregi*, Comunicări, Acad. R.P.R., 1951, t. I, nr. 8, p. 739.

141. *O ecuație aritmetică*, Bul Științ. Acad. R.P.R., 1952, t. IV, nr. 1, p. 1.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul V, nr. 1—2, 1954

# SINGULARITĂŢILE FUNCŢIILOR ANALITICE UNIFORME ŞI LUCRĂRILE ACADEMICIANULUI DIMITRIE POMPEIU

DE

ACADEMICIAN S. STOILOV

În opera matematică a academicianului Dimitrie Pompeiu, un loc de frunte îl ocupă — fără îndoială — lucrările sale asupra singularităţilor funcţiilor analitice uniforme şi, în particular, asupra singularităţilor pe care funcţiile acestea rămîn continue.

**1.** Dela clasica teoremă a lui Cauchy şi Riemann, în virtutea căreia o funcţie nu poate fi continuă într-un domeniu $D$ şi olomorfă numai în $D-x$ (unde $x$ este punct din $D$), s-au cercetat, treptat, cazurile în care rolul lui $x$ este preluat de o mulţime $E \subset D$ din ce în ce mai bogată în puncte. Problema fundamentală pe care şi-a pus-o D. Pompeiu, încă de la primele sale lucrări, era de a căuta cît de vastă poate fi mulţimea $E$, pentru ca faptul că funcţia este continuă în tot $D$ şi olomorfă în $D-E$ să atragă după sine olomorfia ei în tot domeniul $D$ [1]).

Mai înaintea lui D. Pompeiu, problema fusese atacată în cazuri mai generale decît a punctului unic $x$, de către P. Painlevé [13] în celebra sa teză de doctorat. Ceea ce ne izbeşte de la început cînd recitim azi primele lucrări pe care D. Pompeiu le-a consacrat acestei probleme, este faptul că — pe cînd principalul, dacă nu unicul, instrument de investigaţie folosit de predecesorii săi era integrala lui Cauchy — el bazează principalele sale demonstraţii pe azi-binecunoscuta teoremă a lui Morera, reciproca teoremei fundamentale a lui Cauchy, dar pe care D. Pompeiu o regăseşte în primele sale lucrări în mod cu totul independent.

Alături de această teoremă, în teza de doctorat a lui D. Pompeiu [14] un important instrument de demonstraţie îl constituie ceea ce autorul numeşte *lema lui Goursat* şi care, de fapt, rezidă într-o idee generală extrasă, prin abstractizare, din procedeul cunoscut pe care Goursat îl întrebuinţează în demonstraţia sa a teoremei lui Cauchy.

Din principalele rezultate obţinute de D. Pompeiu în teza sa [14] cu privire la problema de mai sus, menţionăm următoarele, care depăşesc în mod considerabil achiziţiile anterioare în această direcţie:

---

[1]) D. Pompeiu desemnează problema aceasta sub numele de *problema lui Briot şi Bouquet*, pentru că ea se găseşte pentru prima dată formulată de aceşti autori în cunoscutul lor tratat din 1859, *Théorie des fonctions doublement périodiques*.

1) Dacă $E$ este sumă numerabilă de mulțimi de lungime finită, funcția, continuă în $D$ și olomorfă în $D-E$, este și olomorfă în $D$.

2) Dacă $E$ este de lungime infinită dar de arie nulă și dacă funcția este lipschitziană în $D$, atunci ea este olomorfă în $D$.

Nu credem necesar să ne oprim aici asupra noțiunii de *lungime* a unei mulțimi într-un spațiu euclidian oarecare, noțiune prea bine cunoscută azi, dar care a trebuit definită și precizată cu multă grijă de D. Pompeiu în [14.] Atragem numai atenția asupra faptului că propoziția [1] de mai sus cuprinde și următoarea extensie a condiției de monogeneitate care poate fi considerată ca primul pas efectuat în direcția cercetărilor ulterioare de acest fel, de către Looman, H. Bohr, Remak, Rademacher, Menșov și alții: dacă o funcție este continuă în $D$ și monogenă în orice punct din $D$ în afară de punctele unei anumite mulțimi numerabile, funcția este, neapărat, monogenă în întreg domeniul $D$.

**2.** Ceea ce a frapat încă de la început spiritul pătrunzător al lui D. Pompeiu a fost că, în cazurile în care mulțimea $E \subset D$ este *o soluție a problemei lui Briot și Bouquet*[1]), ea se caracterizează prin anumite proprietăți metrice, proprietăți de *întindere*; structura acestei mulțimi, răspîndirea mai rară sau mai deasă a punctelor ei intervine mult mai puțin. Aceasta l-a condus să formuleze ideea generală că, în ceea ce privește, comportarea funcției în vecinătatea lui $E$, ea depinde în primul rînd de întinderea mulțimii $E$. Ideea aceasta, ilustrată și prin rezultatele mai sus menționate, ca și prin altele analoge, și-a găsit o confirmare strălucită în descoperirea de către D. Pompeiu în [14], [15] și [16], a funcțiilor uniforme continue pe singularitățile lor, acestea formînd o mulțime total discontinuă în plan.

D. Pompeiu a construit primele exemple de asemenea funcții cu ajutorul unei integrale duble devenită celebră și folosită ulterior și de alți autori în probleme diverse. Fie

$$P(z) = \iint_E \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\omega, \tag{1}$$

în care $\varphi(\zeta)$ este o funcție continuă definită pe mulțimea perfectă total discontinuă $E$ *de măsură superficială pozitivă*, iar $d\omega$ este elementul de arie integrala fiind luată pe $E$ ca o integrală Lebesgue.

Funcția $P(z)$ este continuă pe toată sfera riemanniană $(z)$, iar punctele lui $E$ sînt pentru ea puncte singulare. D. Pompeiu [14] a demonstrat acestea făcînd apel la proprietățile clasice ale potențialului logaritmic și ale derivatelor sale. A. Denjoy [2] a dat demonstrații directe și simplificate ale rezultatelor lui D. Pompeiu.

Funcțiile (1) ale lui Pompeiu au deschis un drum de cercetare cu totul nou în teoria funcțiilor analitice uniforme. Prin posibilitățile pe care le pun în evidență în ceea ce privește mulțimea punctelor singulare ale unei funcții și comportarea funcției în vecinătatea acestei mulțimi, funcțiile lui Pompeiu au contribuit în mod considerabil a lumina calea spre adîncirea studiului acestor singularități, deci spre cunoașterea mai profundă a fenomenului analiticității.

---

[1]) A se vedea nota precedentă.

3. Din moment ce măsura superficială pozitivă a mulțimii perfecte discontinue $E$ se dovedea suficientă pentru ca $E$ să nu mai fie soluție a problemei lui Briot și Bouquet, era firesc să se cerceteze dacă, în condiții ceva mai slabe, ținînd seamă bineînțeles de rezultatele anterioare și în special de propozițiunile 1) și 2) de la punctul 1, nu ar putea totuși exista funcții care să aibă proprietățile esențiale ale celor descoperite de D. P o m p e i u.

În 1914, W. G o l u b e v a indicat într-o notă scurtă [8], iar apoi în teza sa de doctorat de la Moscova [9] a arătat cum se pot construi funcții continue pe singularitățile lor și continue pe toată sfera riemanniană mulțimile lor singulare avînd măsura superficială *nulă*. Conform teoremei (1) de mai sus a lui Pompeiu, asemenea mulțimi singulare nu numai că trebuie să fie de lungime infinită, dar ele nici nu pot fi reuniuni de o infinitate numerabilă de mulțimi de lungime finită. Cu cîțiva ani înainte, A. D e n j o y [3] indicase un alt procedeu pentru construirea unor asemenea funcții, iar în 1923, P. U r î s o n a publicat [24] un exemplu îndeplinind condițiile cerute, obținut printr-o metodă simplă și naturală. Cum integrala (1) care folosise lui D. P o m p e i u în cazul cînd măsura superficicală a lui $E$ era pozitivă, nu mai putea servi în acest caz, ea fiind identic nulă, procedeul lui U r î s o n folosește, prin analogie, șiruri de funcții, fiecare din acestea fiind o sumă finită de termeni asemănători cu cei ce se află în (1) sub semnul integral. Existența funcțiilor de tipul (1) al lui Pompeiu era deci stabilită chiar atunci cînd măsura superficială a lui $E$ este nulă.

4. Dar în acest din urmă caz, reprezentarea funcției prin integrala dublă (1) nemai fiind valabilă, se punea problema cercetării condițiilor celor mai largi posibile, în care o asemenea reprezentare (foarte importantă în sine, prin analogia cu potențialul logaritmic, cum o arătase D. P o m p e i u încă din teza sa) era posibilă.

În această ordine de idei D. P o m p e i u a arătat [17] că, dacă $E$ este o mulțime liniară (așezată de exemplu pe segmentul $(AB)$ de pe axa reală) perfectă, total discontinuă și de măsură liniară pozitivă, orice funcție $f(z)$, mărginită în vecinătatea mulțimii ei singulare $E$ și nulă la infinit, poate fi pusă sub forma

$$f(z) = \int_A^B \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

în care $C(\zeta)$ este definită și integrabilă pe $[AB]$.

Dar problema reprezentării funcțiilor $P(z)$, pentru care $E$ este de măsură superficială pozitivă, prin integrale de forma (1) a fost cercetată mai ales de W. F e d o r o f f [4], [5], care a dat condiții necesare și suficiente pentru ca o asemenea reprezentare să fie posibilă. În mod mai general W. F e d o r o f f a arătat că, pentru ca funcția $f(z)$, uniformă în $D$, unde mulțimea punctelor ei singulare $E$ este perfectă, discontinuă și de măsură superficială pozitivă în orice porțiune, să poată fi reprezentată în $D$ prin

$$f(z) = \iint_E \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\omega + H(z) \qquad (2)$$

$\varphi(\zeta)$ fiind mărginită pe $E$ și $H(z)$ fiind olomorfă în $D$, este necesar ca, pentru orice cerc $K \subset D$ de centru $\zeta \in E$, să existe un polinom $p_k(z)$, astfel ca

$$|f(z) - p_k(z)| < C\rho$$

$C$ fiind o constantă independentă de $K$, $\rho$ raza lui $K$, iar $z$ un punct oarecare din $K$ exterior lui $E$. W. Fedoroff a arătat că există chiar şi funcţii continue pe $E$ cu măs. $E > 0$, care nu pot fi reprezentate prin integrale (1). Dar, după acelaşi autor asemenea funcţii se pot reprezenta întotdeauna în $D$ prin serii de asemenea integrale, adică prin serii de expresii (2).

**5.** Folosind, pe de altă parte, integrala (1) a lui Pompeiu, N. Luzin şi I. Priwaloff au demonstrat în [13] că există funcţii uniforme şi continue în $|z|<1$, admiţînd o mulţime perfectă discontinuă de singularităţi în acest cerc şi tinzînd uniform către zero pentru $|z| \to 1$.

Dar această problemă este în strînsă legătură cu problemele de unicitate ale funcţiilor analitice, adică ale determinării lor *unice* cu ajutorul valorilor, sau valorilor limită, pe frontiera domeniului lor de regularitate; şi aceasta independent de orice reprezentare analitică particulară a acestor funcţii.

Încă din 1910, D. Pompeiu a arătat [18], în mod foarte simplu, că, dacă două funcţii de tipul (1) iau aceleaşi valori în fiecare punct al mulţimii lor singulare comune $E$, ele sînt neapărat, identice. El a formulat totodată ipoteza că identitatea valorilor pe o porţiune cît de mică a lui $E$ (adică pe intersecţia lui $E$ cu o mulţime deschisă oarecare) este suficientă pentru identitatea în mare a celor două funcţii.

Propoziţiunea acesta este adevărată; ea a fost demonstrată, independent, de A. Denjoy, în anumite cazuri, apoi în mod general folosind metode cu totul diferite, de W. Fedoroff [6] şi de S. Stoilow [21], [22]. Aceste demonstraţii sînt valabile şi pentru funcţiile lui Pompeiu în *sens larg*, adică pentru funcţiile uniforme continue într-un domeniu $D$ oarecare, avînd, *în acest domeniu*, o mulţime total discontinuă de singularităţi.

Se releva prin aceste rezultate importanţa mulţimii valorilor luate de funcţiile lui Pompeiu pe mulţimea lor singulară şi era firesc ca să se cerceteze mai îndeaproape această mulţime. În 1933, W. Wolibner [25] şi, în 1934, A. C. Mukherji [11] au dat cîteva rezultate interesante în această direcţie. Astfel s-a arătat că, dacă funcţia este continuă pe toată sfera riemanniană (funcţii ale lui Pompeiu în sens *restrîns*), orice valoare luată de funcţie este luată neaparat şi pe mulţimea ei singulară.

**6.** Dacă mulţimea singulară $E$ este de lungime nulă, funcţia nu poate fi mărginită în vecinătatea nici unuia din punctele lui $E$. Aceasta rezultă, cum a arătat încă P. Painlevé [13], din aplicarea convenabilă a integralei lui Cauchy. După funcţiile uniforme cu un punct singular izolat, cazul acesta este cel mai simplu. În lucrarea sa [14] D. Pompeiu i-a consacrat cîteva pagini, observînd cel dintîi că, nu numai teorema lui Liouville, dar şi teorema lui Weierstrass asupra nedeterminării complete în orice punct al lui $E$., rămîne valabilă în acest caz. În 1937, Mary Cartwright [1] a observat că valorile lacunare ale funcţiilor uniforme $f(z)$ avînd o mulţime singulară de măsură nulă nu pot cuprinde nici un continuu şi a demonstrat că mulţimea valorilor lacunare nu poate fi de măsură superficială pozitivă. Acest din urmă rezultat se poate deduce de altfel direct din existenţa funcţiei $P(z)$, de la punctul 1, care poate fi construită pentru *orice* mulţime total discontinuă şi de măsură superficială pozitivă. Ajunge să considerăm funcţia $P f(z)$, care este mărginită şi care arată deci contradicţia. Folosirea analogă a funcţiilor lui Pompeiu în diverse alte probleme analege poate de altfel constitui un important instrument de demonstraţie.

Să semnalăm încă, în această ordine de idei, că faptele acestea care se leagă destul de direct de rezultate clasice, au putut fi extinse grație noțiunii de măsură armonică (R. Nevanlinna [12]) și la cazul analog al funcțiilor multiforme (S. Stoilow [23]). Se știe de altfel că faptul că măsura armonică a frontierei domeniului de existență al unei funcții analitice oarecare este nulă joacă un rol fundamental în unele cercetări moderne.

7. Înainte de a încheia această sumară expunere asupra unora din principalele rezultate obținute de academicianul D. Pompeiu în cercetările sale asupra singularităților funcțiilor uniforme, cred că este util să menționăm cîteva din problemele rămase în momentul de față deschise, privitoare la funcțiile lui Pompeiu.

Astfel, problema dacă funcția primitivă a unei funcții a lui Pompeiu poate fi uniformă sau nu, abordată și rezolvată de D. Pompeiu în unele cazuri [19], [20], nu a fost încă, după cîte știm, rezolvată complet.

De asemenea, nu se știe dacă există sau nu funcții ale lui Pompeiu, avînd derivata lor mărginită în vecinătatea mulțimii singulare.

Anumite indicații ar putea să dea în această privință lucrarea lui W. Fedoroff [7].

După cum a observat A. Denjoy, existența unor atare funcții ar avea unele consecințe importante, ca existența unei funcții uniforme și continue în tot planul finit, *univalentă* și avînd o mulțime perfectă discontinuă de singularități. Această funcție ar mai putea satisface condiția de a tinde către $\infty$ cu $|z|$; ea s-ar putea numi deci, cu drept cuvînt, *cvasiliniară*.

La punctul 5 am menționat rezultatul lui W. Wolibner, din care se vede că imaginea mulțimii sale singulare pe care o dă o funcție a lui Pompeiu (în sens restrîns) conține neapărat un continuu. O funcțiune cvasiliniară (funcție a lui Pompeiu în sens larg) dacă există, dă neapărat o imagine total discontinuă a mulțimii singulare. Am arătat [21] că aceste două fapte sînt echivalente: dacă se poate construi o funcție a lui Pompeiu în sens larg, astfel ca imaginea pe care ea o dă a mulțimii ei singulare să fie total discontinuă, atunci se poate construi și o funcție cvasiliniară. După cîte știm, existența sau neexistența unor atare funcții nu a fost încă stabilită.

8. Teoria funcțiilor lui Pompeiu oferă un larg cîmp de cercetări și prin generalizările eventuale la care ele ar putea da loc. Împreună cu celelalte rezultate ale academicianului D. Pompeiu, relative la singularitățile funcțiilor analitice, ea constituie un teren bogat de explorat, căruia mulți din tinerii noștri matematicieni îi vor putea consacra studiile și cercetările lor.

## СИНГУЛЯРНЫЕ ОДНОРОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И РАБОТЫ АКАДЕМИКА ДИМИТРИЯ ПОМПЕЮ

### (КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Делается обзор работ Помпею о сингулярных функций комплексной переменной и в частности функций, непрерывных на их сингулярном множестве, с учетом основных разработок, к которым они привели.

# LES SINGULARITÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES ET LES TRAVAUX DE L'ACADÉMICIEN DIMITRIE POMPEIU

(RÉSUMÉ)

Vue d'ensemble des travaux de D. Pompeiu sur les singularités des fonctions uniformes d'une variable complexe et, tout particulièrement, des fonctions continues sur leur ensemble singulier, avec indication des principaux développements auxquels ces travaux ont donné lieu.

## BIBLIOGRAFIE

1. Cartwright M. L., Quarterly Journ. of Mathem. (Oxford Series), 1937, vol. 4, p. 303 – 307.
2. Denjoy A., Comptes Rendus Acad. des Sciences, 1909, t. 148, p. 1154.
3. — Comptes Rendus Acad. des Sciences, 1909, t. 149, p. 258.
4. Fedoroff W., Matematiceski Sbornik, 1926, t. 33, p. 385 – 394.
5. — Matematiceski Sbornik, 1928, t. 35, p. 237 – 250.
6. — Comptes Rendus de la Société des Sciences et des lettres de Varsovie, 1931, t. 24, p. 92 – 108.
7. — Izvestia Akad. Nauk, 1935, nr. 37, p. 139.
8. Golubeff W., Comptes Rendus Acad. des Sciences, 1914, t. 158, p. 1407.
9. — Buletinul Univ. din Moscova, 1917, vol. 3, p. 137.
10. Lusin N. et Priwaloff I., Annales Scient. École Norm. Supérieure, 1925, t. 42, p. 143 – 191.
11. Mukherji A. C., Comptes Rendus Acad. des Sciences, 1934, t. 199, p. 448.
12. Nevanlinna R., *Eindeutige analytische Funktionen*. Springer, Berlin, 1936.
13. Painlevé P., Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1888, t. II, p. 1 – 130; Comptes Rendus Acad. Sci., 1909, t. 148, p. 1156.
14. Pompeiu D., Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 1905, nr. 2, t. VII, p. 265 – 315.
15. — Comptes Rendus Acad. des Sciences, 1904, t. 139, p. 914.
16. — American Journ. of mathematics, 1910, t. XXXII, p. 327 – 332.
17. — Comptes Rendus Acad. des Sciences, 1909, t. 149, p. 103.
18. — Rend. del Circolo Matem. di Palermo, 1910, t. 29, p. 306.
19. — Comptes Rendus Acad. des Sciences, 1909, t. 149, p. 1050.
20. — Comptes Rendus Acad. des Sciences, 1910, t. 150, p. 454.
21. Stoilow S., Bull. Math. de la Soc. roum. des Sciences, 1936, t. 38, S. 2, p. 117 – 120.
22. Stoilow S., *Principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*. Gauthier Villars, Paris, 1938.
23. — Mathematica, 1943, t. XIX, p. 126 – 138.
24. Urysohn P., Fundamenta Mathematicae, 1923, t. IV, p. 144 – 150.
25. Wolibner W., Comptes Rendus de la Société des Sciences et des lettres de Varsovie, 1933, t. 25, p. 56 – 62.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul V, nr. 1–2, 1954

# DISTANŢA DINTRE MULŢIMI ÎNCHISE INTRODUSĂ DE ACADEMICIANUL DIMITRIE POMPEIU

DE

TUDOR GANEA

1. Pentru studiul unor familii de curbe plane, academicianul D. Pompeiu a definit în teza sa de doctorat [17] următoarea distanţă între submulţimile închise ale planului.

$$\Delta(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) + \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b).$$

în care $d(a,b)$ reprezintă distanţa uzuală dintre punctele $a$ şi $b$ ale planului.

Această definiţie destul de puţin exploatată de academicianul Pompeiu în teza sa, a constituit punctul de plecare a unor vaste cercetări de topologie care sînt şi astăzi în plină dezvoltare. Este vorba despre studiul spaţiului submulţimilor închise nevide ale unui spaţiu metric dat. Razată pe distanţa definită de academicianul Pompeiu, noţiunea de spaţiu de mulţimi închise a pătruns în topologie prin intermediul cărţii de teoria mulţimilor a lui F. Hausdorff [11]. Acesta a reluat definiţia academicianului Pompeiu, modificînd-o puţin, şi a degajat cu ajutorul ei noţiunea de spaţiu al submulţimilor unui spaţiu metric dat. Distanţa dintre două părţi $A$ şi $B$ nevide ale spaţiului metric $E$, prevăzut cu metrica $d$, este după Hausdorff [11],

$$\delta(A,B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \ldots \right\}$$

Mulţimea $2^E$ a tuturor părţilor închise nevide ale spaţiului metric $E$, metrizată cu distanţa $\delta$ devine un spaţiu metric asociat spaţiului $E$; $2^E$ este spaţiul submulţimilor închise nevide ale spaţiului metric $E$. Distanţa $\delta$ satisface într-adevăr axiomele metricei; considerarea exclusivă a părţilor închise este necesară pentru ca două elemente situate la distanţa nulă să coincidă.

Spaţiul $2^E$, metrizat cu distanţa $\delta$, metrizare datorită în esenţă academicianului Pompeiu constituie în momentul de faţă o noţiune cercetată şi utilizată într-o serie întreagă de lucrări de topologie. Ea se găseşte în particular în tratatele mari de topologie ale lui P. Alexandrov şi H. Hopf [2], K. Kuratowski [15], N. Bourbaki [6].

2. Metrica spaţiului $2^E$, deci topologia sa, depinde de metrica spaţiului $E$. Se constată uşor că topologia indusă în spaţiul $2^E$ de metrica academi-

cianului Pompeiu depinde exclusiv de topologia şi nu de metrica spaţiului $E$, dacă spaţiul este compact.

Metrica academicianului Pompeiu a făcut obiectul unor generalizări recente. In primul rînd vom menţiona o topologizare a spaţiului $2^E$ datorită matematicianului sovietic A. Markov [12]. Acesta defineşte drept bază de vecinătăţi a spaţiului $2^E$ familia tuturor părţilor lui $2^E$ de forma

$$\{X \mid X \subset G_0, X \cap G_i \neq \varnothing \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

unde $G_j$, $j = 0, 1, \ldots n$ sînt mulţimi deschise nevide ale spaţiului $E$. Topologia lui Markov prezintă două avantaje însemnate: ea permite topologizarea mulţimii $2^E$ chiar atunci cînd spaţiul $E$ nu este metric; în plus, topologia lui Marcov, în cazul unui spaţiu $E$ metrizabil, depinde exclusiv de topologia lui $E$ şi nu de metrica sa.

O altă generalizare a metricei academicianului Pompeiu a fost dată de matematicianul francez N. Bourbaki [6]. Ea este aplicabilă în cazul unui spaţiu $E$ cu structură uniformă, deci mai general decît un spaţiu metric. Generalizarea aceasta prezintă însă dezavantajul de a depinde de structura uniformă a spaţiului $E$; spaţiul $2^E$ cu topologia indusă, după Bourbaki, de structura uniformă a lui $E$ nu este deci un invariant topologic al spaţiului $E$. Condiţiile necesare şi suficiente ce trebuie îndeplinite de către două structuri uniforme ale lui $E$ pentru a induce aceeaşi topologie în spaţiul $2^E$ au fost găsite de matematicianul romîn F. Albrecht [1].

Important este faptul că în cazul unui spaţiu $E$ metric şi compact, topologiile lui Markov şi Bourbaki coincid cu cea determinată de metrica academicianului Pompeiu.

**3.** Pentru un spaţiu $E$ metric şi compact, spaţiul $2^E$ metrizat cu distanţa introdusă de academicianul Pompeiu, constituie un invariant topologic al spaţiului $E$. Se pune deci problema studierii relaţiilor ce există între $E$ şi $2^E$; în special este important de decis în ce măsură este determinat spaţiul $E$ prin cunoaşterea spaţiului său de mulţimi închise $2^E$. Această problemă a fost studiată în special de către matematicienii polonezi într-o serie de lucrări publicate în periodicul Fundamenta Mathematicae.

Rezultatul cel mai însemnat în această direcţie este cel obţinut de M. Wojdyslawski. Acesta a demonstrat [21], [22] că pentru un spaţiu $E$ metric şi compact, conexiunea şi conexiunea sa locală sînt echivalente cu proprietatea lui $2^E$ de a fi o retractă absolută. Rezulatul lui Wojdyslawski este surprinzător deoarece arată completa independenţă a tipului de homotopie a lui $2^E$ faţă de tipul de homotopie al lui $E$. Intr-adevăr, retractele absolute au tipul de homotopie al unui punct; ele sînt spaţii topologice cu o structură deosebit de simplă: grupurile lor de homologie şi de homotopie sînt reduse la elementul neutru.

Deşi foarte complet, rezultatul lui Wojdyslawski lasă deschisă o problemă centrală a teoriei spaţiului de mulţimi închise. Este vorba despre problema determinării spaţiului $E$ prin intermediul spaţiului $2^E$. Această problemă nu este nici astăzi rezolvată; nu se ştie dacă echivalenţa topologică a spaţiilor de mulţimi închise $2^X$ şi $2^Y$ implică homeomorfismul spaţiilor $X$ şi $Y$. Mai mult decît atît: nu se cunosc nici pînă acum două spaţii $X$ şi $Y$ topologic

diferite care să posede spații de mulțimi închise $2^X$ și $2^Y$ homeomorfe sau nehomeomorfe.

M. Wojdyslawski [21] a emis ipoteza că pentru un continuu local conex $E$, spațiul $2^E$ este homeomorf cubului hilbertian. Nu se știe dacă această ipoteză este sau nu verificată. Matematicianul american J. L. Kelley [14], în teza sa de doctorat consacrată studiului spațiului de mulțimi închise, a demonstrat doar că $2^E$ conține totdeauna o mulțime homeomorfă cubului hilbertian. M. Wojdyslawski [21] a ridicat și problema homogeneității spațiului $2^E$; homogeneitatea cubului hilbertian fusese demonstrată de O. H. Keller [13], un elev al matematicianului sovietic P. S. Alexandrov.

Se constată deci că studiul spațiului mulțimilor închise, metrizat cu distanța definită de academicianul Pompeiu, a fost obiectul unor cercetări bogate în rezultate, cercetări ce sînt departe de a fi epuizate astăzi.

**4.** Spațiul $2^E$ al mulțimilor închise ale unui spațiu separat $E$ conține o serie de subspații deosebit de interesante. Este vorba despre așa numitele puteri simetrice ale spațiului $E$.

Puterea simetrică $E(n)$ de rang $n$ a unui spațiu $E$ este prin definiție subspațiul lui $2^E$ constituit de submulțimile lui $E$ ce conțin cel mult $n$ puncte. Această noțiune a fost introdusă de matematicienii polonezi K. Borsuk și S. Ulam [3]. Puterea simetrică se topologizează cu ajutorul metricei induse în $E(n)$ de metrica academicianului Pompeiu din spațiul $2^E$.

Prin considerarea puterilor simetrice, metrica academicianului Pompeiu capătă o justificare deosebit de interesantă. Într-adevăr, produsul topologic de rang $n$ al spațiului $E$ prin el însuși are o metrică bine justificată încă prin considerații de geometrie elementară. Este firesc să se impună topologiei puterii simetrice condiția ca ea să fie topologia - cît a produsului topologic identificînd punctele acestuia care au aceeași mulțime de coordonate; ori, se constată că metrica academicianului Pompeiu, introdusă în puterea simetrică, satisface tocmai acestei condiții de a induce în $E(n)$ topologia - cît a lui $E^n$.

Puterile simetrice ale spațiului $E$ aproximează, cînd întregul $n$ tinde către infinit, spațiul $2^E$ al mulțimilor închise. O serie de rezultate în legătură cu puterile simetrice au fost obținute de K. Borsuk și S. Ulam, aceștia fiind, primii care au introdus această noțiune. Ei au studiat în particular puterile simetrice ale segmentului [0, 1], dovedind că pentru $n \geqslant 4$ acestea nu sînt scufundabile în spațiul euclidean cu $n$ dimensiuni. Matematicianul japonez A. Haratomi [10] a demonstrat că puterea simetrică de rang 4 a segmentului poate fi scufundată în spațiul euclidean cu 5 dimensiuni. Matematicianul chinez Wen-Tsun Wu [20] a calculat grupurile de homologie ale puterilor simetrice ale segmentului și circumferenței. In urma unei lucrări a lui K. Borsuk [3], corectată de R. Bott [5] este stabilit că puterea simetrică de rang 3 a circumferinței este o sferă 3-dimensională. In sfîrșit unele probleme ridicate și lăsate deschise din lucrarea inițială a lui Borsuk și Ulam [3] au fost rezolvate recent de Tudor Ganea. Acesta a demonstrat că puterea simetrică este contractibilă și local contractibilă dacă spațiul inițial are aceeași proprietate [9]. In plus [8], puterea simetrică este unicoherentă și simplu conexă dacă spațiul $E$ are aceste proprietăți;

dimensiunea puterii simetrice este egală cu cea a produsului cartezian şi puterea simetrică este o varietate cantoriană dacă produsul cartezian este o varietate cantoriană [8].

**5.** Metrica academicianului Pompeiu şi spaţiul mulţimilor închise au fost utilizate adesea şi în cercetări de teoria funcţiilor de o variabilă reală. Astfel, în lucrările sale asupra funcţiilor multiforme [7], A. Froda a definit oscilaţia unor asemenea funcţii cu ajutorul metricei academicianului Pompeiu. Spaţiul mulţimilor închise a înlesnit şi studiul mulţimilor analitice, în sensul matematicienilor sovietici N. Luzin şi M. Suslin, pentru spaţii metrice compacte, mai generale decît segmentul [0,1]. In această ordine de idei, a fost studiată clasa mulţimii părţilor conexe, a părţilor unicoherente ale unui spaţiu dat; menţionăm aici lucrări ale matematicienilor polonezi K. Kuratowski [15], S. Mazurkiewicz [16], E. Szpilrajn [18] şi W. Sierpinski [19].

## РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ЗАМКНУТЫМИ МНОЖЕСТВАМИ, ОПРЕДЕЛЕННОЕ АКАДЕМИКОМ ДИМИТРИЕМ ПОМПЕЮ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Рассматривается гиперпространство пространства, метризуемого при помощи формулы Д. Помпею.

## THE DISTANCE BETWEEN CLOSED SUBSETS DEFINED BY D. POMPEIU

(Abstract)

Expository paper concerning the hyperspace of a space, metrized by D. Pompeiu's formula.

### BIBLIOGRAFIE

1. Albrecht F., Comunicările Acad. R.P.R., 1952, t. 2, nr. 2, p. 209 — 212.
2. Alexandrov P. u. Hopf H., *Topologie*. Berlin. vol. I, 1935.
3. Borsuk K. şi Ulam S., Bull. Amer. math. Soc., 1931, vol. 37, p. 875 — 882.
4. Borsuk K., Fund., Math., 1949, vol. 36, p. 236 — 244.
5. Bott R., Fund. Math., 1952, vol. 39, p. 264 — 268.
6. Bourbaki N., *Topologie Générale*. Paris, 1940 — 1949.
7. Froda A., Studii şi Cerc. Mat., 1950, vol. 1, p. 138 — 161.
8. Ganea T., Comunicările Acad. R.P.R. (sub. tipar).
9. — Studii şi Cerc. Mat., 1953, vol. 4, p. 23 — 28.
10. Haratomi A., Iap. J. Math., 1932, vol. 9, p. 103 — 110.
11. Hausdorff F., *Grundzüge der Mengenlehre*. Berlin-Leipzig, 1914.
12. Ivanova V. M., Uspehi Mat. Nauk, 1951, t. 4, seria a 44-a, p. 201.
13. Keller O. H., Math. Annal., 1932, vol. 105, p. 748 — 758.
14. Kelley J. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, vol. 52, p. 22 — 36.
15. Kuratowski K., *Topologie*. Varşovia, 1948 — 1950, vol. I şi II.
16. Mazurkiewicz S., Fund. Math., 1936, vol. 26, p. 50 — 51.
17. Pompeiu D., Ann. Fac. Toulouse, 1905, t. 7, seria a 2-a, p. 264 — 315.
18. Szpilrajn E., Fund. Math., 1937, vol. 29, p. 304 — 306.
19. Sierpinski W., Fund. Math., 1935, vol. 25, p. 261 — 263.
20. Wen-Tsun Wu, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1947, vol. 224, p. 1139 — 1141.
21. — Fund. Math., 1938, vol. 30, p. 247 — 252.
22. Wojdyslawski M., Fund. Math., 1939, vol. 32, p. 184 — 192.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul V, nr. 1—2, 1954

# MULŢIMI DE DISTANŢE ÎN SPAŢIUL EUCLIDIAN TOTAL

DE

ALEXANDRU FRODA

## Introducere

Proprietăţile mulţimilor $E$ de puncte ale unui spaţiu dat $\mathfrak{E}$ se pot studia în raport cu proprietăţile mulţimii distanţelor perechilor de puncte distincte din $E$ [1]).

Fie $D(E)$ această mulţime de distanţe. Să o presupunem inclusă într-o mulţime $L$ dată de valori pozitive, densă în intervalul $(0, +\infty)$, ca de exemplu mulţimea $R$ a valorilor raţionale pozitive. O astfel de mulţime $L$ se va numi *mulţime de includere* [2])* a distanţelor.

*Fiind dată o mulţime de includere $L$, se poate atribui mulţimii $E$ un număr arbitrar de puncte, cînd se cere ca $D(E)$ să fie inclusă în $L$?*

Putem răspunde acestei întrebări, definind mai întîi spaţiul $\mathfrak{E}$, după cum urmează: Fiecare *punct* * din $\mathfrak{E}$ este dat de un şir indefinit de numere reale (*coordonate* *), dintre care un număr finit, nenule. Între două puncte din $\mathfrak{E}$, *distanţa* * se defineşte prin expresia ei euclidiană, obişnuită. $\mathfrak{E}$ se va numi *spaţiul euclidian total* *.

Considerăm apoi mulţimi $E$ *cu distanţe inegale* * între punctele lui $E$, luate două cîte două.

Fiecare mulţime $E$ de puncte din $\mathfrak{E}$ posedă o *dimensiune* $r$ *, care este — prin definiţie — aceea a multiplicităţii liniare, născută de vectorii din $\mathfrak{E}$, avînd extremităţile lor în $E$ şi care poate fi de asemenea infinită, odată cu marginea superioară a dimensiunilor submulţimilor finite din $E$. Fiind date $L$ şi $r$ (finită sau egală cu $\aleph_0$), se demonstrează existenţa unei mulţimi $E$, *avînd distanţele sale* * în $L$ (adică $D(E)$ inclusă în $L$) şi avînd dimensiunea $r$.

O mulţime $E$ de puncte din $\mathfrak{E}$ este *minimală* * cînd numărul punctelor sale reprezintă minimul compatibil cu dimensiunea fiecăreia din submulţimile sale finite: o mulţime minimală, avînd dimensiunea $n$, are $n+1$ puncte (şi reciproc). O mulţime minimală de dimensiune $\aleph_0$ este numărabilă.

Folosind axioma alegerii, se găseşte proprietatea, destul de neaşteptată, următoare:

*Există o clasă ($\mathfrak{L}$) nevidă de mulţimi de includere $L$, astfel ca orice mul-*

---

[1]) Acest punct de vedere se întîlneşte şi în lucrările lui S. Piccard, despre mulţimile de distanţe, unde $D(E)$ include — prin definiţie — şi distanţa (nulă) a două puncte confundate [5].

[2]) Noţiunile indicate cu steluţă * în Introducere, sînt definite în textul lucrării.

*ţime E de puncte din $\mathcal{E}$, cu distanţe inegale, să fie minimală, cînd mulţimea D (E) a distanţelor sale este inclusă în L.*

Iată şi alte proprietăţi ale mulţimilor $L$ de clasă $(\mathfrak{L})$:

Orice submulţime densă, în $(0, +\infty)$, a unei mulţimi de clasă $(\mathfrak{L})$ este de clasă $(\mathfrak{L})$; o mulţime densă, în $(0, +\infty)$, posedă în totdeauna o submulţime de clasă $(\mathfrak{L})$; o mulţime de clasă $(\mathfrak{L})$, numărabilă (sau de putere inferioară continuului) este întotdeauna o submulţime a unei mulţimi saturate în $(\mathfrak{L})$ [1] şi care este complet măsurabilă în orice interval $\Delta$ de valori pozitive [2]; complementara unei mulţimi de clasă $(\mathfrak{L})$ este de a doua categorie (a lui Baire) în orice $\Delta$; mulţimea $R$ a valorilor raţionale pozitive nu este de clasă $(\mathfrak{L})$ [3].

Demonstraţia acestor rezultate se sprijină pe proprietăţile spaţiilor euclidiene cu un număr finit de dimensiuni, presupuse cunoscute. Ele au fost extinse la spaţiul euclidian total $(\mathcal{E})$, de cîte ori aceasta a fost necesar.

Putem semnala în sfîrşit, că rezultatele de mai sus se pot extinde, fără greutate, lărgind definiţiile spaţiului $(\mathcal{E})$ sau ale clasei $(\mathfrak{L})$, fără o modificare esenţială a metodelor întrebuinţate [4].

## I. Spaţiul euclidian total. Preliminarii [5]

**§ 1. Spaţiul $\mathcal{E}$.** Fie $P$ un complex ordonat de valori reale:

$$P: \qquad x^1, x^2, \ldots x^j, \ldots,$$

dintre care cel mult un număr finit sînt nenule. Definim *spaţiul* $\mathcal{E}$, ca mulţimea acestor complexe. Numim *$P$ punct* al spaţiului $\mathcal{E}$ şi *$x^j$ coordonata de ordin $j$* a lui $P$.

Spaţiul $\mathcal{E}$, înzestrat cu o metrică euclidiană, prin introducerea unei *distanţe $d(P_0, P_1)$* a două puncte oarecare $P_0, P_1$ ale lui $\mathcal{E}$

$$d(P_0, P_1) = \left| \left[ \sum_{j}^{1,\infty} (x_1^j - x_0^j)^2 \right]^{1/2} \right| \tag{1}$$

($x_0^j$, $x_1^j$ sînt coordonate de ordin $j$ ale punctelor $P_0$ şi $P_1$) se va numi *spaţiul euclidian total.* Pentru $P_1, P_2, P_3$ puncte oarecare din $\mathcal{E}$, avem

$$d(P_1, P_1) = 0,\ d(P_1, P_2) \leqslant d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2),\ d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1), \tag{2}$$

cum se verifică de altfel direct din formula (1).

---

[1]) O mulţime este *saturată în* $(\mathfrak{L})^*$, cînd este de clasă $(\mathfrak{L})$ şi încetează de a mai aparţine clasei, cînd îi adăugăm o valoare pozitivă oarecare.

[2]) O mulţime este *complet nemăsurabilă în* $\Delta^*$, cînd măsurile exterioare ale mulţimii şi complementarei ei, faţă de $\Delta$, au fiecare măsura egală cu mas $\Delta$ (măsura în sensul Borel-Lebesgue).

[3]) Renunţînd, la nevoie, la condiţia ca $E$ să fie cu distanţe inegale, se pot construi efectiv mulţimi numărabile cu $p = 1, 2, 3$ dimensiuni, astfel ca $D(E) \subset R$. Dimpotrivă, chestiunea existenţei unei mulţimi $E$, de acest fel, care să fie totodată densă în spaţiul euclidian $\mathcal{E}^{(p)}$ cu $p > 1$ dimensiuni, rămîne o chestiune deschisă [1].

[4]) S-ar putea demonstra de exemplu existenţa unei clase $(\mathfrak{L}_h)$ de mulţimi de includere $L$, astfel ca orice $E \subset \mathcal{E}$, cu distanţe inegale şi de dimensiune $r \leqslant \aleph_0$ să aibă $r + h$ puncte, cînd $D(E) \subset L$; se poate lua $h$ funcţie de $r$ şi $1 \leqslant h \leqslant \aleph_0$.

[5]) Vom nota cu $\cup$, $\cap$, $\subset$ reuniunea, intersecţia, incluziunea mulţimilor, cu $\rightarrow$ incluziunea logică, cu $\varnothing$ mulţimea vidă, cu $\in$ simbolul de apartenenţă a unui element de o mulţime dată.

Punctul $P_0$ din $\mathcal{E}$, avînd fiecare coordonată $x^j = 0$ este *punctul origine* $O$. Pentru fiecare punct $P \in \mathcal{E}$. există un întreg $m$, denumit *număr ataşat lui* $P$, astfel ca $x^m \neq 0$, $x^{m+h} = 0$, $h = 1,2, \ldots$, dacă $P \neq O$ sau $m = 0$, dacă $P = O$.

Mulțimea punctelor $P$ din $\mathcal{E}$, astfel ca $m \leqslant p$, va fi — prin definiție — spațiul $\mathcal{E}^p$ cu $p$, dimensiuni, $p = 0,1,2, \ldots$ [1]). Avem

$$\mathcal{E}^0 \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E} \subset \ldots \subset \mathcal{E}^p \subset \ldots \subset \mathcal{E}, \qquad \mathcal{E} = \bigcup_p \mathcal{E}^p . \tag{3}$$

Pentru $p \geqslant m$, avem $P \in \mathcal{E}^p$; pentru $p < m$, avem $P \notin \mathcal{E}^p$, proprietăți ce vom exprima, spunînd că $P$ *apare mai întîi* în $\mathcal{E}^m$, $m$ finit.

**§ 2. Multiplicități liniare.** Fie $P_0, P_1$ puncte ale spațiului euclidian total $\mathcal{E}$, de coordonate $x_0^j$, $x_1^j$ ($j = 1,2, \ldots$). Complexul ordonat $\overline{V}$ de valori reale

$$\overline{V}: \qquad x_1^1 - x_0^1, x_1^2 - x_0^2, \ldots, x_1^j - x_0^j, \ldots$$

se numește *vector al spațiului* $\mathcal{E}$; el poate fi notat și $\overline{P_0 P_1}$, punctele $P_0, P_1$ sînt extremitățile vectorului, valoarea $x_1^j - x_0^j$ este *componenta de ordin* $j$ a vectorului. Un vector oarecare $\overline{V}$ al lui $\mathcal{E}$ nu are decît un număr finit de componente $V^j$ nenule.

Fie $P$ punctul din $\mathcal{E}$, avînd drept coordonată de ordin $j$ componenta de ordin $j$ a lui $\overline{P_0 P_1}$, pentru fiecare $j = 1,2, \ldots$; avem $\overline{P_0 P_1} = \overline{OP}$.

Fie $m_1 m_2$ numerele ataşate (§1) extremităților unui vector $\overline{V}$; vom spune că $m = \sup \{m_1, m_2\}$ este *numărul ataşat lui* $\overline{V}$ sau că $\overline{V}$ *apare mai întîi* în $\mathcal{E}^m$, $m$ finit.

Fie $E$ o mulțime de puncte din spațiul $\mathcal{E}$. Vom spune că $\overline{P_1 P_2}$ este un *vector al mulțimii* $E$, cînd extremitățile sale sînt puncte din $E$. Mulțimea vectorilor lui $E$ se va nota cu $W(E)$ și vom avea $\overline{V} \in W(E)$.

O mulțime $\Lambda$ de vectori din $\mathcal{E}$ se va numi *multiplicitate liniară*, cînd pentru fiecare $a$ real și $\overline{V}_1, \overline{V}_2$ oarecare în $\Lambda$, avem

$$a\overline{V}_1 \in \Lambda, \qquad \overline{V}_1 + \overline{V}_2 \in \Lambda \text{ [3])}.$$

Fie dată o mulțime $W$ de vectori din spațiul $\mathcal{E}$. Mulțimea vectorilor

$$\overline{V} = a_1 \overline{V}_1 + a_2 \overline{V}_2 + \ldots + a_h \overline{V}_h ,$$

(în care $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \ldots, \overline{V}_h$ sînt vectori din $W$; $a_1, a_2, \ldots, a_h$ sînt valori reale oarecare, $h$ un număr natural) constituie o multiplicitate liniară notată

---

[1]) În ceea ce urmează, vom aplica direct și fără a distinge, lui $\mathcal{E}^p \subset \mathcal{E}$, proprietăți (cunoscute) ale spațiului euclidian $\mathcal{E}^{(p)}$ de puncte, cu $p$ coordonate reale și cu distanța euclidiană, de cîte ori va fi clar că nu este nimic de schimbat în raționamentele clasice, dacă se atribuie fiecărui punct $P$ din $\mathcal{E}^{(p)}$, în plus de cele $p$ coordonate ale sale $x^1, x^2, \ldots, x^p$ și coordonatele de ordin superior $x^{p+1}, x^{p+2} \ldots$, toate nule.

[2]) Egalitatea vectorilor din $\mathcal{E}$ se definește astfel: $\overline{V}_1 = \overline{V}_2 \rightleftarrows V_1^j = V_2^j$ ($j = 1,2, \ldots$). Există un vector nul, $\overline{V}_0 = O \rightleftarrows V_0^j = 0$, ($j = 1, 2, \ldots$).

[3]) Prin definiție:
$\overline{V} = a\overline{V}_1 \rightleftarrows V^j = aV_1^j (j = 1, 2, \ldots)$; $\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 \rightleftarrows V^j = V_1^j + V_2^j (j = 1, 2, \ldots)$, $a$ real

$\Lambda(W)$, despre care vom spune că este *generată de vectorii mulțimii* $W$, *respectiv ai mulțimii de puncte* $E$, cînd $W = W(E)$ și notăm $\Lambda(E) = \Lambda(W(E))$.

Vom spune că vectorii $\overline{V}_i$ $(i = 1,2, \ldots, q)$ ai spațiului $\mathcal{E}$ sînt *liniar independenți*, cînd pentru valori $a_i$ reale, avem implicația

$$a_1 \overline{V}_1 + a_2 \overline{V}_2 + \ldots + a_q \overline{V}_q = 0 \rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 0, \ldots, a_q = 0.$$

În caz contrar, se poate arăta imediat că printre $\overline{V}_i$, există cel puțin un vector, de exemplu $\overline{V}_q$, cînd $a_q \neq 0$, care este *liniar dependent* de ceilalți, adică astfel ca

$$\overline{V}_q = b_1 \overline{V}_1 + b_2 \overline{V}_2 \ldots + b_{q-1} \overline{V}_{q-1},$$

în care $b_1, b_2, \ldots, b_{q-1}$ sînt anumite valori reale.

Un sistem $B$ de un număr finit sau infinit de vectori din $\mathcal{E}$, este numit *ortonormal*, dacă este totodată *normal* (fiecare vector din $B$ este normal) și *ortogonal* (doi vectori oarecare din $B$ sînt ortogonali) [1]).

Punînd

$$B = \{\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_i, \ldots\},$$

avem deci

$$\overline{U}_i = 1, \quad \overline{U}_i \cdot \overline{U}_h = \delta_{ih}, \quad i, h = 1,2, \ldots,$$

unde, prin definiție, simbolul $\delta_{ih}$ (al lui Kronecker) satisface

$$i = h \rightarrow \delta_{ih} = 1, \quad i \neq h \rightarrow \delta_{ih} = 0. \tag{4}$$

Numim *translația* $\overline{T}$ a spațiului $\mathcal{E}$, o transformare punctuală, care înlocuiește fiecare punct $P$ printr-un punct corespunzător $P^*$, astfel ca să avem $\overline{OP^*} = \overline{OP} + \overline{T}$. Orice mulțime $E \subset \mathcal{E}$ va fi deci înlocuită cu mulțimea $E^*$ a punctelor $P^*$ corespunzătoare. Vectorii din $E$ se înlocuiesc deci cu vectori egali din $E^*$.

*Observație*: Există o invarianță, în raport cu translația $\overline{T}$, a proprietăților de dependență și de independență liniare, ca și de proprietatea de ortogonalitate, ale vectorilor spațiului $\mathcal{E}$.

**§ 3. Dimensiunea unei mulțimi de puncte din** $\mathcal{E}$. Fie $E$ o mulțime nevidă de puncte din spațiul euclidian total $\mathcal{E}$ și $W_q$ o mulțime de $q$ vectori din $E$, liniar independenți ($q$, număr natural). Vom spune că *mulțimea* $E$ *din* $\mathcal{E}$ *are dimensiunea* $r$, finită sau infinită [2]) cînd $r$ este marginea superioară

---

[1]) *Produsul interior* $\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2$ al vectorilor $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$ din $\mathcal{E}$, de componente $x_1^j$, $x_2^j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, respectiv, este — prin definiție — valoarea reală $\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 = \Sigma\, x_1^j \cdot x_2^j$ spunem că $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$ sînt *ortogonali*, cînd $\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 = 0$. *Norma* lui $\overline{V}$ este $\overline{V} \cdot \overline{V}$ sau $\overline{V}^2$; $\overline{V}$ este *normal*, cînd $\overline{V}^2 = 1$. *Lungimea* sau *valoarea absolută* a lui $\overline{V}$ este $|\overline{V}| = +\sqrt{\overline{V}^2}$; cînd $\overline{V}$ este normal, avem $|\overline{V}| = 1$. Se spune că $\overline{V}$ este *ortogonal la* $W(E)$, cînd este ortogonal la orice vector din $E$.

[2]) $r$ este egal cu unul din numerele $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ sau $\aleph_0$.

a numerelor naturale $q$, unde fiecare $W_q \subset W(E)$ și satisface definiției date pentru $W_q$. Cînd $E$ se reduce la un singur punct și numai în acest caz, se ia $r = 0$. Mulțimea vidă $\varnothing$ nu are dimensiune.

*Observație*: *a*) Fie $E$ și $E'$ mulțimi de puncte din $\mathcal{E}$, cu dimensiunile respective $r$ și $r'$; dacă avem $E \subset E'$ rezultă din definiție că avem și $r \leqslant r'$. Mai dăm încă, definiția următoare: O mulțime $W$ de vectori din $\mathcal{E}$ are *dimensiunea finită* $q$, atunci cînd există o mulțime $W_q$ de vectori liniari independenți, astfel ca

$$W_q \subset W \subset \Lambda(W_q) \tag{5}$$

și cum $W_q$ și $\Lambda_q(W_q)$ satisfac de asemenea acestei relații, ele au de asemenea dimensiunea $q$ [1]).

1° *Cînd mulțimea E din* $\mathcal{E}$ *are dimensiunea finită q, W(E) are de asemenea dimensiunea q.* Intr-adevăr $W = W(E)$ satisface relația (5), deoarece pe de o parte $W_q \subset W(E)$ și pe de altă parte fiecare vector $\overline{V}$ din $W(E)$ trebuie să depindă liniar de $q$ vectori liniari independenți din $W_q$. Intr-adevăr este suficient să observăm că cei $q+1$ vectori ai mulțimii $W^* = W_q \cup \{\overline{V}\}$ nu pot fi liniar independenți, deoarece dimensiunea lui $E$ este $q$.

*Observații*: *a) Este clar că există o invariantă a dimensiunii lui E, în raport cu translația* $\overline{T}$ *a lui* $\mathcal{E}$.

*b)* Din observația *a)* de mai sus, rezultă că, notînd cu $qq'$, dimensiunile lui $W$, $W'$ respectiv, avem

$$W \subset W' \rightarrow q \leqslant q'. \tag{6}$$

2° *Cînd mulțimea E din* $\mathcal{E}$ *are dimensiunea finită q și* $P_0$ *este un punct arbitrar din E, există q puncte* $P_1, P_2, \ldots, P_q$ *în E, astfel ca vectorii* $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_0P_2}, \ldots, \overline{P_0P_q}$ *ai mulțimii E să fie liniar independenți.*

Intr-adevăr, $E$ avînd dimensiunea $q$, fie $\overline{Q_i\,Q_i'}$ $(i = 1,2,\ldots,q)$ $q$ vectori liniar independenți, din $W_q \subset W(E)$. Unele dintre cxtremitățile lor pot fi confundate. Sînt deci cel mult $2q$ vectori distincți printre vectorii $\overline{P_o\,Q_i}$, $\overline{P_o\,Q_i'}$ $(i = 1,2,\ldots,q)$; fie $W'$ sistemul acestor vectori, și $q'$ dimensiunea lui $W'$. Există printre ei un sistem $W'_{q'}$ de $q'$ vectori liniar independenți,

$$W'_{q'} \subset W' \subset W(E).$$

---

[1]) Mulțimea $W_q = \{\overline{V}_1, \overline{V}_2, \ldots\}$ de $q$ vectori $\overline{V}_j$ liniar independenți se numește *bază liniară* a lui $\Lambda = \Lambda(W_q)$. Fie $W'_{q'} = \{\overline{V}'_1, \overline{V}'_2, \ldots, \overline{V}'_{q'}\}$ o bază liniară de $q'$ vectori $\overline{V}'_i$ din $\Lambda' = \Lambda(W'_{q'})$; dacă $\Lambda' = \Lambda$, rezultă $q = q'$, bazele sînt *echivalente*. Fie $\overline{V}'_i = \sum a_{ij}\overline{V}_j$ $(i,j = 1, 2, \ldots, q)$ și $\Delta$ determinantul acestui sistem; trebuie și este suficient ca $\Delta \neq 0$ pentru ca $W'_{q'}$ să fie o bază a lui $\Lambda(W_q)$.

$B$ fiind un sistem ortonormal de vectori $\overline{U}_i$, fiecare $q$ vectori diferiți din $B$ ($q$ finit) sînt liniar independenți, deoarece din (4): $\sum a_i\overline{U}_i = 0 \rightarrow \sum a_i\overline{U}_i \cdot \overline{U}_j = 0 \rightarrow a_i\overline{U}_i^2 = a_i = 0$; $i, j = 1, 2, \ldots, q$, și fie $B_q = \{\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_q\}$. Orice vector $\overline{OP} = \overline{V} \in \Lambda(B_q)$ se scrie $\overline{V} = \sum y^j\overline{U}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$ în care valorile reale $y^j$ sînt coordonatele punctului $P$ (respectiv *componentele* lui $\overline{V}$) *relativ la baza ortonormală* $B_q$. Se poate demonstra că orice multiplicitate liniară $\Lambda$ cu $q$ dimensiuni este generată de o bază ortonormală $B_q$.

Rezultă deci $q' \leqslant q$, dar cum

$$\overline{Q_i Q_i'} = \overline{P_o Q_i'} - \overline{P_o Q_i},$$

cei $q$ vectori liniar independenți ai lui $W_q$ depind liniar de cei $q'$ vectori ai lui $W_{q'}'$. Avem deci $W_q \subset \Lambda(W_{q'}')$ și deci $q \leqslant q'$. Urmează $q' = q$, $W_{q'}' \subset W'$ și demonstrația este terminată.

Fie $E$ o mulțime de puncte din $\mathfrak{E}$ având dimensiunea $r$, finită sau infinită. Notăm cu $E^p$ mulțimea punctelor lui $E$, care aparțin spațiului $\mathfrak{E}^p$

$$E^p = E \cap \mathfrak{E}^p, \qquad p = 0,1,2 \ldots$$

In virtutea relațiilor (3), avem

$$E^\circ \subset E^1 \subset \ldots \subset E^p \subset \ldots \subset E; \; E = \bigcup_p E^p. \tag{7}$$

Notînd cu $r_p$ dimensiunea lui $E^p$ ($p = 0,1,2, \ldots$), avem $r_p \leqslant p$, deoarece $E^p \subset \mathfrak{E}^p$ și $p$ este dimensiunea mulțimii $\mathfrak{E}^p$. Avem, de asemenea (6),

$$r_0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_p \leqslant \ldots \leqslant r \tag{8}$$

și se poate arăta că

**3°** *Dimensiunea $r$, finită sau infinită, a unei mulțimi $E$ de puncte din $\mathfrak{E}$ este marginea superioară a dimensiunilor $r_p$ ale mulțimilor $E^p$.*

Rezultă într-adevăr din (8), că avem $r \geqslant \sup \{ r_p \}$ și este suficient să dovedim absurditatea ipotezei.

$$r > \sup_p \{ r_p \}. \tag{9}$$

Or, prin definiție, $r$ este marginea superioară a numerelor naturale $q$ astfel ca $W_q \subset W(E)$, cei $q$ vectori ai sistemului $W_q$ fiind liniar independenți. Avem $q \leqslant r$, cînd $r$ este finit și $q < r$, cînd $r$ este infinit.

Vectorii $\overline{V}$ ai sistemului $W_q$ au cel mult 2q extremități distincte. Fiecărei extremități $P$ a unui $\overline{V}$ îi corespunde un număr ataşat $m$ finit iar $P$ apare mai întîi în $\mathfrak{E}^m$ (§1). Fie $s$ marginea superioară finită a întregilor $m$. Extremitățile vectorilor $\overline{V} \in W_q$ sînt puncte din $E$ și de asemenea puncte din $\mathfrak{E}^s$; ele sînt deci puncte din $E^s$. Avem $W_q \subset \Lambda(E^s)$ și de aci rezultă relația $q \leqslant r_s$, între dimensiunile lor.

Dacă $r$ este finit, se poate lua $q = r$ și avem $r \leqslant r_s$, ceea ce contrazice ipoteza (9). Dacă $r$ este infinit, putem face pe $q$ să tindă către infinit, deci $r_s$ tinde către infinit și $\sup \{r_s\} = \aleph_o$, ceea ce contrazice cu atît mai mult ipoteza (9).

Numim *număr ataşat unei mulțimi $E$* de puncte din $\mathfrak{E}$, marginea superioară $b(E)$, finită sau infinită, a numerelor $m \geqslant 0$, ataşate fiecărui punct $P$ din $E$ dela **§ 1**, $b(E) = \sup_E \{m\}$.

**4°** *Dimensiunea unei mulțimi $E$ din $\mathfrak{E}$ este finită sau infinită în același timp cu numărul $b(E)$ ataşat lui $E$* [1]).

---

[1]) Această proprietate este adevărată, cu toate că $b(E)$ nu este invariantă în raport cu o translație a lui $E$.

Fie $b = b(E)$ finit. Numărul $m$, ataşat unui punct oarecare $P$ al mulţimii $E$ satisface relaţia $m \leqslant b$, deci $E \subset \mathcal{E}^b$ şi pentru dimensiunea $r$ a mulţimii $E$, avem $r \leqslant b$, $r$ fiind finită.

Dacă dimpotrivă $b = \aleph_0$, trebuie să existe vectori $\overline{V}_m$ ai mulţimii $E$, care apar mai întîi în $\mathcal{E}^m$, pentru numere $m$ arbitrar de mari, deci componentele de ordin $m$ ale acestor vectori sînt nenule. Dacă am admite, prin absurd, că dimensiunea $r$ a mulţimii $E$ este finită, ar exista un $p$ finit, astfel ca, analog cu 3°, să avem $r = r_p \leqslant p$ şi deci un sistem $W_p^*$ de $r_p$ vectori $\overline{V}^*$ ai mulţimii $E$, liniar independenţi şi astfel ca $\overline{V}_p^* \subset \mathcal{E}^p$. Luăm un $m > p$, pentru care un vector $\overline{V}_m$ al lui $E$ apare mai întîi în $\mathcal{E}^m$, iar $\overline{V}_m \in W(E)$. Vectorul $\overline{V}_m$ este liniar independent de vectorii lui $W_p^*$, deoarece componenta sa de ordin $m$ este nenulă, în timp ce componentele de ordin $m$ ale vectorilor $\overline{V}_i^*$ ai lui $W_p^*$ sînt nule, pentru $i = 1,2, \ldots, r_p$ şi deci nu putem avea $\overline{V}_m = \sum a_i \overline{V}_i^*$. Ar exista deci un sistem $W$ de $r_p + 1$ vectori din $E$ liniar independenţi, $W = W^* \cup \{\overline{V}_m\}$ şi deci $r \geqslant r_p + 1$, contrar ipotezei. Deci $r = \aleph_0$.

*Observaţie: a)* Se vede că, dacă dimensiunea $r$ a lui $E$ este finită, există şi un $b$ finit, astfel ca $E \subset \mathcal{E}^b$, adică $E$ este o mulţime a unui spaţiu $E^b$ cu $b$ dimensiuni (putem spune că $E$ este *cufundat* într-un spaţiu $E^b$ cu un număr finit $b$ de dimensiuni.

b) *Cînd marginea superioară a numărului de coordonate nenule ale unui punct din $E$ este infinită, dimensiunea $r$ a lui $E$ este infinită. Reciproca nu este adevărată.*

Fie $c$ numărul de coordonate nenule ale lui $P \in E$, $m$ numărul ataşat lui $P$ din §2; avem $c \leqslant m$, deoarece $P \in \mathcal{E}^m$. Deci.

$$r = \sup\{m\} \geqslant \sup\{c\} = \aleph.$$

Iată un exemplu doveditor că reciproca nu este adevărată: Fie $U_i$ un punct din $\mathcal{E}$, $x_i^h$ coordonata sa de ordin $h$; luăm $x_i^h = \delta_{ih}$ (9) şi fie $E$ mulţimea punctelor $U_i$ ($i = 1,2 \ldots, p$). Sistemul $W$ al vectorilor $\overline{OU_i}$ este ortonormal; avem $c = 1$, pentru fiecare $U_i$, deci $\sup\{c\} = 1$, în timp ce dimensiunea lui $E^p$ este $r_p = p$ şi deci dimensiunea lui $E$ este $\aleph$.

## II. Numărul de puncte al unei mulţimi din spaţiul $\mathcal{E}$

**§ 1. Mulţime minimală.** O mulţime nevidă $E$ de puncte din spaţiul euclidian total $\mathcal{E}$ este zisă *minimală* [1]), cînd orice submulţime finită $E^*$ a mulţimii $E$ are următoarea proprietate:

*Proprietatea (d)*: Dimensiunea lui $E^*$ se micşorează cu 1, cînd îi suprimăm un punct.

Această definiţie se aplică mulţimii $E^*$, care are cel puţin un punct. Cum rezultă de altfel direct din definiţii, avem:

*Orice submulţime $E^*$ a unei mulţimi $E$ minimală este de asemenea minimală. Proprietatea unei mulţimi $E$ de a fi minimală este invariantă în raport cu o translaţie $\overline{T}$ din spaţiul $\mathcal{E}$.*

---

[1]) Această denumire se referă la proprietatea unei astfel de mulţimi şi a submulţimilor sale de a avea minimul de puncte, compatibil cu dimensiunile respective 2°, § 3, I.

Notăm cu $p$, $p'$ (respectiv $n$, $n'$) numărul de puncte (respectiv dimensiunile) ale mulțimii finite $E$ și ale submulțimii sale $E'$, obținută suprimînd un punct din $E$.

*Observație*: Dacă o mulțime $E$ are dimensiunea $n$ și $p$ puncte, avem $p \geqslant n + 1$, pentru că există $n$ vectori liniar independenți ai mulțimii $E$, avînd cel puțin $n + 1$ extremități distincte, aparținînd mulțimii $E$ (2°, §3, *I*).

1° *O mulțime de $n + 1$ puncte și de dimensiune $n$ este minimală.* Aceasta este evident pentru dimensiunea 1 și, dacă este adevărat pentru dimensiunile $\leqslant n - 1$, este adevărat și pentru dimensiunea $n$.

Fie, într-adevăr, $E$ o mulțime de $p = n + 1$ puncte și de dimensiune $n$. Suprimîndu-i un punct $P$, obținem mulțimea $E'$ de $p' = p - 1 = n$ puncte și de dimensiune $n' \leqslant n$, deci de cel puțin $n' + 1$ puncte; $n = p' \geqslant n' + 1$. Dacă, prin absurd $n' < n - 1$, am putea adăuga lui $E'$ punctul $P$ suprimat, dimensiunea sa ar crește cel mult cu o unitate și am regăsi pe $E$. Am avea deci $n \leqslant n' + 1 < n$, ceea ce este imposibil. Deci $n' = n - 1$, adică $E$ are proprietatea *(d)* și cum prin ipoteza inducției *(d)* este o proprietate a oricărei submulțimi a lui $E'$ deoarece $E'$ are $n$ puncte și dimensiunea $(n - 1)$, rezultă că *(d)* aparține oricărei submulțimi a lui $E$, deci $E$ este minimală.

2° *Dimensiunea unei mulțimi minimale de $p$ puncte este $p - 1$.* Prin inducție completă, în raport cu $p$ și păstrînd notațiile introduse, avem: Dacă $p = 1$, dimensiunea este $n = 0 = p - 1$. Dacă $p = 2$, avem $p' = 1$ și deci $n' = 0$. Cum $E$ este presupusă minimală, avem $n = n' + 1 = p - 1$, ca dimensiune a lui $E$.

Presupunem proprietatea (2°) verificată pentru un număr de puncte $\leqslant p$ și fie $E$ minimală, avînd $p + 1$ puncte. Suprimînd un punct din P din $E$ obținem $E'$, de $p$ puncte; $E'$ este minimală și deci are dimensiunea $n' = p - 1$. Cum $E$ este minimală, dimensiunea lui $E'$ este $n' = n - 1$, deci $n = p$, ceea ce verifică enunțul pentru $p + 1$ puncte. Aceeași proprietate (2°) se mai poate enunța.

3° *Cînd o mulțime minimală are dimensiunea $n$, ea are $n + 1$ puncte.* Aceasta nu este decît reciproca proprietății (1°). Avem și proprietatea.

4° *O mulțime $E$, de dimensiune infinită, este minimală cînd există o infinitate de valori $p$, pentru care mulțimile de dimensiuni finite $E^p = E \cap \mathcal{E}^p$ sînt minimale și reciproc.*

Într-adevăr, fie $E^* \subset E$, $E$ este finită. Avem $E^* \subset \mathcal{E}^p$ pentru fiecare $p > p_0$, unde $p_0$ este destul de mare (4°, § 3, *I*) și cum $E^* \subset E$, avem $E^* \subset E^p$ pentru fiecare $p > p_o$. Dar, prin ipoteză, există valori $p_1 > p_0$, astfel ca $E^{p_1}$ să fie minimală, deci $E^* \subset E^{p_1}$ este de asemenea minimală, ca submulțime a lui $E^{p_1}$. Fiecare submulțime finită a lui $E$ este minimală, deci $E$ este minimală.

Reciproca este evidentă, deoarece $E^p \subset E$ și $E$ este minimală, deci fiecare $E^p$ este minimală.

§ 2. **Mulțime de distanțe.** Fiecărei mulțimi $E$ de puncte ale spațiului euclidian total $\mathcal{E}$ i se poate atașa mulțimea $D$ *(E)* a valorilor reale pozitive $d(P, P^*)$, unde $P, P^*$ sînt puncte distincte ale mulțimii $E$, $d(P, P^*)$ distanța

între ele, definită anterior ((1), §1, *I*). Mulțimea $D(E)$ se va numi *mulțimea de distanțe* din $E$[1]). Vom avea, evident,

$$E_1 \subset E \rightarrow D(E_1) \subset D(E). \tag{10}$$

**1°** *O mulțime $E$ de puncte ale spațiului euclidian total $\mathfrak{E}$ este cel mult numărabilă, cînd $D(E)$ este cel mult numărabilă (și reciproc)* [2]).

Reciproca este imediată, pentru că, dacă notăm $d_{ih} = d(P_i, P_h)$, observăm că $D(E)$ este o submulțime a unei a mulțimi de elemente $d_{ih}$ cu doi indici întregi; această submulțime este deci cel mult numărabilă.

Cît despre propoziția directă, nu avem decît să reducem la absurd ipoteza: $E$ este nenumărabilă, $D(E)$ cel mult numărabilă.

Dar E este reuniunea mulțimilor $E^p = E \cap \mathfrak{E}^p$, în care $p = 1,2, \ldots$ (3, § 3, *I*). Or, dacă $E$ este nenumărabilă, cel puțin o mulțime $E^{p^*}$, $(p = p^*)$, este de asemenea nenumărabilă și dacă D $(E)$ este cel mult numărabilă, atunci și $D(E^{p^*})$ este cel mult numărabilă, deoarece $E^{p^*} \subset E$ și deoarece rezultă din (10) că $D(E^{p^*}) \subset D(E)$.

Ne putem deci limita să demonstrăm prin absurd numai cazul $E = E^p \subset \mathfrak{E}^p$, în care $\mathfrak{E}^p$ este un spațiu cu $p$ dimensiuni (§1, *I*) sau putem considera — ceea ce revine la același lucru — că mulțimile $E$ aparțin spațiului euclidian $\mathfrak{E}^{(p)}$, unde fiecare punct are $p$ coordonate reale[3]).

Or, $E \subset \mathfrak{E}^p$ fiind nenumărabil prin ipoteză, se știe pe de o parte că există o mulțime (nucleu) nenumărabilă $E_0$ de puncte de condensare[4]) ale lui $E$ (și ale lui $E_0$), iar $E_0 \subset E$. Pe de altă parte $D(E)$ fiind cel mult numărabilă prin ipoteză rezultă din (10) că și $D(E_0)$ este cel mult numărabilă.

Fie $P_0$ un punct din $E_0$. Putem nota cu $r_i$ $(i = 1,2, \ldots)$ distanțele distincte între ele $d(P_0, P_0') \in D(E)$, unde $P_0' \in E_0$. Definim sferele[5]) $\sigma(P_0, r_i)$ și considerăm mulțimile $A_i = E_0 \cap \sigma(P_i, r_i)$. Cel puțin una din aceste mulțimi este nenumărabilă, deoarece reuniunea lor este $E_0$ și nu există decît cel mult o infinitate numărabilă de mulțimi $A_i$.

---

[1]) Dacă mulțimea $A$ de valori reale pozitive este dată nu există întotdeauna o mulțime $E \subset \mathfrak{E}$ astfel ca $D(E) = A$, deoarece pentru fiecare trei puncte distincte $P_1$, $P_2$, $P_3$ din $E$ trebuie să fie respectate relațiile dintre distanțele $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ $d(P_3, P_1)$, ceea ce nu se poate dacă $A$ este oarecare. Astfel, mulțimea $A = \{1, 2, 4\}$ nu poate fi o mulțime de distanțe, nefiind satisfăcute toate relațiile cunoscute ((2), § 1, I). Pe această observație se bazează și exemplul lui S. Piccard citat la 1, § 1, cap. V. ca notă în josul paginii.

[2]) Acest rezultat este de comparat cu propoziția următoare a lui S. Piccard: «Oricare ar fi mulțimea infinită $A$ de puncte din $\mathfrak{E}^{(n)}$, mulțimile $A$ și $D(A)$ au aceeași putere» [5], proprietate care nu este însă valabilă în spațiul $\mathfrak{E}$, precum se vede din exemplul de la § 2, cap. IV, ca notă în josul paginii, exemplu de o mulțime infinită $M^* \subset \mathfrak{E}$ pentru care $D(M^*)$ se reduce numai la valoarea pozitivă $a$.

[3]) Se vede că putem aplica direct definiții și rezultate clasice (a se vedea mai sus § 1, I notă în josul paginii 31).

[4]) Prin definiție, în orice vecinătate a unui *punct de condensare* $P_0$ al lui $E \subset \mathfrak{E}^{(p)}$, există o mulțime nenumărabilă de puncte $P$ din $E$; mulțimea $E_0$ de puncte $P_0$, astfel ca $P_0 \in E$ este *nucleul* $E_0$ (al punctelor de condensare $P_0$) al lui $E$, care este și propriul său nucleu, $E_0 \subset E$.

[5]) *Sfera* $\sigma(P_0, \rho)$ este — prin definiție — mulțimea punctelor $P \in \mathfrak{E}^p$, astfel ca $d(P_0, P) = \rho$, în care $P_0$ este un punct dat din $\mathfrak{E}^p$, ($P_0$ este *centrul*, $\rho$ *raza*, sferei $\sigma$); $P \in \sigma(P_0, \rho)$ se citește: $P$ este *pe* sfera $\sigma$.

Indicăm următorul procedeu:

Reţinem din razele $r_i$, pe aceea care are cel mai mic indice $i$, pentru care $E_0$ posedă pe sfera respectivă o mulţime nenumărabilă de puncte. Numim $\rho_0$ această rază şi punem

$$E_1^* = E_0 \cap \sigma(P_0, \rho_0). \tag{11}$$

Fie $E_1$ nucleul punctelor de condensare ale multimii $E_1^*$. Alegem un punct $P_1 \in E_1$, avem $P_0 \neq P_1$, deci vectorul $\overrightarrow{P_0 P_1}$ nu este nul, el este prin urmare liniar independent.

Repetînd raţionamentul precedent, determinăm o rază $\rho_1$, astfel ca mulţimea

$$E_2^* = E_1 \cap \sigma(P_1, \rho_1) \tag{12}$$

să fie nenumărabilă şi alegem, dacă se poate, un punct $P_2 \in E_2$, astfel ca $\overrightarrow{P_0 P_1}$ şi $\overrightarrow{P_1 P_2}$ să fie liniar independente. Dacă dimpotrivă un astfel de punct nu există, înseamnă că fiecare vector $\overrightarrow{P_1 P}$ este liniar dependent de vectorul $\overrightarrow{P_0 P_1}$, cînd $P \in E$.

Presupunînd că o asemenea dependenţă nu apare, procedeul se va putea repeta.

Il vom exprima acum, în general, pentru $q = 1,2, \ldots$

Presupunem că am ales deja punctele $P_i$ $(i = 0, 1\ 2, \ldots, q)$, astfel ca vectorii sistemului

$$W_q = \{\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_1 P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_{q-1} P_q}\}$$

să fie liniar independenţi. Punem

$$E_{q+1}^* = E_q \cap \sigma(P_q, \rho_q), \tag{13}$$

unde centrul sferei

$$P_q \in E_q, \tag{14}$$

$E_q$ fiind nucleul punctelor de condensare ale lui $E_q^*$. Alegem $P_q$ arbitrar în $E_q$, iar $\rho_q$ să fie o rază aleasă, după procedeul indicat mai sus pentru cazul $q = 0$, adică astfel ca $E_{q+1}^*$ să fie nenumărabilă.

Mulţimea $E_{q+1}^*$ fiind definită, fie $E_{q+1}$ nucleul punctelor sale de condensare. Trebuie ales $P_{q+1} \in E_{q+1}$, dar două cazuri se pot atunci prezenta şi ele se exclud reciproc:

1) *sau* fiecare vector $\overrightarrow{P_q P}$ este liniar dependent de vectorii lui $W_q$, cînd $P \in E_{q+1}$,

2) *sau* există un punct $P_{q+1} \in E_{q+1}$, astfel ca vectorii sistemului

$$W_{q+1} = W_q \cup \{\overrightarrow{P_q P_{q+1}}\}$$

să fie liniar independenţi.

Procedeul va fi continuat pentru $q = 1,2, \ldots$, de cîte ori se va ivi, pe rînd, cazul 2). Or, vectorii lui $W_q$ sînt vectori ai lui $E$, deoarece

$$E_0 \subset E, E_1 \subset E_1^* \subset E_0, \ldots, E_{i+1} \subset E_{i+1}^* \subset E_i, \ldots \tag{15}$$

$$P_{i+1} \in E_{i+1} \subset E, \qquad i = 0,1,2, \ldots \tag{16}$$

Dar $E \subset \mathcal{E}^{(p)}$ şi numărul maxim de vectori liniar independenţi este $p$ Cazul 2) nu se poate deci prezenta decît de cel mult $q \leqslant p - 1$ ori pe rînd.

Va exista deci o valoare $q$, pentru care cazul 1) se prezintă neapărat și avem $1 \leqslant q \leqslant p$.

Or, $q$ avînd această valoare, pentru un punct $P$ oarecare din $E_{q+1}$, avem

$$P \in E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{q+1} \tag{17}$$

și deci, ținînd seama de (11) — (17), avem de asemenea

$$d(P_0, P) = \rho_0, d(P_1, P) = \rho_1, \ldots, d(P_q, P) = \rho_q .$$

Obținem următorul sistem de $q$ ecuații,

$$\overline{P_{i-1}P_i^2} - \overline{P_i P^2} = (\rho_{i-1})^2 - (\rho_i)^2, \qquad i = 1, 2, \ldots, q. \tag{18}$$

Primul lor membru se poate scrie, $O$ fiind punctul origine al lui $\mathcal{E}^{(p)}$,

$$\overline{P_{i-1}P_i}\,(2\overline{OP} - \overline{OP}_{i-1} - \overline{OP}_i)$$

și dacă punem

$$\overline{P_{i-1}P_i}\,(\overline{OP}_{i-1} + \overline{OP}_i) + (\rho_{i-1})^2 - (\rho_i)^2 = 2c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, q,$$

unde fiecare $c_i$ este o constantă reală, sistemul (18) se scrie

$$\overline{P_{i-1}P_i} \cdot \overline{OP} = c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, q. \tag{19}$$

Fie

$$B_q = \{\overline{U_1}, \overline{U_2}, \ldots \overline{U_q}\}$$

o bază ortonormală a multiplicității liniare $\Lambda(W_q)$. Cum fiecare vector $\overline{P_q P}$ aparține lui $\Lambda(W_q)$, avem, transportînd prin translație punctul origine 0 în $P_0$, [1])

$$\overline{OP} = y_1 \overline{U_1} + y_2 \overline{U_2} + \ldots + y_q \overline{U_q},$$

$$\overline{P_{i-1}P_i} = a_{i1} \overline{U_1} + a_{i2} \overline{U_2} + \ldots + a_{iq} \overline{U_q}, \quad i = 1, 2, \ldots, q,$$

în care $y_1, y_2, \ldots, y_q$ sînt coordonatele punctului $P$, relativ la $B_q$ și $a_{i1}$ $a_{i2} \ldots, a_{iq}$ sînt componentele lui $\overline{P_{i-1}P_i}$, relativ la $B_q$. Deci sistemul de ecuații (19) se mai poate scrie

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{iq} y_q = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots q,$$

sistem liniar cu determinantul nenul, deoarece vectorii din $W_q$ sînt liniar independenți. Prin urmare nu există decît o singură soluție pentru $y_1, y_2, \ldots y_q$, adică un singur punct $P$, ceea ce contrazice ipoteza 1), pentrucă mulțimea $E_{q+1}$ a punctelor $P$ este nenumărabilă.

## III. Izometrie și dimensiune

**§ 1. Izometrie.** Două mulțimi de puncte $E$ și $E^*$ ale spațiului euclidian total $\mathcal{E}$ se numesc *izometrice*, cînd sînt îndeplinite următoarele condiții:

1) Există o corespondență biunivocă (A) între punctele $P$ din $E$ și punctele $P^*$ din $E^*$,

---

[1]) Se efectuează translația $\overline{OP_0}$ a punctelor spațiului $\mathcal{E}^{(p)}$, ceea ce nu modifică nici dependența sau independența liniară, nici dimensiunea unui sistem de vectori din $\mathcal{E}^{(p)}$ (obs, § 2, I; b, 1°, § 3, I.

2) Distanţa între două puncte oarecare $P_0$, $P_1$ din $E$ este egală cu distanţa între punctele $P_0^*$, $P_1^*$, care le corespund prin $(A)$,

$$d(P_0, P_1) = d(P_0^*, P_1^*).$$

Relaţia astfel definită între $E$ şi $E^*$ se numeşte *izometrie*[1]). Există o clasă de mulţimi izometrice cu $E$ şi oricare mulţime $E$ din această clasă este *definită, înafară de o izometrie.*

Se observă că există o invarianţă a izometriei, în raport cu o translaţie oarecare $\overline{T}$ dată a lui $E$.

Se poate dovedi următoarea proprietate fundamentală:

1° *Două mulţimi izometrice $E$, $E^*$, din spaţiul & au aceeaşi dimensiune.* Fie $r$ şi $r^*$ dimensiunile respective ale lui $E$ şi $E^*$, mulţimi izometrice date.

1) Presupunem, mai întîi, $r$ şi $r^*$ finite.

Fie $P, P_0$ o pereche de puncte din $E, E^*$ corespunzîndu-se în izometria $(A)$ dintre $E$ şi $E^*$:

Putem distinge în $E$ puncte $P_i \in E$, astfel ca cei $r$ vectori $\overline{P_0 P_i}$, pentru $i = 1,2, \ldots, n$, să fie liniar independenţi (2°, § 3, I). Notăm cu $P_i^*$ cele $r$ puncte din $E^*$ care le corespund în izometria $(A)$; $P_i \sim P_i^*$.

Avem

$$d(P_i, P_j,) = d(P_i^*, P_j^*), \quad i, j = 0, 1, \ldots, r; i \neq j. \tag{20}$$

De aici, obţinem succesiv.

$$\overline{P_i P_j}^2 = \overline{P_i^* P_j^*}^2 \rightarrow (\overline{P_0 P_j} - \overline{P_0 P_i})^2 = (\overline{P_0^* P_j^*} - \overline{P_0^* P_i^*})^2$$

şi deci cu (20), avem

$$\overline{P_0 P_i}^2 = \overline{P_0^* P_i^*}^2; \ \overline{P_0 P_i} \cdot \overline{P_0 P_j} = \overline{P_0^* P_i^*} \cdot \overline{P_0^* P_j^*}. \tag{21}$$

Fie $\Lambda(E)$ multiplicitatea liniară, generată de $E$ sau de baza liniară $B_r$, constituită de vectorii $\overline{P_0 P_i}$ $(i = 1,2, \ldots, r)$; avem $E \subset \Lambda$.

Notăm cu $W_r$ o bază liniară ortonormală a lui $\Lambda(E)$ şi fie $\overline{U_i}$ $(i = 1,2,\ldots,r)$, cei $r$ vectori din $Wr$. Avem

$$\overline{U_i}^2 = 1, \ \overline{U_i} \cdot \overline{U_j} = 0, \qquad i \neq j; i, j = 1,2, \ldots, r.$$

Vectorii $\overline{U_i}$ din $\Lambda(E)$ depind liniar de cei $r$ vectori ai lui $B_r$ şi avem, cu coeficienţi $a_{ih}$, reali,

$$\overline{U_i} = \sum_h^{1,r} a_{ih} \overline{P_0 P_h}, \quad i = 1,2, \ldots, r. \tag{22}$$

Fie $\overline{U_i^*}$, $(i = 1,2 \ldots, r)$, cei $r$ vectori ai lui $E^*$, definiţi prin relaţiile

$$\overline{U_i^*} = \sum_h^{1,r} a_{ih} \overline{P_0^* P_h^*}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{23}$$

---

[1]) Relaţia este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Convenim să o notăm ca şi corespondenţa $(A)$, folosind semnul $\sim$ (între puncte sau mulţimi, care se corespund astfel).

Din (21) rezultă, cum se verifică de altfel prin calcul direct,

$$\overline{U_i^*}^2 = 1, \qquad \overline{U_i^*} \cdot \overline{U_j^*} = 0, \qquad i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, r$$

și vectorii $\overline{U_i^*}$ constituie o bază liniară ortonormală a lui $\Lambda(E^*)$.

Sistemele liniare (22), respectiv (23) se pot rezolva în raport cu vectorii $\overline{P_o P_h}$, respectiv $\overline{P_0^* P_h^*}$, pentru că determinantul $\Delta = |a_{ih}|$ al sistemului (22) este nenul, deoarece vectorii $\overline{P_o P_h}$ sînt liniar independenți iar determinantul sistemului (23), fiind același este evident nenul. Vom avea deci, cu coeficienții $b_{ih}$ reali, al căror determinant $\Delta_1 = |b_{ih}|$ este nenul, relațiile

$$\overline{P_0 P_h} = \sum_i^{1,r} b_{ih} \overline{U_i}\ ;\ \overline{P_0^* P_h^*} = \sum_h^{1,r} \overline{U_i^*}, \qquad h = 1, 2, \ldots, r. \tag{24}$$

Or, cei $r$ vectori $\overline{P_0^* P_h}$ constituie un sistem $B_r^*$ de $r$ vectori liniari independenți ai lui $E^*$, ceea ce rezultă din faptul că vectorii $\overline{P_0 P_h}$ sînt liniar independenți și avem de asemenea

$$\sum_h^{1,r} \alpha_h \overline{P_0^* P_h^*} = 0 \to \alpha_h = 0, \qquad h = 1,2, \ldots, r,$$

cum de altfel se verifică imediat, folsind proprietățile vectorilor $\overline{U_i}$ și $\overline{U_i^*}$.

Dar $B_r^* \subset E^*$, deci $r \leqslant r^*$ și, în virtutea simetriei relației de izometrie, rezultă și $r^* \leqslant r$, de unde deducem $r = r^*$. Ceea ce trebuia demonstrat.

2) Presupunînd acum $r = \aleph_0$, să dovedim că avem de asemenea $r^* = \aleph_0$

Punem, într-adevăr

$$E^p = E \cap \mathcal{E}^p, \qquad p = 0,1, \ldots;$$

atunci dimensiunea $r_p$ a lui $E^p$ tinde, prin definiție, către $r = \aleph_0$.

Fie $E^{p*}$ mulțimea izometrică a lui $E^p$, în izometria $(A)$; avem, $E^p \subset E$, $E^{p*} \subset E^*$ și notînd cu $r_p^*$ dimensiunea lui $E^{p*}$, avem $r_p^* = r_p$, aceste dimensiuni fiind finite.

Se pot considera punctele $P_i$, $P_i^*$, care se corespund în izometria dintre $E^p$, $E^{p*}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, r_p$ ; astfel că cei $r_p$ vectori $\overline{P_o P_i}$ din $E^p$ să fie liniar independenți. S-a văzut că aceeași proprietate o posedă și cei $r_p$ vectori $\overline{P_o^* P_i^*}$ din $E^{p*}$, care constituie un sistem $B_{r_p}^*$. Notăm cu $M_{r_p}^*$ mulțimea extremităților vectorilor lui $B_{r_p}^*$, adică a punctelor $P_i^*$, $i = 0, 1, 2, \ldots, r_p$.

Fie $b\ (M_{r_p}^*)$ marginea superioară a numerelor $m$, atașate punctelor $P_i^* \in M_{r_p}^*$. Or, avem

$$b\ (M_{r_p}^*) \geqslant r_p, \tag{25}$$

pentrucă altfel din $b\ (M_{r_p}^*)$, ar rezulta $m \leqslant r_p - 1$ pentru fiecare punct al lui $M_{r_p}^*$. Un punct $P_i^*$ din $M_{r_p}^*$ apare mai întîi în $\mathcal{E}^m$ și deci ar rezulta $M_{r_p}^* \subset \mathcal{E}^{r_p - 1}$ adică dimensiunea lui $M_{r_p}^*$ ar fi cel mult $r_p - 1$, ceea ce este absurd.

Dar din $M^*_{r_p} \subset E^*$ rezultă $b(E^*) \geqslant b(M^*_{r_p})$ şi deci în baza lui (25), avem, $b(E^*) \geqslant r_p$, care tinde către $\aleph_0$, cînd $p$ tinde către infinit, deci $b(E^*) = \aleph_0$ şi prin urmare (4°, § 3, *I*) dimensiunea lui $E^*$ este $r^* = \aleph_0$. Ceea ce trebuia demonstrat.

**§ 2. Puncte la distanţe date de punctele unei mulţimi date.** Considerăm o mulţime $E$ de puncte $P_i$, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ a spaţiului euclidian total $\mathcal{E}$. Ne putem întreba dacă există puncte $P \in \mathcal{E}$, astfel ca fiecare distanţă de la $P$ la un punct din $E$ să aibă o valoare dată dinainte. Să punem $d(P, P_i) = l_i$ ; cînd valoarea $l_i$ a distanţei de la $P$ la $P_i$ este dată, pentru fiecare $i$, asemenea puncte $P$ pot să existe sau să nu existe.

1° *Fiind date, o mulţime minimală* $E = \{P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}\}$ *de dimensiune finită şi un vector* $\overline{V}$ *neaparţinînd multiplicităţii liniare* $\Lambda(E)$, *există două puncte* $P$ *sau nici unul, astfel ca* $P$ *să fie la distanţe* $l_i$ *(date) de punctele* $P$ *ale lui* $E$, $(i = 0,1,\ldots, n-1)$ *şi ca* $\overline{V}$ *să aparţină lui* $\Lambda(E^*)$, *unde* $E^* = \{P\} \cup E$.

Fiind minimală, mulţimea $E \subset \mathcal{E}$ care are $n$ puncte, este de dimensiune $n - 1$. Putem, fără a reduce generalitatea, să demonstrăm proprietatea enunţată numai în cazul cînd $P_0$ este punctul origine $O$ al lui $\mathcal{E}$. Este suficient să observăm, într-adevăr, că prin translaţia $\overline{T} = \overline{P_0 O}$, punctul $P_0$ se înlocuieşte cu $P'_0 = O$, iar notînd cu accent elementele obţinute, avem efectuînd $\overline{T}$ sau $\overline{T}^{-1}$ izometriile $E \sim E'$, $E^* \sim E^{*\prime}$, deci $d(P'_i, P'_i) = d(P, P_i) = l_i$ şi $\overline{V} \notin \Lambda(E) \rightleftarrows \overline{V}' \notin \Lambda(E')$, $\overline{V} \in \Lambda(E^*) \rightleftarrows \overline{V}' \in \Lambda(E^{*\prime})$.

Fie date distanţele $l_i = d(P, P_i)$. Putem scrie

$$\overline{PP_i}^2 = (l_i)^2, \qquad i = 0,1,\ldots, n-1 \tag{26}$$

şi deci, cum punctele $P_0$ şi $O$ coincid,

$$\overline{OP}^2 - \overline{PP_i}^2 = (l_0)^2 - (l)^2. \tag{27}$$

Punem $d(P_0, P_i) = d_i$ şi

$$(l_0)^2 - (l_i)^2 + (d_i)^2 = 2c_i .$$

Obţinem sistemul de ecuaţii (27) sub forma

$$\overline{OP_i} \cdot \overline{OP} = c_i , \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{28}$$

Or, putem descompune pe $\overline{V}$ în doi vectori $\overline{V}_n$, $\overline{V}_e$ ortogonali, astfel ca

$$\overline{V} = \overline{V}_n + \overline{V}_e , \qquad \overline{V}_n \cdot \overline{V}_e = 0, \qquad \overline{V}_e \in \Lambda(E). \tag{29}$$

Avem $\overline{V}_n \neq 0$, deoarece, prin ipoteză, $\overline{V} \notin \Lambda(E)$ şi nu putem avea deci $\overline{V} = \overline{V}_e$. Putem aşa dar defini vectorul normal

$$\overline{U}_n = \frac{\overline{V}_n}{|\overline{V}_n|}, \qquad |\overline{U}_n| = 1 \tag{30}$$

şi se observă că $\overline{U}_n$ este ortogonal lui $\Lambda(E)$. Fie

$$B_{n-1} = \{\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_{n-1}\}$$

o bază ortonormală a lui $\Lambda(E)$ și să definim în același timp sistemul ortonormal

$$B_n = B_{n-1} \cup \{\overline{U}_n\} = \{\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_{n-1}, \overline{U}_n\}.$$

Or, prin ipoteză, $\overline{V} \in \Lambda(E^*)$ și în virtutea relațiilor (29) și (30), rezultă de asemenea că $\overline{U}_n \in \Lambda(E^*)$, Dar, prin definiție,

$$E^* = E \cup \{P\}. \tag{31}$$

Urmează că $\overline{U}_i \in E^*$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n-1$ și $B_n$ este o bază ortonormală a lui $\Lambda(E^*)$.

Din (31) rezultă $\overline{OP} \in \Lambda(E^*)$ și putem scrie, punînd în evidență coordonatele $y_1, y_2, \ldots y_n$ ale lui $P$, relativ la $B_n$,

$$\overline{OP} = y_1 \overline{U}_1 + y_2 \overline{U}_2 + \ldots + y_n \overline{U}_n. \tag{32}$$

Or, $P_i \in E$, pentru $i = 0, 1, \ldots n-1$, deci $\overline{OP}_i \in \Lambda(E)$ și avem

$$\overline{OP}_i = a_{i1} \overline{U}_1 + a_{i2} \overline{U}_2 + \ldots + a_{i,n-1} \overline{U}_{n-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{33}$$

unde coeficienții au valori reale.

Sistemul (24) devine deci, ținînd seama de (32) și (33)

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{i,n-1} y_{n-1} = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{34}$$

iar

$$y_n \neq 0, \tag{35}$$

deoarece, dacă am avea $y_n = 0$, ar rezulta de asemenea, ținînd seama de (32), că $\overline{OP} \in \Lambda(E)$ și deci ar urma, cu (31), că $\Lambda(E^*) \subset \Lambda(E)$ și deci în baza relației $\overline{V} \in \Lambda(E^*)$ am avea $\overline{V} \in \Lambda(E)$, contrar enunțului.

Or, din (26) și din (32) rezultă, calculînd pe $\overline{OP}^2$,

$$(y_n)^2 = (l_0)^2 - (y_1)^2 - \ldots - (y_{n-1})^2, \tag{36}$$

egalitate imposibilă, cînd membrul al doilea al ecuației (35) este negativ sau nul. Dimpotrivă, cînd membrul al doilea este pozitiv, există două valori, de semne contrarii, pentru $y_n$. Or, sistemul (34) are determinantul coeficienților săi nenul, deoarece cei $n-1$ vectori $\overline{OP}_i$ din (33) sînt liniari independenți. Există deci un sistem unic de soluții pentru $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$, ceeace completează demonstrația, că nu există decît două puncte $P$ sau nici unul de coordonate $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ în raport cu $B_n$ și confirmă enunțul. Cele două puncte $P$ vor fi numite *puncte — soluție.*

*Observație.* Valorile $l_i$ și $d_i$ fiind date, putem varia arbitrar pe $\overline{V}$ și prin urmare pe $\overline{U}_n$, care este prin definiție normal și ortogonal la $\Lambda(E)$. Dacă pentru unul din vectorii $\overline{U}_n$, cele două puncte—soluție $P$ de mai sus există, membrul al doilea din (36) este pozitiv. Cum el nu depinde de $\overline{U}_n$, cele două puncte—soluție $P$ respective trebuie să existe și pentru oricare altul dintre $\overline{U}_n$. Mai mult, coordonatele acestor puncte-soluție $P$, relativ la baza ortonormală $B_n$ respectivă, rămîn aceleași și obținem deci o infinitate de mulțimi $E^*$, pentrucă există în $\mathcal{E}$ o infinitate de vectori $\overline{U}_n$ normali și ortogonali la $\Lambda(E)$. Or, aceste mulțimi $E^*$ sînt izometrice, cum rezultă de astfel din însăși definiția lor.

**§ 3. Mulțime de excludere.** O mulțime nevidă $H$ de valori pozitive fiind dată vom spune că mulțimea $E$ de puncte din $\mathfrak{E}$ își *ia distanțele în* $H$, cînd $D(E)$ este inclus în $H$; $D(E) \subset H$.

O mulțime $E$ de puncte din $\mathfrak{E}$ se va numi cu *distanțe inegale* între punctele sale, cînd $d(P, P^*)$ ia valori diferite pentru cupluri diferite de puncte $P$, $P^*$ din $E$ ((1), § 1, *I*).

Vom defini o mulțime $T(H)$ de valori pozitive, ataşată unei mulțimi date $H$ de valori pozitive, astfel:

Fie $E_1^n, E_2^n$, mulțimi de puncte din $\mathfrak{E}$ şi să punem

$$R_{12}^n = E_1^n \cup E_2^n, \qquad S_{12}^{n-1} = E_1^n \cap E_2^n; \tag{37}$$

$R_{12}^n$ este reuniunea, $S_{12}^{n-1}$ interesecția mulțimilor $E_1^n, E_2^n$; vom numi $S_{12}^{n-1}$ *suportul comun* al lor.

Fie $H$ o mulțime nevidă de valori pozitive distincte $h_\alpha$ (unde $\alpha \in A$, iar $A$ este o mulțime de indici). Vom defini mulțimile $E_1^n$, $E_2^n$, care satisfac simultan, dacă se poate, pentru $n$ dat, condițiilor următoare:

1) Mulțimea $E_1^n$, respectiv, $E_2^n$, să fie minimală, cu $n+1$ puncte,

2) $S_{12}^{n-1}$ să fie o mulțime de $n$ puncte,

3) $R_{12}^n$ să fie o mulțime de dimensiune $n$,

4) Mulțimile $E_1^n, E_2$ să ia distanțele în $H$,

5) Mulțimea $E_1^n$ (şi respectiv $E_2^n$) să fie cu distanțe inegale între punctele sale,

6) Să avem

$$D(E_1^n) \cap D(E_2^n) = D(S_{12}^{n-1}).$$

Rezultă din 1), 2), 3), că $E_1^n$, respectiv $E_2^n$, fiind fiecare minimală au fiecare dimensiunea $n$, iar $S_{12}^{n-1}$ fiind suportul lor comun este de asemenea minimală şi are dimensiunea $n-1$ (§ 1, *II*).

Să punem în evidență punctele $P_1$, $P_2$, astfel ca

$$P_1 \in E_1^n, \quad P_1 \notin S_{12}^{n-1}; \qquad P_2 \in E_2^n, \quad P_2 \notin S_{12}^{n-1}.$$

Din 1,) 2), 3), rezultă că există un singur punct $P_1$ şi un singur punct $P_2$; le vom numi *vîrfurile* lui $E_1^n$ şi ale lui $E$ respectiv, iar mulțimea $R_{12}^n$ are $n+2$ puncte.

Cînd condițiile 1)—6) sînt îndeplinite şi *numai în acest caz*, punem

$$t_{12}^n = d(P_1, P_2), \tag{38}$$

numim $t_{12}^n$ *distanța vîrfurilor* lui $E_1^n$ şi $E_2^n$. [1])

Vom spune că $t_{12}^n$ are o valoare *posibilă* de cîte ori condițiile 1)—6) sînt satisfăcute simultan, iar $t_{12}^n$ poate fi definită prin egalitatea (38).

---

[1]) Este de observat că, în baza condițiilor 4), 5), toate valorile aparținînd mulțimii

$$D(R_{12}^n) - \{d(P_1, P_2)\}$$

sînt inegale iar distanța vîrfurilor $d(P_1, P_2)$ ar putea fi sau nu egală cu una (oarecare) din celelalte distanțe din $R_{12}^n$.

Notăm cu $T'(H)$ mulțimea de valori posibile pentru $t_{12}^n$, cînd $n \in N$, unde $N$ este șirul numerelor naturale. Mulțimea $T'(H)$ este vidă cînd nu există o valoare $t_{12}^n$ posibilă.

Mulțimea de valori pozitive

$$T(H) = H \cup T'(H) \tag{39}$$

se va numi *mulțimea de excludere ataşată lui* $H$; mulțimea $T(H)$ nu poate fi vidă, pentrucă $H$ este nevidă.

Se observă că avem, pentru mulțimi de excludere $H_\mu$ (unde $\mu \in M$, mulțime de indici)

$$H_\mu \subset H_{\mu^*} \rightarrow T(H_\mu) \subset T(H_{\mu^*}), \tag{40}$$

ceea ce rezultă destul de simplu din definițiile de mai sus.

Ne propunem să numărăm valorile distincte posibile ale lui $t_{12}^n$, pentru orice $n \in N$, cînd condițiile 1)—6) de mai sus sînt îndeplinite, iar $N = \{1,2...\}$. Pentru efectuarea numerotării demonstrăm, în prealabil, următoarea propoziție:

Lemă. *Presupunem dată mulțimea* $S_{12}^{n-1}$, *afară de o izometrie şi de asemenea date distanțele* $d(P_1,P_i)$ *şi* $d(P_2,P_i)$, *unde* $P_i \in S_{12}^{n-1}$, *In acest caz nu există pentru* $t_{12}^n$ *decît două valori distincte posibile sau nici una, cînd condițiile* 1), 2), 3) *sînt satisfăcute.*

Intr-adevăr, putem lua mai întîi o mulțime $S_{12}^{n-1}$ determinată, printre mulțimile izometrice cu ea şi construim, dacă se poate, cu distanțele date, mulțimile $E_1^n$, $E_2^n$ satisfăcînd condițiile 1) 2) 3).

Pentru a obține mulțimi determinate vom admite, în plus, că ne-am dat doi vectori normali $\overline{U}_{n1}$ şi $\overline{U}_{n2}$, ortogonali la $\Lambda\left(S_{12}^{n-1}\right)$ şi că am impus mulțimilor $E_1^n$, $E_2^n$ condițiile suplimentare

$$\overline{U}_{n1} \in \Lambda\left(E_1^n\right), \qquad \overline{U}_{n2} \in \Lambda\left(E_2^n\right). \tag{41}$$

Ne găsim atunci în condițiile enunțului propoziției (1°, § 2) şi vom avea două puncte-soluție $P_1$ sau nici unul şi două puncte-soluție $P_2$ sau nici unul.

O condiție necesară de compatibilitate este $\overline{U}_{n1} = \pm \overline{U}_{n2}$.

Intr-adevăr, pe de o parte avem

$$\left[\Lambda\left(E_1^n\right) \cup \Lambda\left(E_2^n\right)\right] \subset \Lambda\left(E_1^n \cup E_2^n\right) = \Lambda\left(R_{12}^n\right). \tag{42}$$

Pe de altă parte dacă notăm cu

$$B_{n-1} = \left\{\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_{n-1}\right\}$$

o bază ortonormală a lui $\Lambda\left(S_{12}^{n-1}\right)$ şi cum $R_{12}^n$ are dimensiunea $n$, sistemele

$$B_{n1} = \left\{\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_{n-1}, \overline{U}_{n1}\right\}, \; B_{n2} = \left\{\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_{n-1}, \overline{U}_{n2}\right\},$$

constituie baze ortonormale pentru $\Lambda\left(R_{12}^n\right)$, în virtutea lui (41) şi (42).

Avem deci, cu coeficienți $a_i$ reali, ca urmare din (41), (42),

$$\overline{U}_{n2} = a_1 \overline{U}_1 + a_2 \overline{U}_2 + \ldots + a_{n-1} \overline{U}_{n-1} + a_n \overline{U}_{n1}.$$

Inmulţind succesiv cei doi membri cu $\overline{U}_{n1}$ şi $\overline{U}_{n2}$, avem

$$\overline{U}_{n1}.\ \overline{U}_{n2} = a_n, \qquad 1 = a_n\ \overline{U}_{n1}.\ \overline{U}_{n2} \rightarrow (a_n)^2 = 1 \rightarrow a_n = \pm 1$$

ceea ce dă, deoarece vectorii $\overline{U}_{n1}$ , $\overline{U}_{n2}$ sînt normali,

$$\overline{U}_{n1} = \pm\, \overline{U}_{n2}. \tag{43}$$

Cînd punctele-soluţie $P_1$, $P_2$ există, le exprimăm introducînd coordonatele lor, în raport cu bazele ortonormale $B_{n1}$ şi $B_{n2}$ ale lui $\Lambda\,(R^n_{12})$ respectiv, ceea ce dă, ţinînd seama de ((32) (35) (36) din § 2.)

$$\overline{OP}_1 = y_{11}\,\overline{U}_1 + y_{12}\,\overline{U}_2 + \ldots + y_{1,\,n-1}\,\overline{U}_{n-1} \pm y_{1n}\,\overline{U}_{n1}; \qquad y_{1n} \neq 0,$$

$$OP_2 = y_{21},\,\overline{U}_1 + y_{22}\,\overline{U}_2 + \ldots + y_{2,\,n-1}\,\overline{U}_{n-1} \pm y_{2n}\,\overline{U}_{n2}; \qquad y_{2n} \neq 0$$

şi deci, în virtutea relaţiei (43), avem

$$\overline{P_1P_2} = (y_{21} - y_{11})\,\overline{U}_1 + (y_{22} - y_{21})\,\overline{U}_2 + \ldots + (y_{2,\,n-1} - y_{1,\,n-1})\,\overline{U}_{n-1} \pm$$
$$\pm\,(y_{2n} \pm y_{1n})\,\overline{U}_{n1},$$

de unde rezultă

$$(t^n_{12})^2 = (y_{21} - y_{11})^2 + (y_{22} - y_{21})^2 + \ldots + (y_{2,\,n-1} - y_{1,\,n-1})^2 + (y_{2n} \pm y_{1n})^2.$$

Nu există deci pentru $t^n_{12} > 0$, decît două valori diferite posibile sau nici una, acest rezultat fiind independent de alegerea vectorilor $\overline{U}_{n1}$, $\overline{U}_{n2}$, care satisfac relaţiei (43).

Mai mult, cînd $S^{n-1}_{12}$ este înlocuită cu o mulţime izometrică $S^{(n-1)^*}_{12}$ valorile lui $t^n_{12}$ rămîn aceleaşi, deoarece coordonatele lui $E^n_1$ şi $E^n_2$ nu variază ((24), (25), 1°, § 1) cînd se înlocuiesc bazele ortonormale $B_{n1}$ şi $B_{n2}$ ale lui $\Lambda\,(R^n_{12})$ prin bazele ortonormale $B^*_{n1}$ şi $B^*_{n2}$ ale lui $\Lambda(R^{n*}_{12})$. Ceea ce trebuia demonstrat.

Or, este suficient să presupunem că $H$ fiind dată, condiţiile 1)—6) sînt îndeplinite şi mulţimea $T'(H)$ a valorilor $t^n_{12}$ posibile, pentru orice $n \in N$, va fi determinată. Tot astfel va fi determinată şi mulţimea $T(H)$ definită de relaţia (39), adică mulţimea de excludere ataşată lui $H$. Obţinem astfel următoarea proprietate fundamentală:

**1°.** *Mulţimea de excludere $T(H)$, ataşată lui $H$, este finită (respectiv numărabilă), cînd mulţimea dată $H$, de valori pozitive, este finită (respectiv numărabilă).*

Presupunem $H$ dată şi condiţiile 1)— 6) satisfăcute, astfel ca mulţimea $T'(H)$ a valorilor $t^n_{12}$ posibile, pentru $n \in N$, să fie definită.

Pentru un $n$ dat, să considerăm mulţimea $A_n$ a tuturor aranjamentelor fără repetiţie ($\alpha$) a $q_n$ valori distincte, extrase din $H$ într-un mod dat, numărul $q_n$

$$q_n = \frac{(n+2)\,(n+1)}{2} - 1 \tag{44}$$

fiind numărul distanţelor distincte ale perechilor de puncte ale unui $R^n_{12}$, cu excepţia distanţei $d\,(P_1, P_2)$ a vîrfurilor $P_1, P_2$ respective.

Pentru $n$ dat ordonăm într-un mod determinat (şi de altfel arbitrar) cele $q_n$ distanţe precedente, odată pentru totdeauna. Pentru un aranjament

dat $(\alpha) \in A_n$ a $q_n$ valori distincte din mulțimea dată $H$, fie $\Gamma_\alpha$ corespondența biunivocă, care păstrează ordinea, între cele $q_n$ distanțe pe de o parte și cele $q_n$ valori din $(\alpha)$ pe de altă parte. Atribuind distanțelor respective valorile corespunzătoare în $\Gamma_\alpha$, condițiile 4), 5), 6) sînt evident satisfăcute.

Procedînd astfel, fiecărui $(\alpha)$ îi va corespunde cel mult o mulțime $S_{12}^{n-1}$, determinată, în afară de o izometrie, de valorile lui $H$ atribuite distanțelor, în virtutea corespondenței $\Gamma_\alpha$. Dacă nu există nici o mulțime $S_{12}^{n-1}$, nu există nici o valoare $t_{12}^n$, atașată lui $(\alpha)$.

Or, distanțele punctelor $P_1$ și $P_2$ la punctele din $S_{12}^{n-1}$ sînt de asemenea date de corespondența $\Gamma_\alpha$, atașată lui $(\alpha)$ și am văzut ($1^6$) că există pentru $t_{12}^n$ două valori diferite posibile (§3) sau nici una, atunci cînd condițiile 1), 2), 3) sînt satisfăcute. In caz contrar, nu există nici o valoare $t_{12}^n$ posibilă, atașată lui $(\alpha)$, pentru că o astfel de valoare nu poate fi definită, decît dacă toate condițiile 1)—6) sînt îndeplinite.

Există deci, pentru fiecare $(\alpha)$ dat, două valori posibile, diferite, ale lui $t_{12}^n$ sau nu există nici o valoare posibilă.

Fie $H$ o mulțime finită dată, avînd $q$ valori distincte, pozitive. Trebuie să avem $q_n \leqslant q$, deoarece valorile în fiecare aranjament $(\alpha)$ fiind distincte, nu ar exista în caz contrar o corespondență $\Gamma_\alpha$ posibilă. Urmează că $n$ nu poate întrece o valoare finită $m$, $n \leqslant m$, pentru a avea $q_n \leqslant q$, $q_n$ din (44). Luînd $n = 1,2 \ldots, m$, vom avea în total un număr finit $s$ de aranjamente $(\alpha) \in A_n$, care le corespunde și deci, cel mult, $2s$ valori posibile pentru $t_{12}^n$. Mulțimea lor $T'(H)$ va fi deci, cel mult, finită. Cum $H$ este finită, rezultă că $T(H) = T'(H) \cup H$ este de asemenea finită.

Fie $H$ o mulțime numărabilă. Nu există, în total, pentru $n = 1,2, \ldots$, decît o infinitate numărabilă de aranjamente $\alpha) \in A_n$, de format cu valori distincte din $H$. Dar fiecărui $(\alpha)$ îi corespunde, cel mult, 2 valori pentru $t_{12}^n$ și rezultă că mulțimea lor $T'(H)$ este, cel mult, numărabilă. Cum $H$ este numărabilă, rezultă că $T(H) = T'(H) \cup H$ este de asemenea numărabilă.

Putem extinde această proprietate, astfel:

2°. *Mulțimile infinite $H$ și $T(H)$ au aceeași putere*:

$$\overline{\overline{H}} \geqslant \aleph_0 \rightarrow \overline{\overline{H}} = \overline{\overline{T}}(H). \tag{45}$$

Acest rezultat, se demonstrează bazîndu-ne pe proprietatea că orice număr cardinal infinit este un alef, ca și pe consecințele directe ale acestei proprietăți.

Punem $\overline{\overline{H}} = \aleph_h \geqslant \aleph_0$. Fie $N = \{1, 2, \ldots\}$ și $n \in N$, $n$ determinat. Am definit, mai sus (10), mulțimea $A_n$ a tuturor aranjamentelor $(\alpha)$, fără repetiție, a $q_n$ valori distincte din $H$, unde $q_n$ este dat de (44).

Fie $A_n'$ mulțimea aranjamentelor distincte $(\alpha^*)$, definite astfel: Fie $q_{n-1}$ anumite valori distincte din $H$ dintr-un aranjament $(\alpha') \in A_n$ determinat. Putem introduce înaintea lui $(\alpha')$ o valoare oarecare din $H$, distinctă de valorile care apar în $(\alpha')$ și obținem un aranjament $(\alpha^*)$. Este clar că $\overline{\overline{A_n'}} = \overline{\overline{H}} = \aleph_h$ și că $(\alpha^*) \in A_n$, deci $A_n' \subset A_n$, de unde rezultă $\overline{\overline{A_n}} \geqslant \aleph_h$.

Pe de altă parte, mulțimea $A_n''$ de aranjamente cu repetiție a $q$ valori din $H$ are, cel mult puterea $(\aleph_h)^{q_n} = \aleph_h$, $q_n$ fiind finit, în timp ce $A_n \subset A_n''$ și deci $\overline{\overline{A_n}} \leqslant \aleph_h$, astfel că în definitiv $\overline{\overline{A_n}} = \aleph_h$.

Pentru a defini pe $T(H)$, ca mai sus presupunem că sînt îndeplinite condiţiile 1)—6). Or, în acest caz, apar $q_n$ distanţe ale perechilor de puncte din $R^n_{12}$, exceptînd distanţa vîrfurilor. Cînd $n$ este dat, $q_n$ este de asemenea dat de (44) şi putem ordona cele $q_n$ distanţe într-un mod determinat. Definim apoi, ca mai sus (1°), corespondenţa $\Gamma_\alpha$, care ataşează fiecărui aranjament $(\alpha) \in A_n$ două valori posibile sau nici una pentru $t^n_{12}$, precum rezultă din raţionamentul anterior (1°).

Fie $A_{n2}$ mulţimea aranjamentelor $(\alpha) \in A_n$, astfel ca să corespundă fiecărui aranjament cîte două valori posibile $t'^n_{12}$ şi $t''^n_{12}$ pentru $t^n_{12}$. Aceste două valori sînt diferite între ele, cum de altfel s-a văzut şi în lema de mai sus. Fie $T'_n(H)$ mulţimea valorilor $t^n_{12}$ pentru $n$ determinat. Dacă punem $t'^n_{12} < t''^n_{12}$, mulţimea valorilor $t'^n_{12}$ (respectiv a valorilor $t''^n_{12}$) are puterea lui $A_{n2}$, deci pentru fiecare $n \in N$, avem — deoarece $A_{n2} \subset A_n$, —

$$\overline{\overline{T'_n}}(H) = 2\,\overline{\overline{A}}_{n2} \leqslant 2\,\overline{\overline{A}}_n = 2\,\aleph_h = \aleph_h .$$

Or, prin definiţie, avem

$$T(H) = H \cup T'(H), \qquad T'(H) = \bigcup_{n \in N} T'_n(H), \qquad N = \{1,2,\ldots\},$$

de unde rezultă, pe rînd.

$$\overline{\overline{T'}}(H) \leqslant \aleph_0\,\aleph_h , \qquad \aleph_h = \overline{\overline{H}} \leqslant \overline{\overline{H}} + \overline{\overline{T'}}(H) \leqslant \aleph_h + \aleph_h = \aleph_h$$

şi în cele din urmă, relaţia enunţată (45), în virtutea teoremei despre echivalenţa puterilor.

## IV. Mulţimi de includere

**§ 1. Şiruri dense de mulţimi de valori pozitive.** Un şir de mulţimi $A_j$, $(j = 1,2,\ldots)$ de valori pozitive va fi numit *dens* sau *şir* $(D)$, cînd extrăgînd cîte o valoare $l_j$ din fiecare $A_j$, mulţimea $M$ a valorilor $l_j$ este densă în intervalul $(0, +\infty)$. [1])

1° *Există şiruri de intervale, care sînt şiruri* $(D)$.

Se poate, de exemplu, indica şirul $(D)$ următor:

Fie $p = 1,2,\ldots$; se împarte intervalul $(0,p)$ în $2^p$ intervale egale $i_{pq}$, $q = 1,2,3,\ldots, 2^p$. Se pot ordona intervalele $i_{pq}$, punînd

$$i_{pq} = I_j,\ j = 1,2,\ldots;\ (p < p') \text{ sau } (p = p', q < q') \to j < j'. \qquad (46)$$

Un interval $i_{pq}$ are lungimea $\frac{p}{2^p}$ şi cum din (46) rezultă că $j = \infty \rightleftarrows p = \infty$, lungimea intervalelor $I_j$ tinde către zero odată cu $\frac{1}{j}$. În fiecare interval dat, $(\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta$ este inclus un $I_j$, deoarece pentru un $p$ destul de mare avem simultan

$$\beta < p, \qquad \frac{p}{2^p} < \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$$

şi pentru un $q$ convenabil trebuie să avem $I_j = i_{pq} \subset (\alpha,\beta)$.

---

[1]) O mulţime $M$ de valori pozitive este *densă* în $(0, +\infty)$, cînd pentru toţi $\alpha$, $\beta$, astfel ca $\beta > \alpha > 0$, există o valoare $l \in M$, astfel ca $\alpha < l < \beta$.

Extrăgînd cîte o valoare $l_j \in I_j (j=1,2,\ldots)$, mulțimea $M$ a valorilor $l_j$ posedă cîte un element în fiecare interval $(\alpha,\beta)$, ea este deci densă în $(0,+\infty)$ și deci șirul de intervale $I_j$ este un șir $(D)$.

2° *Fiind date: o mulțime $A$ de valori pozitive, densă în $(0,+\infty)$ și un șir $(D)$ de intervale $I_j$, șirul mulțimilor $A_j$, definite prin relația*

$$A_j = A \cap I_j, \qquad j=1,2,\ldots$$

*este de asemenea un șir $(D)$.*

Este suficient, într-adevăr, să observăm că orice mulțime $M$ de valori $l_j$, extrase din $A_j$ este densă în $(0,+\infty)$, ceea ce reiese limpede din faptul că $l_j \in A_j \to l_j \in I_j$ și din faptul că șirul de intervale $I_j$ este un șir $(D)$.

**§ 2. Mulțime de includere a lui D(E).** O mulțime $M$ de valori pozitive, distincte, densă în intervalul $(0,+\infty)$ se va numi *mulțime de includere* (a distanțelor). Avem

1° *Pentru o mulțime de includere $M$ și o dimensiune $r$ (finită sau infinită) arbitrar date, există în spațiul euclidian total $\mathcal{E}$ mulțimi minimale $E$, de dimensiune $r$ și cu distanțe (inegale*[1]*) luate în $M$.*

Numim, spre prescurtare, de tip $t$ (E) o mulțime de puncte satisfăcînd condițiilor din enunț.

*a*) Fie $r=q$, finit. Procedăm prin inducție completă.

Pentru $r=1$, definim mulțimea $E_1$, de tip $t$(E), astfel: Fie $E_1=\{P_0, P_1\} \subset M$, unde $P_0=0$ (punctul-origine al lui $\mathcal{E}$) și $P_1 \in \mathcal{E}^1$, punctul $P_1$ avînd coordonata sa $x^1=1 \in M$. Verificarea este imediată; $E_1$ este minimală, de dimensiune 1 și singura sa distanță este luată în $M$.

Pentru $r=q-1$, să presupunem definită mulțimea $E_{q-1}$ de tip $t(E)$, $E_q \subset \mathcal{E}^q$, luînd

$E_q = \{P_q\} \cup E_q = \{P_0, P_1, \ldots, P_{q-1}, P_q\}$, unde punctul $P_q$ este definit prin următorul procedeu:

Definim întîi un punct $Q \in \mathcal{E}^q$, a cărui singură coordonată nenulă este aceea de ordin $q$. Notînd-o cu $d_0$, unde $d_0$ este o valoare pozitivă arbitrar aleasă și punînd

$$d_i = d(P_i, Q), \qquad \rho_i = d(P_0, P_i), \qquad i=0,1,\ldots,q-1, \tag{47}$$

vom avea

$$(\rho_i)^2 = (d_i)^2 - (d_0)^2. \tag{48}$$

---

[1]) Condiția ca $E$ să fie cu distanțe inegale ar putea fi suprimată din enunț, fără a se modifica concluzia, cum de altfel rezultă limpede din demonstrație. Această condiție suplimentară a fost introdusă numai în vederea aplicațiilor ce vom da acestei propoziții.

Cînd se renunță la condiția suplimentară menționată, se poate înlocui mulțimea $M$ cu mulțimea $M^*$ a singurei valori date $a$, adică $M=\{a\}$, $a>0$ și $E_r$ are atunci toate distanțele sale egale și are dimensiunea $r$, dată.

Putem construi succesiv mulțimile minimale $E_q$, astfel ca $E_q \subset E_{q+1}$ și $E_{\aleph_0} = \cup E_q$, după cum urmează: Punctul $P_0$ fiind punctul-origine $O$, fie $E_1=\{P_0, P_1\}$, $P_1 \in \mathcal{E}^1$, $d(P_0, P_1)=a$ și fie $E_{q-1} \subset \mathcal{E}^{q-1}$, $(q=2,\ldots,n)$ deja definite. Punem $E_n = \{P_n\} \cup E_{n-1}$, unde $P_n \in \mathcal{E}^n$, este definit prin $\overrightarrow{P_0 P_\mu} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{P_0 P_1} + \overrightarrow{P_0 P_2} + \ldots + \overrightarrow{P_0 P_{n-1}}\right)$, iar $\overrightarrow{P_n P_\mu}$ este luat ortogonal la $W(E_{n-1})$ și $(\overrightarrow{P_\mu P_n})^2 = a^2 - (\overrightarrow{P_0 P_\mu})^2$. Avem atunci $|\overrightarrow{P_0 P_\mu}| \leq \frac{n-1}{n}\, a$ și $|\overrightarrow{P_n P_i}| = a$, $(i=0,1,\ldots,n-1)$.

Fie $\varepsilon$ o valoare pozitivă.

Alegem în $M$ un număr de $q$ valori $l_i$ distincte, satisfăcînd relaţiile

$$(d_i)^2-\varepsilon \leqslant (l_i)^2 \leqslant (d_i)^2+\varepsilon,\ l_i \in M,\ l_i \notin D(E_{q-1}),\ i=0,1,\ldots,q-1, \tag{49}$$

ceea ce este posibil, deoarece $D(E_{q-1})$ are un număr finit de valori, în timp ce $M$ este densă în $(0,+\infty)$.

Definim în sfîrşit punctul $P_q \in \mathcal{E}^q$ prin condiţiile

$$d(P_i, P_q) = l_i, \qquad i=0,1,\ldots,q-1 \tag{50}$$

şi rămîne de dovedit existenţa punctului $P_q$.

Notăm cu $O'$ punctul din $\mathcal{E}^{q-1}$ avînd coordonatele, de ordine $i=1,2\ldots, q-1$ egale respectiv cu coordonatele de aceleaşi ordine, ale lui $P_q$. Cum $P_0=O$, vectorul $\overrightarrow{O'P_q}$ este ortogonal vectorilor $\overrightarrow{OP_i}$, adică $\overrightarrow{OP_i}$, $\overrightarrow{O'P_q}=0$. Atunci, din (50) rezultă

$$\overrightarrow{P_iP_q^2} = (\overrightarrow{OP_q}-\overrightarrow{OP_i})^2 = (l_i)^2 \tag{51}$$

şi de aci sistemul de ecuaţii în $\overrightarrow{OO'}$

$$\overrightarrow{OP_i}\cdot\overrightarrow{OO'} = c_i, \qquad i=1,2,\ldots,q-1, \tag{52}$$

cînd punem, ţinînd seama de ecuaţiile (47) şi (51)

$$(l_0^2)-(l_i)^2+(\rho_i)^2 = 2c_i. \tag{53}$$

Observăm că

$$\overrightarrow{OP_i}\cdot\overrightarrow{OP_q} = \overrightarrow{OP_i}(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P_q}) = \overrightarrow{OP_i}\cdot\overrightarrow{OO'}.$$

Dar mulţimea $E_{q-1}$ este minimală, are $q$ puncte şi dimensiunea ei este $q-1$, deci cei $q-1$ vectori $\overrightarrow{OP_i}$, $(i=1,2,\ldots,q-1)$, sînt liniar independenţi.

În consecinţă, notînd cu $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{q-1}$ coordonatele lui $P_i$ şi cu $x^1, x^2, \ldots, x^q$ coordonatele lui $P_q$, sistemul (52) devine

$$x_i^1 x^1 + x_i^2 x^2 + \ldots + x_i^{q-1}\cdot x^{q-1} = c_i,\ i=1,2,\ldots,q-1 \tag{54}$$

şi determinantul $\Delta$ de ordin $q-1$ al coeficienţilor săi este nenul. Există deci o soluţie unică în (54) pentru coordonatele lui $O'$, care sînt şi primele $q-1$ coordonate ale lui $P_q$.

Coordonata $x^q$ de ordin $q$, a lui $P_q$ va fi determinată de ecuaţia

$$\overrightarrow{OP_q^2} = (x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{q-1})^2+(x^q)^2 = (l_0)^2 \tag{55}$$

şi vom vedea că dacă luăm $\varepsilon$ suficient de mic, există o valoare reală $x^q>0$, care satisface ecuaţia (55).

Or, din ecuaţiile (48), (49) şi (53) rezultă că $|c_i|<\varepsilon$; $i=1,2,\ldots,q-1$.

Fie $m$ cea mai mare valoare, finită, a valorii absolute a minorilor de ordin $q-2$ ai lui $\Delta$ şi să considerăm formulele de rezolvare ale sistemului (54). Desvoltînd determinanţii caracteristici, care constituie numărătorii formulelor de rezolvare şi care sînt forme liniare în $c_i$, avem

$$|x^i| \leqslant \frac{(q-1)\,m}{|\Delta|}\,\varepsilon \tag{56}$$

și deci din ecuațiile (49), (55), (56) se obține relația

$$(x^q)^2 = (l_0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - \ldots - (x^{q-1})^2 \geqslant (d_0)^2 - \varepsilon - \frac{(q-1)^2 m^2}{\Delta^2} \varepsilon^2.$$

Pentru $\varepsilon$ destul de mic ultimul ei membru este pozitiv, ceea ce arată că ecuația (56) admite soluția reală $x^q > 0$ și punctul $P_q$ există.

Mulțimea $E_q$ de $q+1$ puncte are dimensiunea $q$, deoarece vectorul $\overrightarrow{P_0 P_q}$ este liniar independent de cei $q-1$ vectori ai lui $E_{q-1}$ pentru că relația

$$\overrightarrow{P_0 P_q} = a_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + a_2 \overrightarrow{P_0 P_2} + \ldots + a_{q-1} \overrightarrow{P_0 P_{q-1}}$$

este imposibilă cînd coeficienții $a_i$ nu sînt toți nuli, deoarece componenta de ordin $q$ a lui $\overrightarrow{P_0 P_q}$ egală cu $x^q$ este nenulă, în timp ce vectorii $\overrightarrow{P_0 P_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, q-1)$ aparțin lui $\mathcal{E}^{q-1}$, ceea ce este absurd. Așadar $E_q$ este minimală și $D(E_q) \subset M$, pentru că

$$D(E_q) = D(E_{q-1}) \cup \{l_0, l_1, \ldots, l_{q-1}\}$$

și avem

$$D(E_{q-1}) \subset M, \qquad l_i \in M, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, q-1.$$

Însă mulțimea $E_{q-1}$ este cu distanțe inegale și cum valorile $l_i$ sînt inegale între ele, iar $l_i \notin D(E_{q-1})$, mulțimea $E_q$ este de asemenea cu distanțe inegale; $E_q$ este deci de tipul $t(E)$.

*b)* Mulțimea $E$, reuniune a celor precedente

$$E = \bigcup_{q \in N} E_q$$

este o mulțime minimală, de dimensiune infinită, pentru că $E_q \subset E_{q+1}$ $(q = 1, 2, \ldots)$. Este clar că $E$ este de tipul $t(E)$, deoarece distanțele sale sînt inegale, prin construcție.

## V. Mulțimi de includere $L$

**§ 1. Proprietăți fundamentale.** 1° *Se poate defini o mulțime de includere $L$, numărabilă, astfel ca orice mulțime de puncte din spațiul euclidian total $\mathcal{E}$, cu distanțe inegale, luate în mulțimea $L$, să fie minimală* [1]).

Punem

$$L = \{l_0, l_1, l_2, \ldots, l_j, \ldots\}.$$

Prin definiție, $L$ este o mulțime de valori pozitive distincte, $l_j$, $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, densă în intervalul $(0, +\infty)$.

Fie dat un șir $(D)$ de intervale $I_j$, dens în intervalul $(0, +\infty)$, (2°, § 1, IV).

Se va defini $L$, folosind o infinitate numărabilă de alegeri succesive în intervalele $I_j$ (sau în mulțimile $A_j = A \cap I_j$), unde $A$ este o mulțime de valori pozitive densă în $(0' + \infty)$.

---

[1]) S. Piccard [5] dă un exemplu de o mulțime numărabilă de valori reale, care nu poate fi mulțimea distanțelor unei mulțimi de puncte din spațiul $\mathcal{E}^{(n)}$, oricare ar fi $n = 1, 2, \ldots$; astfel ar fi mulțimea $\{a_1, a_2, \ldots\}$, unde $a_1 = 1$, $a_i = 2a_{i-1} + 1$, $(i = 1, 2, \ldots)$, care nu este însă o mulțime de includere, nefiind densă în $(0, +\infty)$.

Alegem arbitrar pe $l_0 > 0$ şi punem $H_0 = \{l_0\}$.

Definim mulţimea de excludere $T(H_0)$ ataşată lui $H_0$ (§ 3, III) şi o notăm cu $T_0$, mulţime finită, pentru că $H_0$ este finită (1°, § 3, III).

Alegem arbitrar pe $l_1$ în intersecţia mulţimii $I_1$ (respectiv $A_1$) cu mulţimea $cT_0$ complementară a lui $T_0$, faţă de mulţimea $Q$ a valorilor pozitive din intervalul $(0, +\infty)$ [1]). Vom putea scrie

$$l_1 \in I_1 \cap cT_0 \quad \text{(respectiv } l_1 \in A_1 \cap cT_0\text{)},$$

ceea ce este posibil, pe cale de alegere, deoarece $I_1$ (respectiv $A_1$) este infinit, pe cînd $T_0$ este finit, deci se exclud din $I_1$ (respectiv $A_1$) un număr finit de elemente, valori pozitive.

Putem pune

$$H_1 = \{l_0, l_1\}$$

şi proceda indefinit la alegerea elementelor $l_{j+1}$, aşa cum urmează:

Fie deja definită mulţimea

$$H_j = \{l_0, l_1, \ldots, l_j\} \tag{57}$$

şi să punem, folosind definiţiile anterioare ((39), § 3, III) ale mulţimilor de excludere,

$$T_j' = T'(H_j), \quad T_j = T(H_j) = H_j \cup T_j', \tag{58}$$

în care $T_j$ este mulţimea de excludere, ataşată lui $H_j$; atunci $T_j$ este finită deoarece $H_j$ este finită (1°, § 3, III).

Alegem arbitrar pe $l_{j+1}$ *excluzînd* [2]) valorile din $T_j$. Punem

$$l_{j+1} \in I_{j+1} \cap cT_j \text{ (respectiv } l_{j+1} \in A_{j+1} \cap cT_j\text{)}, \tag{59}$$

în care $cT_j$ este complementara mulţimii $T_j$ faţă de $Q = (0, +\infty)$. Ori aceasta este totdeauna posibil, deoarece $I_{j+1}$ (respectiv $A_{j+1}$) este o mulţime infinită, pe cînd $T_j$ este finită şi deci mulţimile din (59) sînt nevide.

Valorile $l_j$, care constituie prin definiţie mulţimea $L$, aparţinînd intervalelor $I_j$ (respectiv mulţimilor $A_j$) pentru $j = 1, 2, \ldots$ sînt elemente extrase dintr-un şir $(D)$ şi în consecinţă mulţimea lor $L$ este densă în intervalul $(0, +\infty)$. $L$ este deci o mulţime de includere, numărabilă.

Valorile $l_j \in L$ sînt distincte. Într-adevăr, din

$$H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_j \subset \ldots$$

rezultă ((40), § 3, III)

$$T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_j \subset \ldots \tag{60}$$

Cînd $j < h$, avem deci

$$j \leqslant h-1 \to T_j \subset T_{h-1} \to cT_{h-1} \subset cT_j \subset c(H_j \cup T_j') \tag{61}$$

$$\to cT_{h-1} \subset (cT_j' \cap cH_j)$$

---

[1]) În ceea ce urmează, cu simbolul $cM$ vom nota mulţimea complementară a unei mulţimi oarecare $M$ de valori pozitive, faţă de mulţimea tuturor valorilor pozitive $Q = (0, +\infty)$.

[2]) Astfel se justifică denumirea de mulţime *de excludere*, atribuită lui $T_j$.

și astfel ținînd seama de (59), (61)

$$l_h \in (I_h \cap cT_{h-1}) \subset (I_h \cap cT_j' \cap cH_j) \subset cH_j, \tag{62}$$

în timp ce avem, prin definiția lui $H_j$ (57),

$$l_j \in H_j, \tag{63}$$

ceea ce dovedește că $l_j$ și $l_h$ sînt distincte: $l_j \neq l_h$.

Rămîne de verificat că mulțimea $L$, astfel definită printr-o infinitate numărabilă de alegeri succesive ale valorilor $l_j$ în șirul mulțimilor $I_{j+1} \cap cT_j$, $(j=0,1,2,\ldots)$, satisface condițiilor enunțului.

Din propoziția (1°, § 2, IV) rezultă că pentru orice dimensiune dată există mulțimi $E$, minimale și cu distanțe inegale, luate în $L$.

Să dovedim că orice mulțime $E$ din $\mathfrak{E}$, cu distanțe inegale și luînd distanțele sale în $L$, este minimală.

Vom nota separat cazul $\alpha°$), cînd $E$ are dimensiunea finită $n$ și cazul $\beta°$), cînd $E$ are dimensiunea infinită $\aleph_0$.

$\alpha°$ Convenim să spunem, spre prescurtare, că *mulțimea $E$ are caracterul $(n)$*, cînd satisface condițiile următoare:

1) $E$ are dimensiunea $n$,

2) $E$ este o mulțime cu distanțe inegale,

3) $E$ ia distanțele sale în $L$.

Vom arăta deci că *dacă o mulțime $E$ are caracterul $(n)$, ea este minimală* și aceasta oricare ar fi $n \in N$, $N = \{1,2,\ldots\}$.

Procedăm prin inducție completă, în raport cu $n$.

Fie $n = 1$; să arătăm că o mulțime $E^1$ de caracter (1) este minimală. Dimensiunea lui $E^1$ este 1, sînt deci în $E^1$ cel puțin două puncte. Să arătăm că nu pot fi mai mult de două puncte $P_0, P_1$.

Să presupunem într-adevăr că ar mai fi în $E_1$ și punctul $P_2$, adică fie

$$E_*^1 = \{P_0, P_1, P_2\} \subset E^1.$$

Este clar că $E_*^1$ ar avea dimensiunea 1 și că distanțele din $E_*^1$ ar fi inegale, ca și în $E^1$.

Fie

$$d(P_u, P_v) = l_s \in L, \tag{64}$$

în care $P_u, P_v$ sînt puncte oarecari din $E_*^1$, indicii $s$ sînt diferiți, pentru perechi $(P_u, P_v)$ diferite. Punem

$$h = \sup \{s\}. \tag{65}$$

Valoarea superioară $h$ a indicilor este atinsă și putem renumerota, la nevoie, punctele mulțimii $E_*^1$ astfel ca să avem

$$d(P_1, P_2) = l_h. \tag{66}$$

Fiecare din mulțimile $E_1^1 = \{P_0, P_1\}$, $E_2^1 = \{P_0, P_2\}$ este minimală, avînd două puncte și dimensiunea 1, pentru că punctele $P_0, P_1, P_2$ sînt distincte. Mulțimea $E_*^1$ de dimensiunea 1 satisface relația $E_*^1 = E_1^1 \cup E_2^1$. Distanța $t_{12}^1$ a vîrfurilor $P_1$, $P_2$ mulțimilor $E_1^1$ și $E_2^1$ este ((38), § 3, III)

$$t_{12}^1 = d(P_1, P_2) = l_h.$$

Să considerăm şi mulţimea

$$H_{h-1} = \{l_1, l_2, \ldots, l_{h-1}\} \subset L,$$

precum şi mulţimea de excludere $T_{s-1}$ ataşată lui $H_{h-1}$,

$$T_{h-1} = T(H_{h-1}) = H_{h-1} \cup T'(H_{h-1}).$$

Din (65) şi din (66) rezultă pentru distanţele perechilor de puncte din $E_1^1$ şi din $E_2^1$, că avem relaţia (64), cu $s < h$, astfel că $l_s \in H_{h-1}$. Prin urmare mulţimile $E_1^1$, $E_2^1$ iau distanţele lor în $H_{h-1}$,

$$D(E_1^1) \subset H_{h-1}, \qquad D(E_2^1) \subset H_{h-1}. \tag{67}$$

Deci, în virtutea definiţiei lui $T'(H_{h-1})$, a relaţiilor (66) şi (67), condiţiile 1—6 din (§ 3, III) fiind îndeplinite, rezultă

$$t_{12} \in T'(H_{h-1}) \subset T(H_{h-1}) \rightarrow l_h \in T(H_{h-1}).$$

Or, în baza definiţiei valorilor $l_{j+1}$ (63)

$$l_h \in (I_h \cap cT_{h-1}) \subset cT_{h-1} \subset T(H_{h-1}),$$

ceea ce este absurd, dacă se ţine seamă de definiţie. Aşadar $E^1$ are două puncte şi numai două. Fiind de dimensiune 1, este o mulţime minimală.

Rămîne să trecem acum la raţionamentul prin inducţie. Vom presupune demonstrat că mulţimea $E^p$, de caracter $(p)$, este o mulţime minimală, cînd $p \leqslant n-1$ şi vom demonstra aceeaşi proprietate pentru $p \leqslant n$.

Presupunînd în adevăr că $E^n$ are caracterul $(n)$, putem admite, prin absurd, că numărul de puncte ale lui $E^n$ depăşeşte pe $n+1$. Numărul de puncte nu poate fi inferior lui $n+1$, deoarece dimensiunea lui $E^n$ este $n$ (observaţie § 1, II).

Fie

$$E^n = \{P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots\}.$$

Deoarece dimensiunea lui $E^n$ este $n$, avem $n$ vectori liniari independenţi, printre vectorii $\overline{P_0P_j}$, $(j = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, în care $P_0$ este un punct oarecare din $E^n$ ($2^0$, § 3, I). Se pot numerota punctele lui $E^n$, astfel ca

$$W_n = \{\overline{P_0P_1}, \overline{P_0P_2}, \ldots, \overline{P_0P_n}\},$$

să fie mulţimea celor $n$ vectori liniar independenţi. Extremităţile lor definesc atunci $n+1$ puncte distincte ale lui $E^n$ şi există, prin ipoteză, în $E^n$, cel puţin încă un punct, pe care-l putem nota cu $P_{n+1}$.

Mulţimea $E_*^n$, de $n+2$ puncte,

$$E_*^n = \{P_0, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}\}$$

are dimensiunea $n$, pentru că $E_*^n \subset E^n$, iar dacă $E_*^n$ are dimensiunea $p$, avem $p \leqslant n$, pe cînd $W_n \subset \Lambda(E_*^n)$, deci $p \geqslant n$, deoarece $W_n$ are dimensiunea $n$.

Considerînd $d(P_u, P_v)$ distanţa unei perechi oarecare $(P_u, P_v)$ de puncte distincte din $E_*^n$, avem

$$d(P_u, P_v) = l_s \in L \tag{68}$$

indicele $s$ diferă, pentru perechi $(P_u, P_v)$ distincte. Însă cum valorile $l_s$ sînt distincte, nu există două distanțe egale în $E_*^n \subset E^n$.

Fie $h$ cel mai mare dintre indicii $s$

$$h = \sup \{s\}. \tag{69}$$

Există o pereche și numai una de puncte din $E_*^n$, și anume fie perechea $P_i$, $P_j$), astfel ca $d(P_i, P_j) = l_h$. Putem conveni de a renumerota, cînd este necesar, punctele lui $E_*^n$, astfel ca să avem

$$d(P_n, P_{n+1}) = l_h. \tag{70}$$

Definim apoi mulțimile de $n+1$ puncte, fiecare,

$$E_1^n = \{P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n\}, \qquad E_2^n = \{P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_{n+1}\}$$

și mulțimea de $n$ puncte, care este suportul lor comun (Lema, § 3, III)

$$S_{12}^{n-1} = E_1^n \cap E_2^n = \{P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}\}.$$

Mulțimile $E_1^n$, $E_2^n$, $S_{12}^{n-1}$ au fiecare proprietățile 2) și 3) de mai sus, deoarece sînt submulțimi ale lui $E^n$, care este cu distanțe inegale, luate în $L$. Mai mult, fiecare din ele este o mulțime minimală, așa cum vom arăta.

Intr-adevăr, fie $p$ dimensiunea lui $E_1^n$ (respectiv a lui $E_2^n$), care are $n+1$ puncte; avem deci $p \leqslant n$. Or, dacă am avea de asemenea, prin absurd, $p \leqslant n-1$, ar rezulta de aici, în baza ipotezei inducției, că mulțimea $E_1^n$ (respectiv $E_2^n$), care are dimensiunea $p$ și deci caracterul $(p)$ este minimală. Mulțimea $E_1^n$ (respectiv $E_2^n$) ar avea deci $p+1$ puncte, adică cel mult $n$ puncte, ceea ce nu are loc, deoarece $E_1^n$ (respectiv $E_2^n$) are $n+1$ puncte. Rezultă deci că $p \leqslant n$ și $p > n-1$, adică $p = n$. Dimensiunea lui $E_1^n$ (respectiv a lui $E_2^n$) este deci $n$ și cum $E_1^n$ (respectiv $E_2^n$) are $n+1$ puncte, mulțimea $E_1^n$ (respectiv $E_2^n$) este minimală. Or, $S_{12}^{n+1}$ fiind o submulțime a lui $E_1^n$ este de asemenea minimală.

Vom considera în sfîrșit mulțimea

$$H_{h-1} = \{l_1, l_2, \ldots, l_{h-1}\}$$

și mulțimea de excludere $T_{h-1}$, atașată lui $H_{h-1}$,

$$T_{h-1} = T(H_{h-1}) = H_{h-1} \cup T'(H_{h-1}).$$

Or, din (69) și (70) rezultă pentru distanțele $d(P_u, P_v)$ ale perechilor de puncte din $E_1^n$, respectiv din $E_2^n$, că în (68) avem odată cu $s < h$ și $l_s \in H_{h-1}$; prin urmare mulțimile $E_1^n$, $E_2^n$ își iau distanțele în $H_{h-1}$, adică

$$D(E_1^n) \subset H_{h-1}, \qquad D(E_2^n) \subset H_{h-1}. \tag{71}$$

Constatăm în sfîrșit că sînt îndeplinite condițiile 1)—6) din (§ 3, III luînd $H = H_{h-1}$ și $R_{12}^n = E_*^n$.

Deducem de aici, că distanța vîrfurilor mulțimilor $E_1^n$ și $E_2^n$,

$$t_{12}^n = d(P_n, P_{n+1}), \tag{72}$$

este astfel că în virtutea definiției lui $T(H_{h-1})$ și a relațiilor (71), avem

$$t_{12}^{m} \in T'(H_{h-1}) \subset T(H_{h-1}) = T_{h-1}. \tag{73}$$

Din relațiile (70), (72) și (73) rezultă deci

$$l_h \in T_{h-1},$$

iar, din definiția valorilor $l_{j+1}$ (59), rezultă

$$l_h \in (I_h \cap cT_{h-1}) \subset cT_{h-1},$$

ceea ce este absurd, dacă se ține seamă de definiție. Nu există deci în $E^n$ decît $n+1$ puncte și cum $E^n$ are dimensiunea $n$, această mulțime este minimală, deci inducția este încheiată.

$\beta^a$ Fie $E$ o mulțime din $\mathfrak{E}$, cu distanțe inegale, luate în $L$ și să presupunem dimensiunea sa, infinită. Mulțimea $E$ este minimală, dacă fiecare din submulțimile ei finite $E^*$ sînt minimale. Dar $E^* \subset E$ este cu distanțe inegale, luate în $L$. Numărul punctelor lui $E^*$ fiind finit, dimensiunea lui $E^*$ este finită și s-a demonstrat chiar acum $(\alpha^\circ)$ că $E^*$ este în acest caz minimală. Deci $E$ este o mulțime minimală; ceea ce trebuia demonstrat.

## VI. Mulțimi de clasă $(\mathfrak{L})$

**§ 1. Clasa** $(\mathfrak{L})$. O mulțime de includere $L$ este *de clasă* $(\mathfrak{L})$, cînd orice mulțime $E$ de puncte din spațiul euclidian total $\mathfrak{E}$, cu distanțe inegale, este minimală atunci cînd își ia distanțele în $L$. Avem

1° *Orice submulțime a unei mulțimi de clasă* $(\mathfrak{L})$ *este de asemenea de clasă* $(\mathfrak{L})$, *cu condiția de a fi densă în intervalul* $(0, +\infty)$.

Într-adevăr, fie $L \in (\mathfrak{L})$, $L_1 \subset L$ și $L_1$ densă în $(0, +\infty)$. Mulțimea $L_1$ este o mulțime de includere și orice $E \subset \mathfrak{E}$, cu distanța inegale, luate în $L_1$, are distanțele luate și în $L$, deci este minimală. Așadar $L_1$ este de clasă $(\mathfrak{L})$.

2° *Orice mulțime* $M$ *de includere posedă o submulțime de clasă* $(\mathfrak{L})$. Este suficient, într-adevăr, să reluăm raționamentul propoziției 1°, din (V) și să construim mulțimea de includere numărabilă $L \subset M$, respectivă.

Fie $l_0$ aleasă în $M$, mulțime densă în $(0, +\infty)$. Pentru $j = 0, 1, 2, \ldots$, alegem pe $l_{j+1}$ succesiv, cînd $H_j$ și $T_j$ au fost construite, în prealabil ((57) $V$; (58), V) luînd

$$l_{j+1} \in (M \cap I_j' \cap cT_j),$$

ceea ce este întotdeauna posibil, deoarece fiecare mulțime $A_{j+1} = M \cap I_{j+1}$ este infinită, iar $T_j$ finită. Or șirul de mulțimi $A_{j+1}$ este (2°, § 1, IV) un șir $(D)$ și cum fiecare $l_{j+1}$ este un element din $A_{j+1}$, mulțimea numărabilă $L$ este densă în $(0, +\infty)$, deci în baza propoziției (1°, V) este de clasă $(\mathfrak{L})$.

3° *Reuniunea unui lanț de mulțimi de clasă* $(\mathfrak{L})$ *este de clasă* $(\mathfrak{L})$[1]. Fie $(\mathfrak{L}^*)$ un lanț de mulțimi $L_\alpha$ de clasă $(\mathfrak{L})$, ceea ce revine la a spune că mulțimea $A$, de indici $\alpha$, este total ordonată prin relația

$$\alpha < \alpha' \rightleftarrows L_\alpha \subset L_{\alpha'}, \quad \alpha \in A, \alpha' \in A. \tag{74}$$

[1]) O familie $(\mathfrak{L}^*) \subset (\mathfrak{L})$ este un *lanț*, dacă din $L_\alpha \in' (\mathfrak{L}^*)$ și $L_\beta \in (\mathfrak{L}^*)$ se deduce: $L_\alpha \subset L_\beta$ sau $L_\beta \subset L_\alpha$. Propoziția 3° exprimă faptul că clasa $(\mathfrak{L})$ este o *familie închisă* [6].

Notăm cu $L^*$ mulțimea densă de valori pozitive, obținută ca reuniune a mulțimilor lanțului $(\mathcal{L}^*)$

$$L^* = \bigcup_{\alpha} L_\alpha . \tag{75}$$

Dar $L^*$ este o mulțime de includere, deoarece $L_\alpha \in (\mathcal{L})$, deci $L_\alpha$ este o mulțime de includere și $L_\alpha \subset L^*$. Rămîne de arătat că și $L^*$ este de clasă $(\mathcal{L})$.

Fie $E$ o mulțime de puncte din $\mathcal{E}$, cu distanțe inegale, luate în $L^*$. Distingem următoarele cazuri:

1) Dimensiunea $n$ a lui $E$ este finită: vom arăta că mulțimea $E$ este minimală.

Într-adevăr, avem $n$ vectori ai lui $E$, liniar independenți, $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}$ (2°, § 3, *I*). Fie

$$E_{n+1} = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\} \subset E, \tag{76}$$

mulțimea extremităților lor și să presupunem, prin absurd, că există încă un punct $P_{n+1}$ în $E$, $P_{n+1} = \not\in E_{n+1}$ și să punem

$$E_{n+2} = \{P_0, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}\} \subset E. \tag{77}$$

Din (77) rezultă, deoarece $E$ își ia distanțele în $L^*$, că $D(E_{n+2}) \subset L^*$. Or în $D(E_{n+2})$ nu există decît un număr finit de valori $l' \in D(E_{n+2})$, inegale. Fiecare $l'$ aparține mulțimilor $L_{\alpha'}$, începînd de la un indice $\alpha'$ de ales, adică pentru fiecare indice $\alpha \geqslant \alpha'$, deoarece $A$ este ordonată și avem relația (74), iar din $l' \in L^*$ (75), rezultă $l' \in L_{\alpha'}$, cel puțin pentru o valoare a lui $\alpha'$, care poate fi de altfel aleasă în mod arbitrar printre valorile sale posibile. Fie $\alpha^*$ cel mai mare din indicii $\alpha'$ aleși, care sînt în număr finit și avem

$$D(E_{n+2}) \subset L_{\alpha^*} \in (\mathcal{L}), \quad \alpha^* \in A.$$

Dar $E_{n+2}$ fiind cu distanțe inegale și $L_{\alpha^*}$ de clasă $(\mathcal{L})$, $E_{n+2}$ este minimal. Or, din $E_{n+1} \subset E_{n+2} \subset E$ unde $E_{n+1}$ și $E$ au dimensiunea $n$, rezultă că și $E_{n+2}$ are dimensiunea $n$, și ca mulțime minimală ar trebui să posede $n+1$ puncte, ceea ce contrazice definiția sa (77) ca mulțime de $n+2$ puncte. Nu pot exista deci mai mult de $n+1$ puncte în $E$, mulțime care avînd dimensiunea $n$, și deci cel puțin $n+1$ puncte, are exact $n+1$ puncte; deci $E$ este minimală.

2) Dimensiunea lui $E$ este infinită: se vede că mulțimea $E$ este minimală. Punînd, într-adevăr, $E^q = E \cap \mathcal{E}^q$, avem $D(E^q) \subset D(E) \subset L^*$. Or dimensiunea lui $E^q$ este finită, iar mulțimea $E^q$ este cu distanțe inegale, luate în $L^*$. Rezultă din ce precede 2) că $E^q$ este minimală. Or, aceasta arată (4°, § 1, II) că și $E$ este minimală.

Din cazurile 1) și 2) rezultă deci că $L^*$, care este o mulțime de includere, este de clasă $(\mathcal{L})$.

4° *Complementara unei mulțimi $L$ de clasă $(\mathcal{L})$ este de a doua categorie în orice interval $\Delta$ de valori pozitive*[1]. Să presupunem, într-adevăr, prin absurd, mulțimea $cL$, complementara mulțimii $L$ față de $(0, +\infty)$, de întîia categorie a lui Baire. În acest caz, vom arăta că se poate defini o mulțime $E_1 = \{P_0$.

[1]) O mulțime $E \in \Delta \cap \mathcal{E}^p$ este de întîia (respectiv: de a doua) categorie a lui Baire, în intervalul $\Delta$ după cum este (respectiv: nu este) reuniunea unei infinități numărabile de mulțimi $E_n$ nicăieri dense, în intervalul $\Delta$ din spațiul euclidian $\mathcal{E}^{(p)}$, cu $p$ dimensiuni.

$P_1, P_2\} \in \mathcal{E}^1$, cu distanţe inegale, astfel ca $D(E_1) \subset L$. Or, $E_1$ avînd 3 puncte şi dimensiunea 1, contrazice ipoteza că $L \in (\mathcal{L})$.

Construim $E_1 \in \mathcal{E}^1$ luînd punctele $P_0 \in \Delta$, $P_1 \in \Delta$ şi $P_0 \neq P_1$, iar $d(P_0, P_1) \subset L$. Fie $P_a$, $P_b$, două puncte din $\mathcal{E}^1$, astfel ca

$$2\overline{P_0P_a} = \overline{P_0P_1}, \qquad \overline{P_0P_b} = 2\overline{P_0P_1}.$$

Dacă avem $P_2 \neq P_a$, $P_2 \neq P_b$, aceasta este suficient pentru a asigura inegalitatea distanţelor în $E_1$. Or, putem alege pe $P_2 \in \Delta$, astfel ca să avem totdeodată $d(P_0, P_2) \in L$, $d(P_1, P_2) \in L$, excluzînd deci în total din $\Delta$, o mulţime de prima categorie de puncte din $\Delta$, deoarece $cL$ este de prima categorie în $\Delta$.

5° *Orice mulţime de clasă* $(\mathcal{L})$ *are măsura interioară nulă*

$$L^* \in (\mathcal{L}). \rightarrow m_i\, L^* = 0\ ^1) \tag{78}$$

Fie $L_1 \subset L^*$, $L_1$ fiind presupusă măsurabilă. Dacă pentru fiecare astfel de $L_1$ se dovedeşte că mes $L_1 = 0$, rezultă $m_i\, L^* = 0$.

Putem considera printre mulţimile $L_1$ numai mulţimile $L \subset L^*$, măsurabile, dar care sînt, în acelaşi timp, dense în $(0, +\infty)$.

Fie într-adevăr, în caz contrar, $\Omega$ mulţimea, cel mult numărabilă, de intervale liniare $\Delta_k$ deschise ($k = 1,2, \ldots$) din $Q = (0, +\infty)$, astfel ca $L_1 \cap \Delta_k = \varnothing$.

Prin procedeul alegerii distingem, în fiecare $\Delta_k$, cîte o submulţime $L_{k+1}$, a lui $L^*$, numărabilă şi peste tot densă în $\Delta_k$, ceea ce se poate, deoarece $L^*$ fiind de clasă $(\mathcal{L})$ este densă în $(0, +\infty)$.

Punem apoi

$$L = \cup\, [L_{k+1} \cup (L_1 \cap c\Delta_k)]$$

Observăm că

$$L_1 \subset L \subset L^*$$

şi că $L$ este densă în $(0, +\infty)$. Dar cum $L \subset L^* \in (\mathcal{L})$, rezultă, cum de altfel s-a văzut (1°, §1, VI), că $L$ este de clasă $(\mathcal{L})$, adică $L \in (\mathcal{L})$.

Aşadar este suficient să demonstrăm că pentru fiecare mulţime de includere $L$, măsurabilă în sensul Borel-Lebesgue, pentru care $L \subset L^*$ şi $L$ de clasă $(\mathcal{L})$, avem

$$L \in (\mathcal{L}), L \subset L^* \rightarrow \text{mes } L = 0, \tag{79}$$

pentru a deduce mes $L_1 = 0$ şi de aici (78).

Să stabilim, mai întîi, că pentru orice interval $\Delta$ de valori pozitive, avem odată cu mes $\Delta > 0$,

$$\text{mes } (\Delta \cap cL) \geqslant \frac{1}{2} \text{ mes } \Delta. \tag{80}$$

Dacă am avea, într-adevăr, prin absurd, un anumit interval, de valori pozitive, astfel ca

$$\text{mes } (\Delta \cap cL) < \frac{1}{2} \text{mes } \Delta, \tag{81}$$

---

1) Notaţiile $m_e A$, respectiv $m_i A$, indică măsura exterioară, respectiv măsura interioară a mulţimii $A$ din spaţiul euclidian $\mathcal{E}^{(p)}$, cu $p$ dimensiuni, măsuri luate în sensul Borel-Lebesgue.

am putea defini o mulțime $E$ de 3 puncte, avînd dimensiunea 1,

$$E = \{P_0, P_1, P_2\} \in \mathcal{E}^1,$$

astfel ca $D(E) \subset L$, ceea ce nu are sens, deoarece $L$ este de clasă $(\mathcal{L})$.

Putem defini, într-adevăr, o astfel de mulțime $E$ după cum urmează: Punem

$$\lambda = \frac{1}{2} \operatorname{mes} \Delta - \operatorname{mes} (\Delta \cap cL) \tag{82}$$

și avem $\lambda > 0$, în baza lui (81). Putem lua convenabil o valoare $\delta$, care satisface relația

$$0 < \delta < 2\lambda \tag{83}$$

și definește două puncte $P_0$, $P_1$ astfel ca $P_0 \in \mathcal{E}^1$, $P_1 \in \mathcal{E}^1$, iar $\delta = d(P_0, P_1) \in L$ ceea ce se poate, deoarece $L$ este densă în $(0, +\infty)$.

Fie $x^1$, $x_0^1$, $x_1^1$ coordonatele punctelor $P$, $P_0$, $P_1$ din $\mathcal{E}^1$, iar $A_0$, respectiv $A_1$, mulțimea punctelor $P \in \mathcal{E}^1$, astfel ca $d(P, P_0) \in L$, respectiv $d(P, P_1) \in L$ și $x^1 > x_0^1$, respectiv $x^1 > x_1^1$.

Se poate obține $A_0$, respectiv $A_1$ din $L$, efectuînd translația $\overline{OP_0}$, respectiv $\overline{OP_1}$, a mulțimii măsurabile $L$. Notînd cu $\Delta_0$, respectiv $\Delta_1$, intervalul obținut din $\Delta$ efecutînd aceleași translații, respectiv, rezultă din (82) că avem

$$\operatorname{mes} (D \cap cL) = \operatorname{mes} (\Delta_0 \cap cA_0) = \operatorname{mes} (\Delta_1 \cap cA_1) = \frac{1}{2} (\operatorname{mes} \Delta) - \lambda. \tag{84}$$

Este suficient să arătăm că mulțimea măsurabilă $A = A_0 \cap A_1$ nu este vidă, deoarece alegînd punctul $P_2 \in A$, completăm definiția lui $E$ și deci (80) este demonstrat. Dovedim că $A$ nu este vidă, arătînd că $A$ este de măsură nenulă într-un interval $\Delta^* = \Delta_0 \cup \Delta_1$, ceea ce va rezulta din inegalitatea de demonstrat,

$$\operatorname{mes} (\Delta^* \cap cA) < \operatorname{mes} \Delta^*. \tag{85}$$

Intr-adevăr din (81), (82), (83) rezultă că $\delta < \operatorname{mes} \Delta$ deci avem, cum de altfel se vede ușor,

$$\delta = \operatorname{mes} (\Delta_0 \cap c\Delta_1) = \operatorname{mes} (\Delta_1 \cap c\Delta_0); \operatorname{mes} \Delta^* = \delta + \operatorname{mes} \Delta. \tag{86}$$

Pe de altă parte, avem

$$cA = cA_0 \cup cA_1,$$

de unde rezultă că

$$\operatorname{mes} (\Delta^* \cap cA) \leqslant \operatorname{mes} (\Delta^* \cap cA_0) + \operatorname{mes} (\Delta^* \cap cA_1),$$

iar ținînd seama de (86), avem

$$\operatorname{mes} (\Delta^* \cap cA_0) \leqslant \operatorname{mes} (\Delta_0 \cap cA_0) + \operatorname{mes} (\Delta_1 \cap c\Delta_0 \cap cA_0),$$

$$\operatorname{mes} (\Delta^* \cap cA_1) \leqslant \operatorname{mes} (\Delta_1 \cap cA_1) + \operatorname{mes} (\Delta_0 \cap c\Delta_1 \cap cA_1).$$

Folosind (83), (84) şi (86), avem cu atît mai mult

$$\text{mes}\,(\Delta^* \cap cA) \leqslant \text{mes}\,\Delta - 2\lambda + 2\delta < \text{mes}\,\Delta^*,$$

ceea ce demonstrează (85). Astfel mulţimea $E$ este definită şi din existenţa ei rezultă absurditatea relaţiei (81), adică validitatea relaţiei (80) pentru oricare $\Delta \subset (0, +\infty)$.

Or, este uşor de văzut că dacă am avea, prin absurd,

$$\text{mes}\ L > 0,$$

nu am putea avea relaţia 80 pentru oricare $\Delta$.

Intr-adevăr, se ştie că, în acest caz, exceptînd o mulţime de măsură nulă de puncte din $L$, avem pentru fiecare $P \in L$, cînd $\Delta_n$ este o vecinătate a sa destul de mică, adică

$$\lim_{n=\infty} \text{mes}\,\Delta_n = 0, \quad P \in \Delta_n,$$

relaţia

$$\lim_{n=\infty} \frac{\text{mes}\,(\Delta_n \cap cL)}{\text{mes}\,\Delta_n} = 0.$$

Există deci, dacă mes$L>0$, un $n$ suficient de mare, ca să avem

$$\text{mes}\,(\Delta_n \cap cL) < \frac{1}{2}\,\text{mes}\,\Delta_n,$$

ceea ce contrazice relaţia (80), cînd luăm $\Delta = \Delta_n$, pentru acelaşi $n$.

Nu putem avea deci mes $L > 0$ şi de aici rezultă (79) şi deci (78). Ceea ce trebuia demonstrat.

**§ 2. Mulţimi saturate în** ($\mathcal{L}$). Vom spune că o mulţime $L$ este *saturată* în clasa ($\mathcal{L}$), cînd $L$ este o mulţime din clasa ($\mathcal{L}$), care nu este inclusă în nici o altă mulţime a clasei ($\mathcal{L}$).

*Observaţie*: *Ca $L$ să fie o mulţime saturată în* ($\mathcal{L}$), *este necesar şi suficient ca oricare ar fi valoarea $l^* \in cL$, mulţimea $L^*$, definită de*

$$L^* = \{l^*\} \cup L, \quad l^* \in cL, \tag{87}$$

*să nu fie de clasă* ($\mathcal{L}$).

Această condiţie rezultă direct din faptul că $cL$ nu este vidă, deoarece este de a doua categorie (4°, § 1). Mai avem de asemenea propoziţia

**1°** *Ca $L$ să fie o mulţime saturată în* ($\mathcal{L}$), *trebuie şi este suficient ca complementara, faţă de $Q = (0, +\infty)$ a mulţimii de excludere $T(L)$, ataşată lui $L$, să fie vidă,*

$$cT(L) = \varnothing \tag{88}$$

Condiţia (88) este *necesară* deoarece dacă am avea prin absurd $cT(L) = \varnothing$, am putea alege o valoare

$$l^* \in cT(L) \tag{89}$$

şi mulţimea $L^*$ de mai sus (87) ar fi de asemenea de clasă ($\mathcal{L}$), ceea ce vom dovedi mai jos.

Considerăm, într-adevăr, o mulțime $E$ cu distanțe inegale luate în $L^*$ Dacă $D(E) \subset L$, $E$ este minimală. Dacă $D(E)$ nu este inclusă în $L$, rezultă că una din distanțele din $E$ este egală cu $l^*$. Să demonstrăm că în acest caz $E$ este de asemenea minimală. Dar rezultă din ($\beta°$,1° $V$) că este suficient să dovedim aceasta în cazul cînd dimensiunea lui $E$ este finită. Notăm cu $n$ dimensiunea lui $E$.

Notînd cu $P_1$, $P_2$ extremitățile vectorului $\overline{V} \in \Lambda(E)$, astfel ca $|\overline{V}| = l^*$ aceste puncte sînt bine definite în $E$, deoarece $E$ este cu distanțe inegale și $l^* \in cT(L) \subset cL$, deci $l^*$ diferă de fiecare $l \in L$.

Considerăm o submulțime $E_{n+2}$ de $n+2$ puncte din $E$. Putem face să figureze în ea și punctele $P_1$, $P_2$, păstrînd lui $E_{n+2} \subset E$ dimensiunea $n$, procedînd ca mai sus ($\alpha°$, 1° $\overline{V}$).

Definim mulțimile

$$S_{12}^{n-1} = E_{n+2} \cap c(P_1, P_2), E_1^n = \{P_1\} \cup S_{12}^{n-1}, E_2^n = \{P_2\} \cup S_{12}^{n-1}. \quad (90)$$

Distanțele în mulțimile $E_1^n$, $E_2^n$, $S_{12}^{n-1}$ din relațiile (90) aparțin lui $D(L)$, deoarece nici unul din punctele $P_1P_2$ nu aparțin decît uneia singure dintre mulțimile din relațiile (90) și fiindcă avem, în baza definirii (87)

$$D(L^*) = \{l^*\} \cup D(L).$$

Deoarece mulțimile din relațiile (90) sînt submulțimi ale lui $E$, fiecare din ele este o mulțime cu distanțe inegale, ca și mulțimea $E$ și deoarece ele iau distanțele lor în $L$, care este de clasă ($\mathfrak{L}$), rezultă că mulțimile (90) sînt minimale. Dar, în baza definiției ((3) §3, III) a lui $T(H)$, pentru $H=L$, se observă că

$$l^* = d(P_1, P_2) = t_{12} \in T(L),$$

contrar lui (89), ceea ce este absurd.

Deci, dacă o mulțime $E$, cu distanțe inegale avînd dimensiunea $n$, ia distanțele în $L^*$ nu poate avea decît $n+1$ puncte, adică este minimală și deci $L^*$ este de clasă ($\mathfrak{L}$).

Condiția (88) este de asemenea *suficientă*. Într-adevăr, rezultă din ea că pentru orice $l^* \in cL$, avem $l^* \in T(L)$. Există deci, în virtutea definiției lui $T(H)$, pentru $H=L$, o mulțime $R_{12}^n$ de $n+2$ puncte, cu distanțe inegale, luate în $L^*$ (87) și care are dimensiunea $n$. Mulțimea $R_{12}^n$ nu este deci minimală iar $L^*$ nu poate fi de clasă ($\mathfrak{L}$). Condiția suficientă de mai sus (*Observația* §2) fiind satisfăcută, $L$ este saturată în ($\mathfrak{L}$). Ceea ce trebuia demonstrat.

2° *Orice mulțime saturată în* ($\mathfrak{L}$) *are puterea continuului.* Într-adevăr, fie $L$ saturată în ($\mathfrak{L}$). Mulțimea $L$ fiind inclusă în mulțimea $Q=(0,+\infty)$, avem $\overline{\overline{L}} \leqslant \aleph$ (puterea continuului). Or, să presupunem $\overline{\overline{L}} < \aleph$. Observăm că $L$ fiind saturată, avem $\overline{\overline{L}} \geqslant \aleph_0$ (1°$V$). Ar urma (2°, § 3, III) deci că și $\overline{\overline{T(L)}} = \overline{\overline{L}} < \aleph$. Așa dar complementara $cT(L)$ a lui $T(L)$, în raport cu $Q$, nu ar fi vidă, ceea ce ar contrazice condiția necesară (1°) și nu ar fi saturată în ($\mathfrak{L}$), contrar ipotezei. Concluzia este deci că $\overline{\overline{L}} = \aleph$. Ceea ce trebuia demonstrat.

3° *Orice mulțime de clasă* ($\mathfrak{L}$) *este inclusă într-o mulțime saturată în* ($\mathfrak{L}$). Fie $Q=(0,+\infty)$, mulțimea tuturor valorilor pozitive $l_\lambda$. Folosind ca indici nume-

rele ordinale, putem presupune, în baza axiomei alegerii, că mulțimea $Q$ este bine ordonată, de tip $\gamma$ și o vom scrie

$$Q = \{l_0, l_1, \ldots, l_\lambda, \ldots\}, \tag{91}$$

în care $\lambda$ este un număr ordinal inferior lui $\gamma$.

Fie $L$ o mulțime dată, de clasă $(\mathfrak{L})$.

Dacă $L$ este saturată în $(\mathfrak{L})$, enunțul este satisfăcut. Dacă nu, $L$ fiind o mulțime din clasa $(\mathfrak{L})$, nesaturată în $(\mathfrak{L})$, am avea

$$cT(L) \neq \varnothing \tag{92}$$

și am putea demonstra ca și mai sus (1), existența unei valori $l^*$ satisfăcînd relația (89), ca și existența unei mulțimi $L^*$, definită prin relația (87), astfel ca $L^* \in (\mathfrak{L})$. Fiind dată mulțimea bine ordonată $Q$, convenim să alegem pentru $l^*$ prima dintre valorile $Q$, care satisface relația (89).

Punem $L_1 = L \in (\mathfrak{L})$. Dacă $L_1$ nu este saturată în $(\mathfrak{L})$, definim mulțimea $L_2 = L \cup \{l_{\lambda_1}\}$, în care am pus $l_{\lambda_1} = l^*$. Dacă $L_2$ este saturată în $(\mathfrak{L})$ enunțul este satisfăcut. Contrar, putem defini, prin inducție transfinită, un șir crescător de mulțimi $L_\alpha$ de clasă $(\mathfrak{L})$, începînd cu $\alpha = 1$, astfel:

1. Cînd numărul ordinal $\alpha$ este de prima speță, adică are un precedent și $L_{\alpha-1}$ nu este saturată în $(\mathfrak{L})$, alegem primul element din $Q$, astfel ca — folosind notațiile cunoscute (§3,III) — să avem

$$l_{\lambda_\alpha} \in cT(L_{\alpha-1}) ;$$

obținem mulțimea, a cărei existență am demonstrat-o mai sus

$$L_\alpha = \{l_{\lambda_\alpha}\} \cup L_{\alpha-1}. \tag{93}$$

2. Cînd numărul ordinal $\alpha$ este de a doua speță, adică este un număr limită, fie

$$\alpha = \lim \alpha', \quad \alpha' < \alpha . \tag{94}$$

Dacă $L_{\alpha'}$ nu este o mulțime saturată în clasa $(\mathfrak{L})$ pentru nici un $\alpha' < \alpha$, definim (3°, §1) mulțimea $L_\alpha$ de clasă $(\mathfrak{L})$ obținută ca reuniune de mulțimi de clasă $(\mathfrak{L})$

$$L_\alpha = \bigcup_{\alpha'} L_{\alpha'}. \tag{95}$$

Această ultimă operație, definește în mod univoc pe $L_\alpha$, deoarece șirul mulțimilor $L_{\alpha'}$ crește cu $\alpha'$, cum de altfel rezultă din relațiile (93) și (95).

O mulțime $L_\alpha$, obținută prin una din operațiile 1) sau 2) de mai sus, poate fi saturată în $(\mathfrak{L})$ și atunci enunțul este satisfăcut sau nu este saturată în $(\mathfrak{L})$ și atunci șirul bine ordonat al acestor operații continuă. Rămîne de dovedit, că acest șir transfinit de operații trebuie să conducă în cele din urmă la o mulțime $L_{\alpha^*}$, saturată în $(\mathfrak{L})$.

Fie, într-adevăr, $\alpha^* < \gamma$, primul număr ordinal, care urmează după toate numerele ordinale $\alpha$, pentru care mulțimile $L_\alpha$ nu sînt saturate în $(\mathfrak{L})$, cînd $\alpha < \alpha^*$.

Dacă $\alpha^*$ este de prima speță, $\alpha^* - 1$ există și $L_{\alpha^*-1}$ nefiind saturată în $(\mathfrak{L})$ mulțimea $L_{\alpha^*}$ există, în baza lui (92) și (93). Or, $L_{\alpha^*}$ trebuie să fie saturată în $(\mathfrak{L})$, altfel ar figura printre mulțimile $L_\alpha$, ale căror indici $\alpha < \alpha^*$ definesc numărul ordinal $\alpha^*$, ceea ce este contradictor.

Dacă $\alpha^*$ este de speța doua, avem $\alpha^* = \lim \alpha$ și fiecare $L_\alpha$ nefiind saturat în $(\mathcal{L})$, cînd $\alpha < \alpha^*$, mulțimea $L_{\alpha^*}$ există în baza relației (95) și a lui (3° din §1). Dar $L_{\alpha^*}$ trebuie să fie saturată în $(\mathcal{L})$, fără care însăși definiția lui $\alpha^*$ ar fi contrazisă.

Lemă. *Familia $E_\pi$ a mulțimilor perfecte nedense $\pi$ de valori pozitive (finite) are puterea $\aleph$ (a continuului).*

Fie $\pi$ o mulțime perfectă, nedensă, de puncte din intervalul $Q = [0, +\infty)$; notăm cu $E_\pi$ mulțimea, care are ca elemente toate mulțimile $\pi$. Punem $\pi_n = \pi \cap \Delta_n$, unde $\Delta_n = [n-1, n]$, $n \in N$, $N = \{1,2, \ldots\}$.

Este suficient să dovedim că avem

$$\overline{\overline{E}}_{\pi_n} = \aleph, \tag{96}$$

deoarece de aici rezultă direct, pentru că $\pi = \bigcup_n \pi_n$

$$\overline{\overline{E}}_\pi = \aleph^{\aleph_0}$$

și deci

$$\overline{\overline{E}}_\pi = \aleph. \tag{97}$$

Demonstrăm relația (96), atașînd biunivoc fiecărei mulțimi $\pi_n$ șirul infinit de extremități ale intervalelor $\delta_{\pi_n, t} = \{P_t', P_t''\}$, continue cu $\pi_n$ în $\Delta_n$. Acest șir poate fi enumerat, luînd întîi intervalele $\delta_{\pi_n, t}$ după ordinul lor de mărime descrescătoare, și de la stînga la dreapta intervalele $\delta_{\pi_n, t}$ egale (în număr finit), după care se enumeră tot dela stînga la dreapta, extremitățile $P_t'$, $P_t''$ ale aceluiași interval $\delta_{\pi_n, t}$.

Ataşăm acestei enumerări un indice $t$ crescător, $t = 1,2, \ldots$, șirul se poate deci scrie, pentru $\pi_n$ dat: $P_1', P_1'', P_2', P_2'', \ldots, P_t', P_t'', \ldots$

Familia tuturor șirurilor de puncte $P_r \in Q = (0, +\infty)$, unde $r = 1,2, \ldots, P_r$, fiind la stînga lui $P_{r+1}$, pentru fiecare $r$, are evident puterea $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$ și familia de $S_{\pi_n}$ este inclusă în familia tuturor șirurilor de mai sus. Cum există o corespondență biunivocă între mulțimile perfecte nedense $\pi_n$ și șirurile $S_{\pi_n}$ corespunzătoare, putem scrie deci că

$$\overline{\overline{E}}_{\pi_n} \leq \aleph. \tag{98}$$

Pe de altă parte, se poate ataşa fiecărei mulțimi $\pi_n$ intervalul $\delta_{\pi_n, 1}$ definit mai sus. Familia tuturor intervalelor nenule $\delta = (P_u, P_v)$, $P_u \in Q$, $P_v \in Q$, $P_u$ la stînga lui $P_v$, are puterea $\aleph^2 = \aleph$ și fiecărui interval considerat ca $\delta_{\pi_n, 1}$ îi corespunde cel puțin un $\pi_n$, de unde rezultă că

$$\aleph \leq \overline{\overline{E}}_{\pi_n}. \tag{99}$$

Așa dar, din relațiile (98) și (99), rezultă relația (96), pe care am demonstrat-o.

*Observație.* Fie $E_\pi^*$ familia de mulțimi $\pi$ perfecte nedense, $\pi \in E_\pi$, astfel ca $\operatorname{mes} \pi > 0$. Cum nu este nimic de schimbat, în raționamentele precedente,

$$\overline{\overline{E}}_\pi^* = \aleph. \tag{100}$$

4° *Orice mulțime numărabilă*[1] $L$ *de clasă* $(\mathcal{L})$ *este inclusă într-o mulțime* $L^*$ *de clasă* $(\mathcal{L})$ *complet nemăsurabilă în orice interval* $\Delta$ *de valori pozitive.*[2]).

$$m_e(L^* \cap \Delta) = \text{mes}\,\Delta, \quad m_i(L^* \cap \Delta) = 0, L \subset L^* \in (\mathcal{L}). \tag{101}$$

Trebuie dovedită existența unei mulțimi $L^*$, care să satisfacă relațiile (101), cînd $L$ este numărabilă și de clasă $(\mathcal{L})$, în care caz nu este saturată în $(\mathcal{L})$ (2°). A doua egalitate (101) este, după cum am văzut anterior (5°, § 1), o consecință a faptului că $L^* \in (\mathcal{L})$.

Dacă putem construi o mulțime $L^*$ de clasă $(\mathcal{L})$, care să satisfacă condiția $L \subset L^*$ astfel ca $L$ să posede cîte un punct în orice mulțime perfectă $\pi$ de măsură nenulă din $\Delta$, iar $L^* \in (\mathcal{L})$; mulțimea $L^*$ va satisface condițiilor enunțate. Intr-adevăr, cum din $L^* \in (\mathcal{L})$ rezultă (5°, § 1) că $m_i(L^* \cap \Delta) = 0$, se vede că $m_e(cL^* \cap \Delta) = \text{mes}\,\Delta$ și deci dacă $\text{mes}\,\pi > 0$, există puncte în $\pi \cap cL^*$, adică $cL^*$ posedă cîte un punct, în orice mulțime perfectă $\pi$ de măsură nenulă și deci atît prima cît și a doua condiție din (101) vor fi satisfăcute.

Mulțimea dată $L$ fiind de clasă $(\mathcal{L})$ este densă în $\Delta$, ca mulțime de includere. Deci dacă există $L^* \in (\mathcal{L})$, astfel ca $L \subset L^*$, $L^*$ va avea cîte un punct în orice mulțime perfectă $\pi$ de măsură nenulă din $\Delta$, dacă $\pi$ este densă într-un interval parțial din $\Delta$, deoarece din $L \subset L^*$, rezultă că și $L^*$ este densă cu atît mai mult în acel interval parțial.

Putem deci enunța condiții suficiente pentru construcția unei mulțimi $L^*$ care să satisfacă condițiile din (101):

1) $L^* \in (\mathcal{L})$, 2) $L \in (\mathcal{L})$, $L \subset L^*$, 3) $L^*$ posedă cîte un punct în orice mulțime perfectă nedensă $\pi$ și de măsură nenulă, $\text{mes}\,\pi > 0$.

Înainte de a trece la construcția unei mulțimi $L^*$ care să satisfacă condițiile (101), facem cîteva observații preliminare.

Fie $E_\pi^*$ familia tuturor mulțimilor perfecte nedense $\pi \in Q = [0, +\infty)$, pentru care avem relația (100), adică

$$\pi \in E_\pi^*, \quad \overline{E_\pi^*} = \aleph. \tag{102}$$

Folosind axioma alegerii putem bine-ordona familia $E_\pi^*$ într-un șir transfinit

$$S = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\rho, \ldots\}.$$

Fie $\omega_\alpha$ numărul inițial al clasei de numere ordinale de putere $\aleph_\alpha = \aleph$. In virtutea relațiilor (102), putem presupune că tipul de ordine al lui $S$ este $\omega_\alpha$[3]), așa dar avem $\rho < \omega_\alpha$.

Considerăm mulțimea numărabilă $L$ de clasă $(\mathcal{L})$ și să presupunem că există o mulțime $L'$, de clasă $\mathcal{L}$ astfel ca $L \subset L'$ și ca puterea lui $L'$ să

---

[1]) Propoziția este valabilă pentru orice mulțime de putere $\aleph_\beta$ inferioară puterii continuului.

[2]) O mulțime $A$ este, prin definiție, *complet nemăsurabilă* într-un interval $\Delta$, cînd $m_e A = \text{mes}\,\Delta$, $m_i' A = 0$, $A \subset \Delta$. O condiție necesară și suficientă pentru aceasta este ca $A$ și $cA$ să posede fiecare cîte un punct în orice mulțime perfectă $\pi$ de măsură nenulă [3].

[3]) $E$ fiind o mulțime de puterea $\aleph_\alpha$ și $\omega_\alpha$ numărul inițial al clasei lui Cantor $Z(\aleph_\alpha)$ de numere ordinale, putem bine-ordona pe $E$ ca mulțime de tipul $\omega_\alpha$. Nu avem, într-adevăr, decît să stabilim o corespondență biunivocă între $E$ și mulțimea numerelor ordinale inferioare lui $\omega_\alpha$, mulțime care are aceeași putere ca $E$.

fie inferioară puterii $\aleph$ a continuului. În baza propoziției (2°) $L'$ nu este saturată în $(\mathcal{L})$ și există o mulțime de valori $l''$ în $\triangle$, astfel ca $l'' \in \subset L'$ și ca $L'' = \{l''\} \cup L'$ să fie de clasă $(\mathcal{L})$. Or, putem alege pe $l''$, astfel ca el să aparțină unei mulțimi perfecte nedense, de măsură nenulă $\pi$, arbitrar dată. Intr-adevăr, ca $L'' \in (\mathcal{L})$ trebuie ca $l'' \in cT(L')$. Insă $cT(L')$ complementară față de $Q = (0 + \infty)$, nu este vidă, deoarece $T(L')$ are aceeași putere cu $L'$ (2°, § 3, III), mulțime care — prin ipoteză — are o putere mai mică decît puterea continuului sau decît puterea lui $Q$, pentru că $\overline{\overline{Q}} = \aleph$.

Or nu putem avea pentru $\pi_\rho \in S$

$$\pi_\rho \cap c\,T(L') = \varnothing$$

pentru că ar rezulta

$$\pi_\rho \subset T(L'),$$

ceea ce este imposibil, deoarece $\overline{\overline{\pi_\rho}} = \aleph$, pentru că $\pi_\rho$ este o mulțime perfectă, pe cînd am văzut că $\overline{\overline{T(L')}} < \aleph$.

*Există deci valori $l'' > 0$, astfel ca să avem simultan, pentru $\pi_\rho \in S$ dată arbitrar,*

$$l'' \in cT(L'), \quad l'' \in \pi_\rho, \tag{103}$$

*cu condiția ca $L'$ să aibă o putere inferioară puterii continuului.*

Putem deci alege, în acest caz, pe $l'' \in \pi_\rho$, care este o mulțime perfectă nedensă oarecare din $S$, astfel ca să avem $L \subset L' \subset L'' \in (\mathcal{L})$.

Să trecem apoi la construcția mulțimii $L^*$, care satisface relația (101).

Se dă $L \in (\mathcal{L})$, mulțime numărabilă [1]). Efectuăm un șir transfinit de alegeri succesive, păstrînd ordinea mulțimilor $\pi_\rho$ în $S$ și determinăm astfel un șir transfinit de valori $l^\rho > 0$ ($\rho$ indice superior), unde $\rho < \omega_\alpha$ pe de o parte, un șir transfinit, *crescător*, de mulțimi $L_\rho$ pe de alta.

Definim întîi $L_1 = \{l^1\} \cup L$, $l_1 \in \pi_1$ și continuăm apoi să definim în mod transfinit șirul de mulțimi $L_\rho$, procedînd cum urmează:

*a)* Fie $\rho$ un număr ordinal de prima speță și $\rho < \omega_\alpha$ ; atunci $\rho - 1$ există de asemenea. Presupunînd mulțimile $L_{\rho'}$ definite, pentru fiecare $\rho' \leqslant \rho - 1$, iar șirul bine ordonat al acestor mulțimi $L_{\rho'}$ crescător ($\rho' < \rho'' \to L_{\rho'} \subset L_{\rho''}$), apoi $L \subset L_{\rho'} \in (\mathcal{L})$, pentru $\rho' \leqslant \rho - 1$ și în sfîrșit $L_{\rho-1} < \aleph$, vom alege o valoare $l^\rho \in \pi_\rho$, după cum s-a indicat mai sus (103). Dar atunci $l^\rho \in cT(L_{\rho-1}) \subset cL_{\rho-1}$ și deci punînd $L_\rho = \{l_\rho\} \cup L_{\rho-1}$, completăm șirul de $L_{\rho'}$, pentru $\rho' \leqslant \rho$, iar șirul rămînînd crescător și $L_\rho \in (\mathcal{L})$.

*b)* Fie $\rho$ un număr ordinal de speța doua și $\rho < \omega_\alpha$. Definim $L_\rho = \bigcup_{\rho'} L_{\rho'}$, unde $\rho' < \rho$ și cum există numere ordinale $\rho' = \rho_i$, astfel ca $\rho = \lim \rho_i$, pentru $i = 1,2\ldots$, nu avem decît să aplicăm (30 § 1) pentru a deduce din faptul că șirul de mulțimi $L_{\rho'}$ este crescător, pentru $\rho' < \rho$, că $L \subset L_\rho \in (\mathcal{L})$. Cum $L_{\rho'} \subset L_\rho$, pentru fiecare $\rho' < \rho$, șirul de $L_{\rho'}$, pentru $\rho' \leqslant \rho$ rămîne crescător.

---

[1]) Se poate lua $L$, de putere $K\beta$ inferioară puterii continuului ($\aleph_\beta < \aleph$), adică $0 \leq \beta < \alpha$, unde $\aleph_\alpha = \aleph$ și raționamentul este același.

Principiul inducției transfinite permite deci să definim șirul de mulțimi $L_\rho$, cînd $\rho < \omega_\alpha$, cît timp există mulțimi $\pi_\rho$, în $S$ (103). Mulțimea de $l^\rho$ are, așa dar, aceeași putere cu mulțimea de $\pi_\rho$, adică puterea continuului sau puterea mulțimii numerelor ordinale de tip $\omega_\alpha$, care este numărul inițial, al clasei $Z$ ($\aleph$) de numere ordinale, al lui Cantor.

Definim mulțimea

$$L^* = \bigcup_\rho L_\rho, \quad \rho < \omega_\alpha$$

unde reuniunea este efectuată pentru toți indicii $\rho < \omega_\alpha$.

Mulțimea $L^*$ are în comun cu fiecare din mulțimile perfecte nedense $\pi_\rho$ din $S$, cel puțin un punct, în virtutea construcției efectuate (103) și avem $L \subset L^*$. Or, în virtutea propoziției (3°, § 1) rezultă $L^* \in (\mathcal{L})$, ceea ce completează condițiile suficiente 1, 2, 3, de mai sus pentru construcția unei mulțimi $L^*$, satisfăcînd condiției (101).

5°. *Orice mulțime $L$ numărabilă (sau de putere inferioară continuului) este inclusă într-o mulțime saturată în $(\mathcal{L})$ și complet nemăsurabilă în orice interval $\Delta$ de valori pozitive.*

Nu avem, într-adevăr, decît să construim (4°) o mulțime $L_1 \in (\mathcal{L})$ satisfăcînd condițiilor suficiente (101) și să observăm (3°), că există $L^*$, saturată în $(\mathcal{L})$ și astfel ca $L_1 \subset L^*$.

Avem $L \subset L^*$, pentru că $L \subset L_1$, $L_1 \subset L^*$ și deci

$$m_e (L_1 \cap \Delta) \leqslant m_e (L^* \cap \Delta) \leqslant \text{mes } \Delta.$$

Dar din condițiile (101) și 4° rezultă $m_e (L_1 \cap \Delta) = \text{mes } \Delta$ și deci $m_e (L^* \cap \Delta) = \text{mes } \Delta$. Or, $L^*$ este de clasă $(\mathcal{L})$, ca și $L_1$ și avem deci (5°, § 1), $m_i L^* = 0$, prin urmare $m_i (L^* \cap \Delta) = 0$ și $L^*$ satisface condițiilor (101).

### § 3. Mulțimea de includere R.

1°. *Mulțimea $R$ a valorilor raționale pozitive nu este de clasă $(\mathcal{L})$.*

Este suficient să observăm că există o mulțime cu distanțe inegale, luate în $R$ și care nu este minimală.

Se poate lua, de exemplu,

$$E^* = \{P_0, P_1, P_2\} \subset \mathcal{E}^1, \qquad x_0^1 = 0, \; x_1^1 = 1, \; x_2^1 = 3,$$

pentru că $D(E^*) = \{1,2,3\}$ și $E^*$ are 3 puncte, în loc de 2, cît ar trebui să aibă dacă ar fi o mulțime minimală, de dimensiune 1. In consecință, cum $D(E^*) \subset R$ rezultă că mulțimea de includere $R$ nu este de clasă $(\mathcal{L})$ [1]).

---

[1]) Să dăm și un exemplu de mulțime $E^* \subset \mathcal{E}^2$, $D(E^*) \subset R$: Punem $E^* = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$. Coordonatele $(x^1, x^2)$ ale punctelor din $E^*$ sînt respectiv:
$P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (65, 0)$, $P_2 = (720/13, 300/13)$, $P_3 = (208/5, 156/5)$.
Avem deci $D(E^*) = \{65, 25, 16, 52, 39, 60\}$, calculînd distanțele ((1), § 1, I). Dar $E^*$ are dimensiunea $n = 2$, în timp ce numărul punctelor sale este $p = 4$, deci cum $p \neq n + 1$, $E^*$ nu este minimală, ceea ce dovedește că mulțimea $R$ de includere a distanțelor nu este de clasă $(\mathcal{L})$. Pentru cazul mulțimii $R$, se poate vedea, în ceea ce privește posibilitatea de construcție a mulțimilor $E$, pentru care $D(E) \subset R$, lucrările [2], [4].

*Observație.* Există mulțimi $E \subset \mathcal{E}^1$ cu distanțe inegale, luate în $R$, care sînt chiar numărabile [1]). Or, s-a văzut (1°, §2, II) că deoarece $D(E) \subset R$, mulțimea $E$ trebuie să fie cel mult numărabilă. Se poate chiar defini, folosind alegeri succesive, o mulțime $E \subset \mathcal{E}$ la distanțe inegale, luate în $R$ și densă în $\mathcal{E}^1$ [2]). Dimpotrivă, nu se știe, dacă există sau nu, o mulțime $E \subset \mathcal{E}^{(n)}$, astfel că $D(E) \subset R$ și densă în $\mathcal{E}^{(n)}$, cînd $n \geqslant 2$ (nici dacă s-ar renunța la condiția ca $E$ să fie cu distanțe inegale).

## МНОЖЕСТВА РАССТОЯНИЙ В ПОЛНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

1. Пусть $P$ — упорядоченный комплекс действительных чисел $x_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, содержащий не больше одного конечного числа, ненулевых, $\mathcal{E}$ — множество $P$, $E$ — множество такое, что $E \subset \mathcal{E}$. Положим $d(P_1 P_2) = |[\sum (x_2^j - x_1^j)^2]^{1/2}|$ при $P_1 \in E, P_2 \in E$; множество расстояний $d(P_1, P_2)$ при $P_1 \neq P_2$ будет обозначено через $D(E)$. Назовем $\mathcal{E}$ полным евклидовым пространством, $P \in \mathcal{E}$ точкой из $\mathcal{E}$, $d(P_1, P_2)$ расстоянием (евклидовым) между $P_1$ и $P_2$, $D(E)$ множеством расстояний от $E$.

Будем говорить, что $E$ находится на неравных расстояниях, если существует двузначное соответствие между $D(E)$ и множеством пар $(P_1, P_2)$ точек из $E$. Множество $L$ положительных значений, плотное в интервале $Q$ положительных значений $(0, +\infty)$, будем называть множеством включения.

Будем называть в $\mathcal{E}$ вектор $\overline{P_1 P_2}$ (обозначенный также через $\overline{V}$) комплексом значений, $(x_2^j - x_1^j)$, указанных выше присоединенных к паре $(P_1, P_2)$ точек из $\mathcal{E}$. Конечная система $W$ векторов $\overline{V}$ обладает рангом $q < \aleph$, максимальным числом векторов $\overline{V}$ из $W$, линейно независимых относи-

[1]) Iată un exemplu: Fie dat un șir numărabil de numere prime absolute $p_r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ crescător cu $r$. Definim $E_1 \subset \mathcal{E}^1$ ca mulțimea punctelor $P_r$, astfel ca $x_r^1 = \Sigma q_i$, $q_i = 1/p_i$, $i \leqq r$.

Avem $D(E_1) \subset R$ și vedem ușor că

$$d(P_r, P_s) = d(P_{r'}, P_{s'}),\ r \leqslant s,\ r' \leqslant s' \rightleftarrows x_s^1 - x_r^1 = x_{s'}^1 - x_{r'}^1 \rightleftarrows r = r', s = s' \rightleftarrows P_r = P_{r'},\ P_s = P_{s'}.$$

[2]) Fie $\Delta_h$ $(h = 1, 2, \ldots)$ unul din intervalele $I_j$ definite într-un exemplu anterior (§ 1, IV) sau unul din simetricele acestor $I_j$, față de punctul-origine $O$, iar $R^*$ șirul enumerat al tuturor valorilor raționale: $r_1, r_2, \ldots, r_m, \ldots$. Definim $E \subset \mathcal{E}^1$, alegînd $P_h \in \Delta_h$ succesiv. Fie $x_h^1$ coordonata punctului $P_h$ în $\mathcal{E}^1$.

Avem, succesiv, pentru $h = 1, 2, \ldots$

$$x_h^1 \in [R^* \cap \Delta_h \cap cX_{h-1}];\ X_{h-1} = \bigcup_{p,q} G_{pq};\ (p < h,\ q < h,\ p \neq q),$$

$$G_{pq} = \left\{ x_p^1, x_q^1, \frac{1}{2}(x_p^1 + x_q^1), 2x_p^1 - x_q^1, 2x_q^1 - x_p^1 \right\}. \tag{104}$$

Or, $x_h^1$ trebuie să existe, pentru fiecare $h$, căci în (104) mulțimea $R^* \cap \Delta_h$ are puterea $\aleph_0$, pe cînd $X_{h-1}$ este finită sau vidă și $cX_{h-1}$ evită punctele deja definite și apariția distanțelor egale, în alegerea succesivă a punctelor $P_h$. Or, prin definiție, intervalele $I_j$ formează un șir $(D)$, deci șirul de intervale $\Delta_h$ este de asemenea dens în $(-\infty, +\infty)$ și tot astfel mulțimea $E$ a valorilor $x_h^1 \in \Delta_h$ este densă în $\mathcal{E}^1$.

тельно действительных чисел, определенным как в $n$-мерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}^{(n)}$. Для конечного или неконечного множества $W$ векторов $\overline{V}$ в $\mathcal{E}$ определяем размерность $r \leqq \aleph$, как верхнюю границу рангов $q$ конечных подмножеств, принадлежащих $W$.

Пусть дано $E \subset \mathcal{E}$; множество W ненулевых векторов $\overline{P_1P_2}$ таких, что $P_1 \in E$, $P_2 \in E$ будет обозначено $W(E)$ и размерность, принадлежащая $W$ $(E)$будет называться размерностью множества $E$. Множество $E$ из $\mathcal{E}$ будем называть минимальным, если каждое из его конечных подмножеств имеет размерность, которая при упразднении точки уменьшается на единицу. Посредством полной индукции доказываем, что размерность минимального $E$ является либо $n < \aleph_0$, если $E$ есть множество $n+1$ точек, либо $\aleph_0$, если $E$ есть $\aleph_0$ точек.

Множество $E$ из $\mathcal{E}$ есть не более чем счетное, если $D(E)$ не более чем счетное (и обратно). Отметим, что в $\mathcal{E}$ существуют множества $E$, такие, что $D(E)$ сводится к одному значению $a$, причем $E$ будет все же счетным, что не имеет места в $\mathcal{E}^{(n)}$. Для данных множества включения $L$ и размерности $r$ существуют в $\mathcal{E}$ минимальные множества $E$ с размерностью $r$ и расстояниями (неравными), взятыми в $L$.

*Задача.* Множество $E$ из $\mathcal{E}$ с неравными расстояниями и такое, что $D(E) \subset L$; что можно утверждать относительно $E$ при данном $L$. Можно различить класс $(\mathcal{L})$ множеств включений $(L)$ таких, что $E$ в силу условия $D(E) \subset L$ будет минимальным и, если это возможно, спрашивается, какими будет свойства этого класса $(\mathcal{L})$?

Для того чтобы ответить на эти вопросы устанавливаются:

## II. *Подсобные свойства.*

Между двумя множествами $E, E^*$ от $\mathcal{E}$ имеется изометрия, если существует двузначное соответствие, сохраняющее расстояние между соответствующими точками. Доказываем, что изометрия сохраняет размерность множеств от $\mathcal{E}$.

Пусть $H$ множество положительных величин. Будем говорить, что $E$ берет свои расстояния в $H$, если $D(E) \subset H$.

Пусть $E_1^n, E_2^n$ минимальных множеств с точками $n+1$, каждое с неравными расстояниями и берущее свои расстояния в данном $H$. Будем кроме того полагать, что $E_1^n \cup E_2^n = R_{12}^n$ с размерностью $n$ и $E_1^n \cap E_2^n = S_{12}^{n-1}$ (их общая опора) с $n$ точками и $D(E_1^n) \cap D(E_2^n) = D(S_{12}^{n-1})$

Пусть $P_1 \in E_1^n \cap c(S_{12}^{n-1})$ соответственно $P_2 \in E_2^n \cap c(S_{12}^{n-1})$ суть вершины от $E_1^n$ соответственно от $E_2^n$. Полагаем $t_{12}^n = d(P_1, P_2)$; это есть расстояние вершин принадлежащих $E_1^n$. Пусть $T'(H)$ — множество возможных величин от $t_{12}^n$ (в этих гипотезах), при $n = 1,2\ldots$, которое может быть и пустым. Назовем $T(H) = H \cup T'(H)$ множеством выключения, присоединенным к $H$. Получаем :

Множество выключения $T(H)$, присоединенное к $H$, конечно (соответственно счетное) если данное множество $H$ положительных величин конечно (соответственно счетное). Множества $H$ и $T(H)$ имеют такую же мощность, если $H$ бесконечно.

III. *Класс* $(\mathfrak{L})$ *множеств включения* $L$.

С помощью предыдущих свойств доказываем:

*Можно определить счетное множество включения* $L$, *такое, что любое множество* $E \subset \mathfrak{E}$ *с неравными расстояниями, взятыми в* $L$, *будет минимальным.*

Множество включения $L$ есть класса $(\mathfrak{E})$, если любое множество $E \subset \mathfrak{E}$ с неравными расстояниями минимально и если оно берет свои расстояния в $L$. Полагая $Q=(0,+\infty)$, определяем: $E \subset \mathfrak{E}^{(1)}$ является полностью неизмеримым в интервале $\Delta \subset Q$, если внешние меры E и его дополнение с $E$ в $\Delta$ равны *mes* $\Delta$ (меры в смысле Бореля-Лебега). Будем говорить, что множество класса $(\mathfrak{L})$ насыщено в $(\mathfrak{L})$, если при добавлении к нему любого значения $l \in Q$, оно не будет больше принадлежать к $(\mathfrak{L})$. Получаем:

*Любое подмножество, плотное в* $Q$ *множества класса* $(\mathfrak{L})$ *есть класса* $(\mathfrak{L})$. *Множество* $E \subset Q$, *плотное в* $Q$, *имеет всегда подмножество класса* $(\mathfrak{L})$. *Множество класса* $(\mathfrak{L})$, *счетное (или меньшей мощности в непрерывном), есть всегда подмножество множества* $L^*$, *насыщенное в* $(\mathfrak{L})$ *и являющееся полностью неизмеримым в любом интервале* $\Delta \subset Q$. *Дополнение относительно к* $Q$ *множества класса* $(\mathfrak{L})$ *есть второй категории (Бэра) в любом* $\Delta \subset Q$.

*Пусть* $R$ *множество рациональных величин от* $Q$, *причем множество* $R$ *не принадлежит классу* $(\mathfrak{L})$.

## ENSEMBLES DE DISTANCES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN TOTAL

(RÉSUMÉ)

I. *Préliminaires.* Soit $P$, un complexe ordonné de nombres réels $x^j$, $(j = 1,2,\ldots)$, dont tout au plus un nombre fini, différents de zéro, $\mathfrak{E}$ l'ensemble des $P$, $E$ un ensemble tel que $E \subset \mathfrak{E}$. On pose $d(P_1, P_2) = \left|\left[\sum_j (x_2^j - x_1^j)^2\right]^{1/2}\right|$, pour $P_1 \in E$, $P_2 \in E$, l'ensemble des $d(P_1, P_2)$ pour $P_1 \neq P_2$ sera désigné par $D(E)$. On appelle $\mathfrak{E}$ *l'espace euclidien total,* $P \in \mathfrak{E}$, point de $\mathfrak{E}$, $d(P_1, P_2)$ *distance* (euclidienne) de $P_1$ à $P_2$, $D(E)$, *ensemble des distances* de $E$.

On dit que $E$ est à *distances inégales*, lorsqu'il y a une correspondance biunivoque entre $D(E)$ et l'ensemble des paires $(P_1, P_2)$ de points de $E$. Un ensemble $L$ de valeurs positives, dense dans l'intervalle $Q$ des valeurs positives $(0,+\infty)$ est appelé *ensemble d'inclusion.*

On appelle, en $\mathfrak{E}$, *vecteur* $\overline{P_1 P_2}$ (noté aussi $\overline{V}$) le complexe des valeurs $(x_2^j - x_1^j)$ ci-dessus, attaché à une paire $(P_1, P_2)$ de points de $\mathfrak{E}$. Un système fini $W$ de vecteurs $\overline{V}$ possède un *rang* $q < \aleph_0$, nombre maximum de vecteurs de $W$, linéairement indépendants par rapport aux nombres réels, défini comme dans l'espace euclidien $\mathfrak{E}^{(n)}$, à $n$ dimensions. Pour un ensemble $W$, fini ou non, de vecteurs $\overline{V}$ en $\mathfrak{E}$, on définit la *dimension* $r \leqslant \aleph_0$, comme la borne supérieure des rangs $q$, des sous-ensembles finis de $W$.

Soit $E \subset \mathfrak{E}$; l'ensemble $W$ des vecteurs non nuls $\overline{P_1 P_2}$, tels que $P_1 \in E$-$P_2 \in E$ sera noté $W(E)$ et l'on appelle *dimension de l'ensemble* $E$, la dimension de $W(E)$.

Un ensemble $E$ de $\mathcal{E}$ est dit *minimal*, lorsque chacun de ses sous-ensembles finis a une dimension qui diminue de 1, lorsqu'on en supprime un point. Par induction complète, on prouve que *la dimension d'un E minimal est soit* $n < \aleph_0$ *lorsque E est un ensemble à* $n+1$ *points, soit* $\aleph_0$, *lorsque E est à* $\aleph_0$ *points.*

*Un ensemble E de* $\mathcal{E}$ *est au plus dénombrable, lorsque D (E) est au plus dénombrable* (et réciproquement). On remarque qu'il existe en $\mathcal{E}$ des ensembles $E$, tels que $D(E)$ se réduise à une seule valeur $a$, $E$ étant toutefois dénombrable, ce qui n'a pas lieu dans $\mathcal{E}^{(n)}$.

*Pour un ensemble d'inclusion L et une dimension r donnés, il existe en* $\mathcal{E}$ *des ensembles minimaux E, à dimension r et aux distances (inégales) prises en L.*

*Problème*: Un ensemble $E$ de $\mathcal{E}$, à distances inégales, est tel que $D(E) \subset L$, que peut-on affirmer au sujet de $E$, lorsque $L$ est donné? Peut-on distinguer une classe $(\mathcal{L})$ d'ensembles d'inclusion $L$, tels que la condition $D(E) \subset L$ oblige $E$ à être minimal et, si cela est possible, quelles sont les propriétés de cette classe $(\mathcal{L})$?

Afin de donner une réponse à ces questions, on établit des

II. *Propriétés auxiliaires.* Entre deux ensembles $E, E^*$ de $\mathcal{E}$ il y a *isométrie*, lorsqu'il existe une correspondance biunivoque, conservant la distance entre des points correspondants. On prouve que *l'isométrie conserve la dimension des ensembles de* $\mathcal{E}$.

Soit $H$ un ensemble de valeurs positives. On dit que *E prend ses distances en H*, lorsque $D(E) \subset H$.

Soient $E_1^n, E_2^n$ des ensembles minimaux à $n+1$ points, chacun à distances inégales et prenant ses distances en $H$ donné. On suppose, de plus, que $E_1^n \cup E_2^n = R_{12}^n$ a la dimension $n$, $E_1^n \cap E_2^n = S_{12}^{n-1}$ (leur *support commun*) est à $n$ points et $D(E_1^n) \cap D(E_2^n) = D(S_{12}^{n-1})$.

Par conséquent, soit $P_1 \in E_1^n \cap c(S_{12}^{n-1})$ resp. $P_2 \in E_2^n \cap c(S_{12}^{n-1})$, ce sont les *sommets* de $E_1^n$, resp. de $E_2^n$. On pose $t_{12}^n = d(P_1, P_2)$, c'est la *distance des sommets* des $E_1^n, E_2^n$. Soit $T'(H)$ l'ensemble des valeurs possibles de $t_{12}^n$ (dans ces hypothèses) pour $n = 1,2, \ldots$, ensemble qui peut même être vide. On appelle $T(H) = H \cup T'(H)$, l'ensemble d'exclusion, attaché à $H$. On a

*L'ensemble d'exclusion T (H), attaché à H est fini (resp. dénombrable), lorsque l'ensemble donné H, de valeurs positives est fini (resp. dénombrable). Les ensembles H et T (H) ont une même puissance, lorsque H este infini.*

III. *Classe* $(\mathcal{L})$ *d'ensembles d'inclusion L.*

A l'aide des propriétés précédentes, on démontre que:

*On peut définir un ensemble d'inclusion L dénombrable, tel que tout ensemble* $E \subset \mathcal{E}$, *aux distances inégales, prises en L, soit minimal.*

Un ensemble d'inclusion $L$ est *de classe* $(\mathcal{L})$, lorsque tout ensemble $E \subset \mathcal{E}$, aux distances inégales, est minimal, s'il prend ses distances en $L$. En posant $Q = (0, +\infty)$, on définit: $E \subset \mathcal{E}^{(1)}$ est *complètement non mesurable* dans l'intervalle $\Delta \subset Q$, lorsque les mesures extérieures de $E$ et de son complémentaire $cE$ en $\Delta$, sont égales à *mes* $\Delta$ (la mesure au sens de Borel-Lebesgue). On dit qu'un ensemble de classe $(\mathcal{L})$ est *saturé* en $(\mathcal{L})$, lorsqu'en y ajoutant une valeur quelconque $l \in Q$, il cesse d'appartenir à $(\mathcal{L})$. On a

*Tout sous-ensemble, dense en $Q$, d'un ensemble de classe $(\mathfrak{L})$ est de classe $(L)$. Un ensemble $E \subset Q$, dense en $Q$, possède toujours un sous-ensemble, qui est de classe $(\mathfrak{L})$. Un ensemble de classe $(\mathfrak{L})$, dénombrable (ou de puissance inférieure au continu) est toujours un sous-ensemble d'un ensemble $L^*$ saturé en $(\mathfrak{L})$ et qui est complétement non mesurable dans tout intervalle $\Delta \subset Q$. Le complémentaire, par rapport à $Q$, d'un ensemble de classe $(\mathfrak{L})$ est de la seconde catégorie (de Baire) dans tout $\Delta \subset Q$.*

*Soit $R$ l'ensemble des valeurs rationnelles de $Q$, l'ensemble $R$ n'est pas de classe $(\mathfrak{L})$.*

## BIBLIOGRAFIE

1. Anning N. H. a. Erdös P., Bull. Amer. Math. Society, 1945, vol. 51, p. 599.
2. Carmichael R. D., *Analyse indéterminée*. Presses Univ. de France, Paris, 1929, p. 10.
3. Froda Alex., Bull.Math. de la Société Roumaine des Sci., 1936, t. 38, vol. 2, p. 93—94.
4. Lehmer N., Annals of Math., 1899, vol. I, p. 97.
5. Piccard S., C. R. de l'Acad. des Sci., Paris, 1940, t. 210, p. 780 — 783.
6. Sierpinski W., *Algèbre des ensembles*. Varşovia, 1951, p. 132.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul V, nr. 1—2, 1954

# FUNCŢII DE MULŢIME ŞI INTEGRALELE LOR

DE

C. T. IONESCU TULCEA

## Introducere

Integralele Riemanniene ale unei funcţii $g$ în raport cu o măsură $\mu$ se introduc ca limite ale sumelor

$$\sum_i \mu(X_i)\, g(X_i) \qquad (*).$$

O schemă generală, pentru construirea acestor integrale, aplicabilă nu numai funcţiilor de punct dar şi funcţiilor de mulţime, a fost dată de Kolmogorov 1. Pentru o funcţie de mulţime $f$, Kolmogorov consideră sumele

$$\sum f(X_i) \qquad (**)$$

şi defineşte intergralele ca limitele acestor sume. O integrală de acelaşi tip pentru funcţii de interval a fost definită mai înainte de Burkill. Dacă $f(X) = \mu(X)\, g(X)$ integralele obţinute se reduc la integralele clasice.

Kolmogorov şi Burkill iau limitele sumelor (**) după filtrele de secţiuni ale mulţimilor de partiţiuni considerate sau după filtrele formate cu diviziunile de normă mai mică sau egală cu $\delta$. Dacă aceste filtre sînt înlocuite prin filtre mai fine, evident, integralele obţinute sînt mai generale. O extensie în această direcţie a fost dată recent de Cotlar şi Fraenkel [7]. O extensie în altă direcţie este datorită lui Rickart [25] care a definit integrale pentru funcţii de mulţime ale căror valori sînt părţi ale unui spaţiu local convex. Menţionez cu această ocazie integrala introdusă de Destouches şi studiată de Nycodim [20] şi care a fost utilizată în probleme de fizică. Integralele funcţiilor de mulţime apar şi în diferite probleme de analiză clasică, de exemplu în definirea lungimii unei curbe sau a ariei unei suprafeţe.

În această lucrare se definesc şi se studiază integrale pentru funcţii de mulţime ale căror valori sînt părţi ale unui semigrup uniform, în care operaţia de compoziţie $(x, y) \to x + y$ este uniform continuă. Integralele lui Kolmogorov, Rickart cît şi integralele definite de Cotlar şi Fraenkel cu filtre sînt cazuri particulare. Integralele sînt definite după anumite filtre date pe sisteme algebrice cari schematizează şi rezumează

proprietăţile esenţiale ale sistemelor de partiţiuni care sînt utilizate în definiţia integralei.

În prima parte a lucrării sînt introduse semigrupurile uniforme. În a doua parte este dată o condiţie necesară şi suficientă de continuitate absolută. În partea a treia sînt studiate integrale aditive, iar în partea a patra integrale complet aditive. În ultima parte a lucrării este definită o integrală de tipul integralei lui Rickart şi o integrală slabă care generalizează integrala introdusă de Pettis şi Gelfand.[1])

[1]) Parte din lucrare a fost prezentată în seminariile de calculul probabilităţilor conduse de prof. O. Onicescu, care a dat mai multe sugestii atît în ceea ce priveşte redactarea cît şi rezultatele obţinute.

# I. SEMIGRUPURI UNIFORME, FUNCȚII ȘI LIMITE

## § 1. Semigrupuri uniforme

### 1. Definiții. Exemple

Fie $G$ un *semigrup abelian* avînd un element unitate notat O, adică o mulțime $G$ pe care s-a definit o lege de compoziție $(x, y) \to x + y$ care satisface condițiile:

$1^\circ \quad x + y = y + x;$

$2^\circ \quad (x + y) + z = x + (y + z);$

$3^\circ \quad x + 0 = x.$

Presupunem încă, dată pe $G$, o structură uniformă separată, al cărei filtru de împrejurimi îl vom nota $\mathfrak{U}$ și care are proprietatea:

($c$) *pentru orice împrejurime* $U \in \mathfrak{U}$ *există o împrejurime* $W \in \mathfrak{U}$ *care satisface relația*

$$W + W \subset U$$

Din proprietatea ($c$) rezultă imediat că pentru orice împrejurime $U$ și mulțime de indici $I$, numărabilă, există o familie de împrejurimi $(W_i)_{i \in I}$ care pentru orice parte finită $I'$ a lui $I$, verifică relația

$$\sum_{i \in I'} W_i \subset U.$$

În cele ce urmează vom numi *semigrup uniform*, o mulțime $G$ pe care s-a definit două structuri, una de semigrup abelian cu element unitate și una de spațiu uniform separat, cu proprietatea ($c$).

Se demonstrează fără dificultate că proprietatea ($c$) este echivalentă cu:

($c'$) *aplicația* $(x, y) \to x + y$ *a produsului* $G \times G$ *în* $G$ *este uniform continuă pentru structura uniformă produs* $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$.

Într-adevăr

($c$) $\to$ ($c'$). Fie $U \in \mathfrak{U}$ și fie $W \in \mathfrak{U}$ o împrejurime care satisface relația

$$W + W \subset U.$$

Dacă perechile $(x, y)$ și $(x', y')$ sînt vecine de ordin $U(W,W)$ [1]), atunci sumele $x + y$ și $x' + y'$ sînt vecine de ordin $W + W$ și deci de ordin $U$. Deci aplicația $(x, y) \to x + y$ este uniform continuă pentru structura uniformă produs

($c'$) $\to$ ($c$). Fie $U \in \mathfrak{U}$ și fie $U(W, W)$ o împrejurime a structurii uniforme produs $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$ pentru care sumele $x + y$ și $x' + y'$ sînt vecine de ordin $U$ dacă perechile $(x, y)$ și $x', y')$ sînt vecine de ordin $U(W,W)$; deci dacă $(x, x') \in W$ și $(y, y') \in W$, $x + y$ și $x' + y'$ sînt vecine de ordin $U$ și deci

$$W + W \subset U$$

---

[1]) Notăm pentru $W \in \mathfrak{U}$, cu $U(W,W)$ împrejurimea

$$\{((x, y), (x', y')) \mid (x, x') \in W, (y, y') \in W\}$$

Cînd $W$ parcurge filtrul $\mathfrak{U}$, împrejurimile $U(W,W)$ formează o bază a filtrului de împrejurimi al structurii uniforme produs $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$.

*Exemple* 1) Fie $G$ un grup abelian topologic şi separat. Operaţia de grup şi structura uniformă bilateră corespunzătoare, definesc pe $G$ o structură de semigrup uniform.

2) Fie $G$ un semigrup abelian cu element unitate şi fie $d$ o distanţă pe $G$. Dacă legea de compoziţie semigrupului. $(x, y) \to x + y$, este *absolut stabilă* [30] adică dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încît, oricare ar fi familiile finite $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ şi $(y_\alpha)_{\alpha \in I}$ de elemente din $G$ inegalitatea

$$\sum_{\alpha \in I} d(x_\alpha, y_\alpha) \leqslant \delta_\varepsilon$$

implică

$$d(\sum_{\alpha \in I} x_\alpha, \sum_{\alpha \in I} y_\alpha) \leqslant \varepsilon,$$

atunci structura de semigrup abelian cu element unitate şi structura de spaţiu uniform separat, corespunzătoare distanţei $d$, definesc pe $G$ o structură de semigrup uniform. Este suficient să observăm că stabilitatea absolută a legii de compoziţie, $(x, y) \to x + y$, implică continuitatea uniformă pentru structura uniformă produsă şi deci proprietatea $(c')$.

Dacă $G$ este un grup abelian topologic, metrizabil şi $d$ o distanţă invariantă [1]). compatibilă cu topologia grupului, operaţia de compoziţie este absolut stabilă.

3). Luăm un grup topologic separat în care am notat legea de compoziţie prin simbolul $\top$ şi notăm cu $G$ mulţimea părţilor închise ale grupului.

Legea de compoziţie

$$(X, Y) \to X + Y$$

în care

$$X + Y = \overline{X \top Y}$$

defineşte pe $G$ o structură de semigrup abelian cu element unitate [2]). Elementul unitate al semigrupului este mulţimea închisă $X = \{0\}$.

Fie $\widetilde{\mathfrak{U}}$ filtrul generat de mulţimile

$$\widetilde{V} = \{(X, Y) \mid X \subset V \top Y,\ Y \subset V \top X\}$$

cînd $V$ parcurge filtrul vecinătăţilor elementului unitate în grupul considerat. $\widetilde{\mathfrak{U}}$ defineşte pe $G$ o structură uniformă separată. Vom arăta că $\widetilde{\mathfrak{U}}$ satisface condiţia $(c)$ şi deci vom arăta că $G$ este un semigrup uniform.

Fie $\widetilde{U}$ o împrejurime, iar $W$ şi $V$ două vecinătăţi ale originei care verifică relaţia

$$W \top W \top V \subset U.$$

---

[1]) $d$ este invariantă dacă $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ pentru orice elemente $x, y, z$ din $G$.

[2]) Comutativitatea operaţiei $(X, Y) \to X + Y$ este evidentă.
Asociativitatea se deduce din egalitatea

$$\overline{X \top \overline{Y \top Z}} = \overline{X \top Y \top Z} = \overline{X \top \overline{Y \top Z}}$$

Fie $Z$ și $Z'$ două elemente vecine din $G$ de ordin $\widetilde{W} + \widetilde{W}$; atunci

$$Z = X + Y \quad \text{și} \quad Z' = X' + Y'$$

în care $X$ și $X'$ și respectiv $Y$ și $Y'$ sînt vecine de ordin $\widetilde{W}$.

Urmează

$$X \subset W \top X' \ , \quad X' \subset W \top X$$

și

$$Y \subset W \top Y' \ , \quad Y' \subset W \top Y$$

și deci

$$X \top Y \subset W \top W \top (X' + Y')$$

și

$$X' \top Y' \subset W \top W \top (X + Y),$$

întrucît

$$X' \top Y' \subset X' + Y' \quad \text{și} \quad X \top Y \subset X + Y.$$

Deci

$$X + Y \subset W \top W \top (X' + Y') \subset W \top W \top V \top (X' + Y') \subset U \top (X' + Y')$$

și

$$X' + Y' \subset U \top (X + Y).$$

Prin urmare $X + Y$ și $X' + Y'$ sînt vecine de ordin $\widetilde{U}$; deci proprietatea ($c$) este satisfăcută.

*Observație.* Acest exemplu de semigrup uniform va fi utilizat în capitolul al V-lea în studiul integralelor multiforme introduse de Rickart [25].

### 2. Grupuri ordonate

Un grup abelian $G$, pe care este dată o relație de ordine, compatibilă cu operația de grup se numește *grup abelian ordonat.* Într-un grup abelian ordonat:

relațiile $x \leqslant y$ și $x + z \leqslant y + z$ sînt echivalente.

relațiile $x \leqslant y$ și $-x \geqslant -y$ sînt echivalente.

$x \geqslant 0$ implică $nx \geqslant o$ pentru $n \in N$.

Într-un grup abelian ordonat, vom nota $G_+$, mulțimea elementelor $\geqslant 0$.

Un *grup abelian topologic separat* pe care s-a definit o relație de ordine compatibilă cu operația de grup se numește *grup topologic ordonat* dacă:

$\alpha^\circ$) $G_+$ este închisă;

$\beta^\circ$) pentru orice parte $H \subset G_+$ filtrantă pentru relația $\leqslant$ și majorată, filtrul secțiunilor mulțimii $H$ este convergent.

Se demonstrează fără dificultate că pentru orice parte $H \subset G$, filtrantă pentru relația $\leqslant$ și majorată, filtrul secțiunilor mulțimii $H$ este convergent și

$$\lim_{x \in H} x = \sup H$$

de asemenea pentru orice parte $H \subset G$, filtrantă pentru relația $\geqslant$ și minorată, filtrul secțiunilor este convergent și

$$\lim_{x \in H} x = \inf H.$$

Prin urmare, într-un grup topologic ordonat, orice mulțime H, filtrantă pentru relația $\leqslant$ și majorată (respectiv filtrantă pentru relația $\geqslant$ și minorată) are o margine superioară, (respectiv inferioară).

### 3. Familii sumabile în semigrupuri uniforme

Fie $I$ o mulțime de indici și fie $\pi(I)$ mulțimea părților finite ale lui $I$ $\pi$ $(I)$ este filtrantă pentru relația de incluziune $\subset$. Fie $G$ un semigrup uniform și $(x_i)_{i \in I}$ o familie de elemente din semigrupul $G$. Pentru orice parte finită $J \in \pi(I)$ să punem

$$S_j = \sum_{j \in J} x_j$$

Definiția 1. *Familia $(x_i)_{i \in I}$ este sumabilă*[1]) *dacă aplicația*

$$J \to s_j$$

*are o limită după filtrul secțiunilor mulțimii $\pi$ $(I)$. Limita se numește suma familiei și se notează*

$$\sum_{i \in I} x_i$$

Familiile sumabile sînt introduse și studiate în lucrarea lui Bourbaki (*Grupuri topologice*). Vom da mai jos o propoziție care va fi utilizată mai tîrziu și care corespunde teoremei 2 (asociativitatea sumei) din lucrarea menționată.

Propoziția 1. *Fie $(x_i)_{i \in I}$ o familie sumabilă și $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ o partiție a lui I. Dacă fiecare familie $(x_i)_{i \in J_\lambda}$ este sumabilă, atunci familia*

$$\left(\sum_{i \in J_\lambda} x_i\right)_{\lambda \in L}$$

*este sumabilă și*

$$\sum_{\lambda \in L} \left(\sum_{i \in J_\lambda} x_i\right) = \sum_{i \in I} x_i$$

Fie $U$ o împrejurime a structurii uniforme a semigrupului uniform $G$ și $K \subset I$ o parte finită, pentru care

$$\left(\sum_{i \in J} x_i, \sum_{j \in I} x_i\right) \in U$$

dacă $J \in \pi(I)$ și $J \supset K$. Fie $H$ o mulțime finită de indici $\lambda$, pentru care

$$\bigcup_{\lambda \in H} J_\lambda \supset K$$

[1]) Noțiunea de familie sumabilă coincide, cînd $I$ este o mulțime numărabilă, cu noțiunea de *serie necondiționat convergentă* introdusă în [22].

Atunci dacă $M \supset H$,

$$(\sum_{\lambda \in M} (\sum_{i \in J_\lambda} x_i)\ ,\ \sum_{i \in I} x_i) \in \overline{U}$$

și cum împrejurimile $\overline{U}$ formează o bază a filtrului de împrejurimi al structurii uniforme a semigrupului $G$, urmează că familia

$$(\sum_{i \in J_\lambda} x_i)_{\lambda \in L}$$

este sumabilă și are ca sumă

$$\sum_{i \in I} x_i$$

*Observație.* Dacă $G$ este un grup abelian topologic separat, complet pentru structura uniformă bilateră, atunci sumabilitatea fiecărei familii $(x_i)_{i \in} J_\lambda$ este o consecință a sumabilității familiei $(x_i)_{i \in I}$.

Definiția 2. *O familie $(x_i)_{i \in I}$ de părți ale semigrupului uniform $G$ este sumabilă dacă:*

1° *fiecare familie $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ este sumabilă*

2° *dacă*

$$X = \{\sum_{i \in I} x_i \mid (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i\},$$

*pentru fiecare împrejurime* U *există o parte finită $J \in \pi(I)$, pentru care*

$$(\sum_{i \in H} X_i, X) \in \widetilde{U}\ ^1)$$

*oricare ar fi $H \in \pi(I), H \supset J$.*

Dacă familia $(X_i)_{i \in I}$ $I$ este sumabilă, putem scrie

$$X = \sum_{i \in I} X_i$$

și vom numi mulțimea $X$, suma familiei $(X_i)_{i \in I}$.

*Observații. a*) Dacă pentru fiecare $i \in I$, $X_i = \{x_i\}$, familia $(X_i)_{i \in I}$ este sumabilă și

$$\sum_{i \in I} X_i = \{x\}$$

dacă și numai dacă familia $(x_i)_{i \in I}$ este sumabilă și

$$\sum_{i \in I} x_i = x$$

*b*). Cînd $G$ este un grup, condiția 2° este implicată de condiția 1°, [4]. Este suficient pentru aceasta să arătăm că dacă $V$ este o vecinătate a elementului unitate al grupului $G$, există o parte finită $J \in \pi(I)$ pentru care

$$\sum_{i \in H} x_i \subset V$$

---

[1]) Pentru orice împrejurime $U$,

$$\widetilde{U} = \{(X, Y) \mid X \subset U(Y),\ Y \subset U(X)\}.$$

dacă $H \in \pi(I)$ şi $H \cap J = \varnothing$. Verificarea acestei proprietăţi este însă imediată, întrucît în caz contrar ar exista o vecinătate $V$ şi o familie numărabilă de părţi finite disjuncte $H_n \subset I$ $(1 \leq n < \infty)$ pentru care

$$\sum_{i \in H_n} x_i \notin V;$$

dar atunci ar exista o familie $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ care nu este sumabilă şi deci am ajunge în contradicţie cu 1°.

*c)* Din definiţia 2, urmează imediat că dacă $(X_i)_{i \in I}$ este o familie de părţi sumabilă şi $\varphi$ o permutare a mulţimii $I$ atunci familia $(X_{\varphi(i)})_{i \in I}$ este sumabilă şi

$$\sum_{i \in I} X_i = \sum_{i \in I} X_{\varphi(i)}$$

Pentru familii de părţi sumabile este valabilă o propoziţie cu totul asemănătoare cu propoziţia 1 pe care am demonstrat-o mai sus; lăsăm formularea şi demonstrarea acestei propoziţii în seama cititorului.

Pentru spaţiu vectorial normat $G$ vom da:

Definiţia 3. *Familia de părţi $(X_i)_{i \in I}$ este absolut sumabilă dacă, fiecare familie $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ este absolut sumabilă.*

Dacă $G$ este un spaţiu Banach, urmează din observaţia *b)* că o familie de părţi $(X_i)_{i \in I}$ absolut sumabilă este sumabilă.

## § 2. Funcţii şi limite

### 1. Notaţii şi definiţii

Fie $E$ şi $F$ două mulţimi şi fie $f$ o aplicaţie a mulţimii $E$ în $\mathfrak{P}(F)$ [1]. Dacă $a \in \mathfrak{P}(E)$, vom nota

$$f(a) = \bigcup_{t \in a} f(t)$$

Rezultă în particular, $\hat{f}(\varnothing) = \varnothing$. Dacă $B$ este o familie de părţi ale mulţimii $E$ vom nota $\hat{f}(B)$, familia $(\hat{f}(a))_{a \in B}$.

Vom folosi notaţiile:

— $M(E, F)$ pentru mulţimea aplicaţiilor $f$ ale mulţimii $E$ în $\mathfrak{P}(F)$ pentru care $f(t) \neq \varnothing$ oricare ar fi $t \in E$;

— $M_T(E, F)$, unde $T \subset \mathfrak{P}(E)$, $T \neq \varnothing$, pentru mulţimea aplicaţiilor $f$ ale mulţimii $T$ în $\mathfrak{P}(F)$, pentru care $f(a) \neq \varnothing$ oricare ar fi $a \in T$, $a \neq \varnothing$.

Dacă $(X_t)_{t \in E}$ este o familie de părţi ale mulţimii $F$ şi $X_t \neq \varnothing$ pentru fiecare $t \in E$, aplicaţia $t \to X_t$ aparţine mulţimii $M(E, F)$. Dacă $g$ este o aplicaţie a mulţimii $E$ în $F$ şi $f$ este extensiunea lui $g$ la mulţimea părţilor, $f$ aparţine mulţimii $M_T(E, F)$ pentru orice $T \subset \mathfrak{P}(E)$, $T \neq \varnothing$.

Fie $f \in M(E, F)$; atunci $\hat{f}(a) \neq \varnothing$ dacă $a \neq \varnothing$. Cum $a \subset b$ implică

$$\hat{f}(a) \subset \hat{f}(b),$$

[1] Pentru o mulţime oarecare $X$, vom nota $\mathfrak{P}(X)$ mulţimea părţilor lui $X$.

$\hat{f}(B)$ este o bază de filtru pe mulțimea $F$ dacă $B$ este o bază de filtru pe mulțimea $E$. Dacă $B$ este o bază de filtru mai fin decît filtrul de bază $B'$, filtrul de bază $\hat{f}(B)$ este mai fin decît filtrul de bază $\hat{f}(B')$; deci dacă bazele $B$ și $B'$ sînt echivalente, bazele $\hat{f}(B)$ și $\hat{f}(B')$ sînt echivalente.

Definiția 1. *Vom spune că funcția* $f \in M(E,F)$ *are ca limită* $y$, *după filtrul* $\mathcal{F}$ *și vom scrie*

$$\lim_{\mathcal{F}} \hat{f} = y \tag{1}$$

*dacă baza de filtru* $\hat{f}(\mathcal{F})$ *converge către* $y$.

Vom utiliza definiția și notația (1) și cînd $\mathcal{F}$ este o bază de filtru.

Dacă $(X_t)_{t \in E}$ este o familie de părți ale mulțimii $F$ și $X_t \neq \varnothing$ pentru fiecare $t \in E$, vom spune că familia $(X_t)_{t \in E}$ converge după filtrul $\mathcal{F}$, către $y$, dacă aplicația $t \to X_t$ are ca limită pe $y$, după filtrul $\mathcal{F}$, conform definiției de mai sus.

## 2. Cîteva propoziții

Să presupunem acum că $F$ și $G$ sînt două spații topologice separate.

Fie $g$ o aplicație a mulțimii $\mathfrak{F}(F)$ în mulțimea $\mathfrak{F}(G)$ care satisface condițiile:

1° $a \subset b$ implică $g(a) \subset g(b)$;

2° dacă $a = \{x\}$, atunci $g(a) = \{y\}$;

3° dacă $V$ este o vecinătate a mulțimii $\{y\}$, există o vecinătate $U$ a mulțimii $\{x\}$ pentru care $g(U) \subset V$.

Dacă $f \in M(E,F)$ și $h$ [1]) este aplicația compusă $g \circ f$ obținem imediat:

Propoziția 1. *Dacă* $B$ *este o bază de filtru pe* $E$ *și*

$$\lim \hat{Bf} = x$$

*atunci*

$$\lim \hat{Bh} = y.$$

Fie $V$ o vecinătate a lui $y$ și $U$ o vecinătate a lui $x$ pentru care $g(U) \subset V$. Fie $a \in B$ o mulțime pentru care $\hat{f}(a) \subset U$. Atunci.

$$\hat{h}(a) \subset g(\hat{f}(a)) \subset g(U) \subset V \text{ [2])}$$

ceea ce demonstrează că

$$\lim B\hat{h} = y$$

*Exemple* 1) Dacă $\varphi$ este o aplicație continuă a lui $F$ în $G$ și $g$ extensia lui $\varphi$ la mulțimea părților, $g$ satisface condițiile 1°, 2°, 3°.

2) Dacă $F = G$ este un spațiu topologic regulat atunci aplicația $a \to \bar{a}$ satisface condițiile 1°, 2°, 3°.

---

[1]) $h \in M(E, G)$ întrucît $h(t) = g(f(t)) \neq \varnothing$.

[2]) $\hat{h}(a) = \bigcup_{t \in a} g(f)(t)) \subset g(\hat{f}(a))$.

Fie pentru orice $j \in I$, $G_j$ un spaţiu topologic separat şi $g$ o aplicaţie a mulţimii $\mathfrak{S}(\prod_{j \in r} G_j)$ în $\mathfrak{S}(G)$, care are condiţiile 1°, 2°, 3° enumerate mai sus. Fie pentru fiecare $j \in I$, o funcţie $f_j \in M(E,G_j)$ şi fie $f$ aplicaţia

$$t \to \prod_{j \in I} f_j(t),$$

evident $f \in M(E, \prod_{j \in I} G_j)$. Fie $\mathfrak{B}$ o bază de filtru pe $E$.

Atunci:

Propoziţia 2. *Dacă* $\lim_{\mathfrak{B}} \hat{f}_j$ *există pentru fiecare* $j \in I$ *atunci* $\lim_{\mathfrak{F}} \hat{\varphi} \circ f$ *există şi este egală cu*

$$\varphi((\lim_{\mathfrak{F}} \hat{f}_j)_{j \in I}).$$

Este suficient să observăm că

$$\lim_{\mathfrak{F}} \hat{f} = (\lim_{\mathfrak{F}} \hat{f}_j)_{j \in I},$$

întrucît

$$\hat{f}(X) \subset \pi_{j \in I} \hat{f}_j(X),$$

pentru orice parte $X$ a lui $E$ şi să utilizăm propoziţia 1 demonstrată mai sus

Propoziţia 3. *Fie* $\mathfrak{F}$ *un filtru pe* $E$. *Dacă,* $f_1 \in M(E,F)$, $f_2 \in M(E,F)$ *şi*

$$f_1(t) \subset f_2(t)$$

*pentru* $t \in a$, *unde* $a \in \mathfrak{F}$, *atunci* $\lim_{\mathfrak{F}} \hat{f}_1$ *există dacă* $\lim_{\mathfrak{F}} \hat{f}_2$ *există şi*

$$\lim_{\mathfrak{F}} \hat{f}_1 = \lim_{\mathfrak{F}} \hat{f}_2.$$

Pentru orice $b \subset a$,

$$\hat{f}_1(b) \subset \hat{f}_2(b);$$

deci filtrul de bază $\hat{f}_1(\mathfrak{F})$ este mai fin decît filtrul de bază $\hat{f}_2(\mathfrak{F})$; deci dacă $\hat{f}_2(\mathfrak{F})$ este convergentă, $\hat{f}_1(\mathfrak{F})$ este convergentă şi

$$\lim \hat{f}_1(\mathfrak{F}) = \lim \hat{f}_2(\mathfrak{F}).$$

## II. FUNCȚII DE MULȚIME ABSOLUT CONTINUE

### 1. Definiții

Fie $E$ o mulțime. O familie nevidă $T$ de părți ale mulțimii $E$ se numește *trib* dacă:

(t) $\bigcup_{\alpha\in I} a_\alpha \in T$ pentru orice familie numărabilă $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ de mulțimi din $T$;

(tt) $a \cap \complement b \in T$ dacă $a \in T$ și $b \in T$.

Fie $G$ un grup abelian topologic separat. O funcție $f$ definită pe $T$ ale cărei valori sînt elemente din $G$ este *complet aditivă* dacă pentru orice familie numărabilă $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ de mulțimi disjuncte din $T$, familia $(f(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ este sumabilă și

$$f\left(\bigcup_{\alpha\in I} a_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in I} f(a_\alpha)$$

*Observație.* În cele ce urmează vom utiliza o formă mai generală a definiției aditivității complete.

Dacă $T$ este o familie nevidă oarecare de părți ale mulțimii $E$, $G$ un semigrup uniform și $f$ o aplicație a mulțimii $T$ în $G$; vom spune că $f$ este *complet aditivă* dacă pentru orice familie numărabilă $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ de mulțimi disjuncte din $T$ pentru care

$$\bigcup_{\alpha\in I} a_\alpha \in T \tag{2}$$

familia $(f(a_\alpha))_{\alpha\in I}$ este sumabilă și

$$f\left(\bigcup_{\alpha\in I} a_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in I} f(a_\alpha) \tag{3}$$

Funcția $f$ este *aditivă*, dacă pentru orice familie finită $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ de mulțimi disjuncte din $T$ egalitatea (2) implică egalitatea (3).

O aplicație $f$, a tribului $T$ în grupul $G$, are *proprietatea* $(R)$, dacă pentru orice familie numărabilă infinită $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ de mulțimi disjuncte din $T$ aplicația $\alpha \to f(a_\alpha)$ converge către zero după filtrul complementarelor părților finite ale mulțimii de indici $I$.

Orice funcție $f$ complet aditivă definită pe tribul $T$ are proprietatea $(R)$.

Fie $f$ și $g$ două funcții definite pe tribul $T$, ale căror valori aparțin respectiv grupurilor topologice separate $G_f$ și $G_g$.

Funcția $f$ este *absolut continuă în raport cu* $g$, dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathfrak{V}_f(0)$, $f(a) \in V$, dacă $g(a) \in W$ și $W \in \mathfrak{V}_g(0)$ [1]) este o vecinătate convenabil aleasă.

O funcție $f$ definită pe tribul $T$ cu valori în $\overline{R}_+$ [2]) este o *măsură exterioară* dacă:

(e) pentru orice $a \in T$, $b \in T$, $a \subset b$,

$$f(a) \leq f(b),$$

---

[1]) Notăm cu $\mathfrak{V}_f(o)$, respectiv $\mathfrak{V}_g(o)$, filtrul vecinătăților elementului 0, în grupul $G_f$ respectiv $G_g$.

[2]) $R_+ = [0,\infty]$.

(ee) pentru orice familie numărabilă $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ de mulțimi din $T$

$$f(\bigcup_{\alpha \in I} a_\alpha) \leq \sum_{\alpha \in I} f(a_\alpha).$$

După o teoremă dată de Rickart [26], *dacă $f$ și $g$ sînt două măsuri exterioare definite pe tribul $T$ și dacă $f$ are proprietatea $(R)$, atunci $f$ este absolut continuă în raport cu $g$, dacă și numai dacă $f(a) = 0$ pentru orice $a \in T$ pentru care $g(a) = 0$.*

Fie $G$ un grup abelian topologic separat și $x \to |x|$ o aplicație continuă a grupului $G$ în $R$ care are proprietățile;

(h) pentru orice elemente $x, y \in G$,

$$|x + y| \leq |x| + |y|;$$

(hh) pentru orice $x \in G$.

$$|x| \geqslant 0;$$

(hhh) $|0| = 0$.

Fie $f$ o funcție complet aditivă definită pe tribul $T$ și fie pentru orice $a \in T$

$$h(a) = \sup \{|f(e)| \quad | e \subset a, e \in T\}.$$

*$h$ este o măsură exterioară care are proprietatea $(R)$.*

Proprietatea $(e)$ este verificată imediat. Pentru verificarea proprietății (ee), să luăm o mulțime oarecare

$$b \subset \bigcup_{\alpha \in I} a_\alpha, \; b \in T$$

și o familie $(a'_\alpha)_{\alpha \in I}$ de mulțimi disjuncte din $T$ pentru care

$$\bigcup_{\alpha \in I} a'_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} a_\alpha, \; a'_\alpha \subset a_\alpha.$$

Atunci

$$|f(b)| = |f(b \cap \bigcup_{\alpha \in I} a'_\alpha)| = |\sum_{\alpha \in I} f(b \cap a'_\alpha)| \leq$$

$$\leq \sum_{\alpha \in I} |f(b) \cap a'_\alpha)| \leq \sum_{\alpha \in I} h(a'_\alpha) \leq \sum_{\alpha \in I} h(a_\alpha)$$

și deci

$$h(\bigcup_{\alpha \in I} a_\alpha) \leq \sum_{\alpha \in I} h(a_\alpha).$$

Rămîne să arătăm că $h$ are proprietatea $(R)$. Fie pentru aceasta $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ o familie numărabilă infinită de mulțimi disjuncte din $T$ și $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha \in I}$ o familie sumabilă de numere reale strict pozitive. Pentru fiecare $\alpha \in I$, fie $b_\alpha \subset a_\alpha$ o mulțime din $T$ pentru care [1])

$$h(a_\alpha) \leq |f(b_\alpha)| + \varepsilon_\alpha$$

---

[1]) Este evident că nu putem avea

$$h(a_\alpha) = \infty$$

pentru o infinitate de indici $\alpha \in I$.

Mulțimile din familia $(b_\alpha)_{\alpha \in I}$ sînt disjuncte două cîte două și deci aplicația $\alpha \to |f(b_\alpha)|$ tinde către zero după filtrul complementarelor părților finite ale mulțimii de indici $I$. Urmează, întrucît familia $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha \in I}$ este sumabilă, că $\alpha \to |f(b_\alpha)| + \varepsilon_\alpha$ tinde către zero, după același filtru și deci și $\alpha \to h(a_\alpha)$. Deci $h$ are proprietatea $(R)$.

## 2. O condiție de continuitate absolută

Teorema 1. *Fie* f *o funcție complet aditivă definită pe tribul* $T$, *ale cărei valori aparțin unui grup abelian topologic separat* $G$ *și fie* $g$ *o măsură exterioară definită pe tribul* $T$. *Funcția* f *este absolut continuă în raport cu* $g$, *dacă și numai dacă* $f(a) = 0$ *pentru orice mulțime* $a \in T$ *pentru care* $g(a) = 0$.

Fie $(p_\alpha)_{\alpha \in H}$ o familie de funcții reale continue definite pe grupul $G$ care au proprietățile (50), (60), (70) și care definesc topologia grupului $G$.

Fie pentru fiecare $\alpha \in H$, $h_\alpha$ măsura exterioară definită pentru $a \in T$ prin egalitatea

$$h_\alpha(a) = \sup \{p_\alpha(f(b)) \mid b \subset a, b \in T\}$$

Dacă $g(a) = 0$, atunci $g(b) = 0$ pentru fiecare mulțime $b \subset a$, $b \in T$ și deci $h_\alpha(a) = 0$, pentru orice $\alpha \in H$. După teorema lui Rickart, amintită mai sus, $h_\alpha$ este absolut continuă în raport cu $g$. Deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\eta_{\varepsilon,\alpha}$ astfel încît

$$h_\alpha(a) \leqslant \varepsilon$$

dacă $g(a) \leqslant \eta_{\varepsilon,\alpha}$. Fie $V$ o vecinătate a lui 0 în grupul $G$ și fie $\alpha_1 \ldots, \alpha_n$ o mulțime finită de indici $\alpha$ pentru care

$$\{x \mid \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} p_{\alpha_j}(x) \leqslant \varepsilon\} \subset V.$$

Dacă

$$\eta_\varepsilon = \inf (\eta_{\varepsilon,\alpha_1}, \ldots, \eta_{\varepsilon,\alpha_n})$$

atunci $g(a) \leqslant \eta_\varepsilon$ implică

$$h_{\alpha_j}(a) \leqslant \varepsilon \quad (1 \leqslant j \leqslant n);$$

deci

$$p_{\alpha_j}(f(a)) \leqslant \varepsilon \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

și deci

$$f(a) \in V.$$

Deci $f$ este absolut continuă în raport cu măsura exterioară $g$.

*Observație.* Procedeul de demonstrație este datorit lui Rickart [26] care a demonstrat rezultatul enunțat în teorema 1, în cazul cînd $G$ este un *spațiu normat*. Aceeași teoremă pentru $G$ *local convex* a fost demonstrată tot de Rickart [25] printr-o metodă deosebită care a indicat de altfel că și procedeul folosit mai sus este aplicabil și acestui caz.

Aceste rezultate sînt evident cazuri particulare ale teoremei 1.

## III. INTEGRALE ADITIVE

## § 1. Grupoizi. Sume Riemann

### 1. Grupoizi

Definiţia 1. *Vom numi grupoid*[1]) *o mulţime G, pe care s-a definit o lege de compoziţie*[2]), $(x, y) \to x \circ y$ *care are proprietăţile:*

1° *dacă* $x \circ y$ *este definit,* $y \circ x$ *este definit şi* $x \circ y = y \circ x$;

2° *dacă* $(x \circ y) \circ z$ *este definit* $x \circ (y \circ z)$ *este definit şi* $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$;

3° *există un element neutru e.*

Pentru o familie finită de elemente din $G$, compusul $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dacă este definit, va fi notat $x_1 \circ x_2 \circ \ldots x_n$ sau $\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\circ} x_i$. Dacă familia este dată sub forma $(x_i)_{i \in I}$ compusul va fi notat $\underset{i \in I}{\circ} x_i$. Cînd $I = \varnothing$,

$$\underset{i \in I}{\circ} x_i = e$$

O parte $A \subset G$, stabilă, care conţine elementul neutru $e$, este un grupoid pentru legea de compoziţie indusă pe $A$, de legea de compoziţie a grupoidului $G$.

Dacă $X$ şi $Y$ sînt două părţi ale grupoidului $G$, vom nota

$$X \circ Y$$

mulţimea elementelor $x \circ y$ (definite) unde $x \in X$ şi $y \in Y$.

Observăm că $X \circ Y$ este definit pentru orice părţi $X$ şi $Y$; dacă $x \circ y$ nu este definit pentru nici o pereche $x$, $y$ unde $x \in X$ şi $y \varnothing \in Y$, atunci

$$X \circ Y = \varnothing$$

În mod analog definim mulţimea

$$\underset{i \in I}{\circ} X_i$$

pentru orice familie finită de părţi ale grupoidului $G$. Dacă $I = \varnothing$ atunci

$$\underset{i \in I}{\circ} X_i = \{e\}$$

*Exemple de grupozi* 1) Fie $I = [a, b]$ [2]) un interval închis. Să numim *diviziune* a intervalului $I$ orice familie finită de sub intervale închise ale intervalului $I$, care nu au decît cel mult extremităţi comune. Să notăm cu $\mathfrak{D}_I$ mulţimea diviziunilor intervalului $I$. Dacă $x$ şi $y$ sînt două diviziuni din $\mathfrak{D}_I$ şi dacă un interval oarecare din $x$ şi unul oarecare din $y$ nu au decît cel mult extremităţi comune, vom nota $x \circ y$ diviziunea formată cu intervalele din familiile $x$ şi $y$. Dacă notăm cu $e$ *diviziunea vidă*, atunci legea de compoziţie $(x, y) \to x \circ y$ defineşte pe $\mathfrak{D}_I$ o structură de grupoid pentru care $e$ este elementul neutru.

---

[1]) În algebră denumirea grupoid este folosit în alt sens. În această lucrare, sensul va fi totdeauna cel dat prin definiţia 1. Vezi [2].

[2]) Legea de compoziţie $(x, y) \to x \circ y$ nu este necesar definită pentru orice pereche de elemente din $G$.

[3]) Toate intervalele considerate, atît pe dreaptă cît şi în spaţiul cu $n$-dimensiuni sînt presupuse nedegenerate.

2) Fie $R$ o *figură* [1]) din spațiul euclidian cu $n$-dimensiuni. Să numim *diviziunea* figurii $R$ orice familie finită de subintervale închise ale figurii $R$. Să notăm cu $\mathfrak{D}_R$ mulțimea diviziunilor figurii $R$. Dacă $x$ și $y$ sînt două diviziuni din $\mathfrak{D}_R$ și dacă un interval oarecare din $x$ și unul oarecare din $y$ nu au puncte interioare comune, vom nota $x \circ y$ diviziunea formată cu intervalele din familiile $x$ și $y$, Dacă notăm cu $e$ *diviziunea vidă*, legea de compoziție $(x, y) \to x \circ y$ definește pe $\mathfrak{D}_R$ o structură de grupoid cu element neutru.

3) Fie $E$ o mulțime nevidă și $T$ o familie de părți ale lui $E$ care conține o parte nevidă. Vom numi *partițiune* orice familie finită de mulțimi disjuncte nevide din $T$. Fie $T(E)$ mulțimea acestor partițiuni. Dacă $x$ și $y$ sînt două partițiuni și dacă o mulțime oarecare din $x$ și una oarecare din $y$ sînt disjuncte, vom nota $x \circ y$ partițiunea formată cu mulțimile din $x$ și $y$. Legea de compoziție $(x, y) \to x \circ y$ definește pe $T(E)$ o structură de grupoid, în care *partițiunea vidă* $e$ este elementul neutru.

4) Fie $X$ o mulțime *reticulată* care conține cel puțin două elemente și care are un cel mai mic element $\varnothing$. Vom spune că două elemente $a$ și $b$ sînt disjuncte dacă

$$\inf (a, b) = \varnothing.$$

Numim *partițiune* orice familie finită de elemente disjuncte diferite de $\varnothing$ din $X$ și notăm cu $P$ mulțimea acestor partițiuni. Fie $e$ *partițiunea vidă.* Dacă pentru partițiunile $x$ și $y$ din $P$ pentru care un element oarecare din $x$ și unul oarecare din $y$ sînt disjuncte, notăm $x \circ y$ partițiunea formată cu elementele din $x$ și din $y$, legea de compoziție $(x, y) \to x \circ y$ definește pe $P$ o structură de grupoid pentru care $e$ este elementul neutru.

5) Fie $E$ o mulțime nevidă și T o familie de părți ale lui $E$, care conține o parte nevidă. Fie $G$ un *grupoid,* ale cărui elemente sînt familii [2]) finite formate cu mulțimi nevide din $T$, și care are proprietatea:

*dacă* $x \in G$, $y \in G$ *și* $x \circ y$ *este definit,* $x \circ y$ *este familia formată cu mulțimile din* $x$ *și* $y$; dacă $p$ din mulțimile familiei $x$ și $q$ din mulțimile familiei $y$ sînt egale cu $X$, $p + q$ din mulțimile familei $x \circ y$ sînt egale cu $X$.

Se deduce imediat că elementul neutru al grupoidului $G$ este *familia vidă* $e$.

Exemplele 1, 2, 3, sînt cazuri particulare ale grupoidului $G$.

### 2. Sume Riemann

Fie $F$ un semigrup uniform [3]) și $G$ un grupoid.

Definiția 2. *O funcție* $S$ *definită pe grupoidul* $G$ *cu valori în* $\mathfrak{T}(F)$ *este o sumă Riemann dacă:*

1° *pentru orice elemente* $x$ *și* $y$ *din* $G$ *pentru care* $x \circ y$ *este definit* $S(x \circ y) = S(x) + S(y)$;

2° *pentru orice* $x \in G$, $S(x) \neq \varnothing$;

3° *dacă* $e$ *este elementul neutru a lui* $G$, $S(e) = \{O\}$

Observăm că

$$S \in M(G, F).$$

[1]) O *figură* este o reuniune finită de intervale închise [29].

[2]) O aceiași mulțime poate intra de mai multe ori în familia considerată.

[3]) Evident această ipoteză nu intervine în definiție.

Pentru orice familie finită $(x_i)_{i\in I}$,

$$S(\bigcirc_{i\in I} x_i) = \sum_{i\in I} S(x_i), \tag{4}$$

dacă elementul

$$\bigcirc_{i\in I} x_i$$

este definit.

Dacă $(X_i)_{i\in I}$ este o familie de părţi ale grupoidului $G$,

$$\hat{S}(\bigcirc_{i\in I} X_i) \subset \sum_{i\in I} \hat{S}(X_i)$$

Este uşor de văzut că relaţia de incluziune precedentă nu poate fi înlocuită în totdeauna prin egalitate. Această înlocuire se poate face dacă pentru orice $x_i \in X_i$, $(i\in I)$ elementul $\bigcirc_{i\in I} x_i$ este definit.

*Exemple de sume Riemann* 1) Fie $\mathfrak{D}_I$ grupoidul introdus în exemplul 1 de la 1 şi $\mathcal{J}(I)$ mulţimea subintervalelor închise ale lui $I$. Fie $F$ un semigrup uniform şi

$$f \in M_{j(I)}(I, F)$$

Dacă pentru orice $x = (I_i)_{i\in A} \in \mathfrak{D}_I$, punem

$$S(x) = \sum_{i\in A} f(I_i)$$

$S$ este o *sumă Riemann*; vom nota adesea această sumă Riemann cu $S^f$.

Consideraţii asemănătoare se pot face şi pentru grupoidul introdus în exemplul 2) de la 1.

2) Fie $T(E)$ grupoidul introdus în exemplul 3 de la 1, $F$ un semigrup uniform şi

$$f \in M_T(E, F).$$

Dacă pentru orice $x = (a_i)_{i\in A} \in T(E)$, punem

$$S(x) = \sum_{i\in A} f(a_i),$$

$S$ este o *sumă Riemann*; ca şi în exemplul 1) vom nota această sumă $S_f$.

3) Fie $G$ grupoidul general introdus în exemplul 5 de la 1 şi fie $F$ un semigrup uniform şi

$$f \in M_T(E, F)$$

Atunci funcţia $S$, definită pentru $x = (a_i)_{i\in A} \in G$ prin egalitatea

$$S(x) = \sum_{i\in A} f(a_i)$$

este o sumă Riemann, care va fi notată $S_f$.

Sumele Riemann introduse în exemplele (1 și 2) sînt cazuri speciale ale sumei Riemann introdusă în acest exemplu.

## § 2. Integrale aditive

### 1. Filtre pe grupoizi

Fie $G$ un grupoid.

Definiția 1. *Vom spune că familia finită nevidă de filtre* $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$ *are proprietatea* $(D)$ *dacă pentru fiecare* $i \in I$ *există o mulțime* $X_i \in \mathfrak{F}_i$ *astfel încît pentru orice* $x_i \in X_i$

$$\bigcirc_{i \in I} x_i$$

*este definit.*

Dacă familia finită nevidă de filtre, $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$, are proprietatea $(D)$, atunci mulțimea tuturor părților lui $G$, de forma

$$\bigcirc_{i \in I} X_i, \tag{5}$$

în care $X_i \in \mathfrak{F}_i$, pentru fiecare $i \in I$, este o bază de filtru [1]) pe grupoidul $G$; vom nota prin

$$\bigcirc_{i \in I} \mathfrak{F}_i \tag{6}$$

filtrul generat de această bază. Dacă $\mathfrak{B}_i$ este o bază a filtrului $\mathfrak{F}_i$, pentru fiecare $i \in I$, mulțimea tuturor părților lui $G$ de forma (5), în care $X_i \in \mathfrak{B}_i$ este o bază a filtrului (6)

Dacă $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ vom scrie în loc de (6),

$$\bigcirc_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{F}_i \quad \text{sau} \quad \mathfrak{F}_1 \bigcirc \mathfrak{F}_2 \bigcirc \ldots \bigcirc \mathfrak{F}_n$$

### 2. Sume Riemann integrabile

Fie $F$ un semigrup uniform, $G$ un grupoid și $S$ o sumă Riemann definită pe $G$ cu valori în $\mathfrak{F}$ (F). Fie $\mathfrak{F}$ un filtru pe grupoidul $G$.

Definiția 2. *Vom spune că* $S$ *este integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$ *dacă filtrul de bază* $\hat{S}(\mathfrak{F})$ *converge către o limită. Această limită o vom numi integrala sumei Riemann* $S$ *(pentru filtrul* $\mathfrak{F}$*) și o vom nota*

$$(\mathfrak{F}) \int S \tag{7}$$

Din definiția integralei, rezultă imediat, că pentru ca $S$ să fie integrabilă pentru filtrul $\mathfrak{F}$ este necesar ca $\hat{S}(\mathfrak{F})$ să fie o bază de filtru Cauchy pe $F$; dacă semigrupul uniform $F$ este complet, condiția este și suficientă.

---

[1]) Este suficient să observăm că

$$\left(\bigcirc_{i \in I} Y_i\right) \cap \left(\bigcirc_{i \in I} Z_i\right) \supset \bigcirc_{i \in I} (Y_i \cap Z_i)$$

oricare ar fi familiile $(Y_i)_{i \in I}$ și $(Z_i)_{i \in I}$

De asemenea se deduce imediat că dacă $\mathfrak{F}'$ este un filtru mai fin decît $\mathfrak{F}$ şi $S$ este integrabilă pentru filtrul $\mathfrak{F}$ atunci $S$ este integrabilă şi pentru filtrul $\mathfrak{F}'$ şi

$$(\mathfrak{F}')\int S = (\mathfrak{F})\int S.$$

Vom demonstra acum o serie de proprietăţi ale integralei (7).

Teorema 1. *Dacă $S_1$ şi $S_2$ sînt două sume Riemann şi dacă*

$$S_1(x) \subset S_2(x)$$

*pentru orice $x \in G$ în $S_2$ este integrabilă pentru filtrul $\mathfrak{F}$, atunci $S_1$ este integrabilă pentru filtrul $\mathfrak{F}$ şi*

$$(\mathfrak{F})\int S_1 = (\mathfrak{F})\int S_2$$

Teorema este o consecinţă imediată a propoziţiei 3, § 2, I.

*Observaţie.* Este suficient ca relaţia

$$S_1(x) \subset S_2(x)$$

să fie îndeplinită pentru orice $x \subset X$, unde $X$ este o mulţime din filtrul $\mathfrak{F}$.

Fie I o mulţime de indici oarecare, $F_j$ un semigrup uniform pentru fiecare $j \in I$, $F$ un semigrup uniform şi $\varphi$ o reprezentare continuă a semigrupului produs [1]) $\pi_{j \in I} F_j$ în $F$.

Fie pentru fiecare $j \in I$, $S_j$ o sumă Riemann definită pe grupoidul-valori în $\mathfrak{T}(F_j)$ şi fie $S$ aplicaţia

$$x \to \prod_{j \in I} S_j(x)$$

Este uşor de văzut că $S$ este o sumă Riemann. Pentru verificarea proprietăţii 1° este suficient să observăm că dacă $x \in G$, $y \in G$ şi $x \odot y$ este definit

$$S(x \odot y) = \prod_{j \in I} S_j(x \odot y) = \prod_{j \in I} (S_j(x) + S_j(y)),$$
$$= \prod_{j \in I} S_j(x) + \prod_{\epsilon I} S_j(y) = S(x) + S(y).$$

Proprietăţile: 2° pentru orice $x \in G$, $S(x) \neq \varnothing$; 3° $S(e) = \{0\}$, se verifică imediat. Cum $\varphi$ este o reprezentare, dacă notăm tot cu $\varphi$ extensiunea reprezentării la mulţimea părţilor produsului $\Pi F_j$, se vede fără dificultate $j \in I$
că $\varphi \bigcirc S$ este de asemenea o sumă Riemann.

Din propoziţia 2, § 2, I, deducem:

Teorema 2. *Dacă $\mathfrak{F}$ ete un filtru pe grupoidul $G$ şi $S_j$ este integrabilă pentru filtrul $\mathfrak{F}$ oricare ar fi $j \in I$, atunci $\varphi \bigcirc S$ este integrabilă pentru filtrul $\mathfrak{F}$ şi*

$$(\mathfrak{F})\int \varphi \bigcirc S = \varphi\left( (\mathfrak{F})\int (S_j)_{j \in I} \right)$$

[1]) Structura uniformă produs defineşte pe $\Pi F_j$ o structură de semigrup uniform.
$j \in I$

*Observații. a)* Nu este necesar ca $\varphi$ să fie o reprezentare continuă; această ipoteză a fost folosită numai pentru a demonstra că $\varphi \circ S$ este o sumă Riemann.

*b)* În particular dacă

$$I = \{1, 2\} \quad F_1 = F_2 = F$$

și luăm ca reprezentare $\varphi$ aplicația $(x, y) \to x + y$ a produsului $F \times F$ în $F$ obținem imediat egalitatea

$$(\mathcal{F})\int S = (\mathcal{F})\int S_1 + (\mathcal{F})\, S_2$$

unde pentru fiecare $x \in G$,

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x).$$

*c)* Dacă $(\alpha, x) \to \alpha x$ este o lege de compoziție și dacă

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

și aplicația $x \to \alpha x$ este continuă pentru orice $\alpha$, atunci $x \to \alpha x$ este o reprezentare continuă a semigrupului uniform $F$ în $F$ și după teorema 2, urmează că dacă $S$ este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$, $\alpha S$ este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$ și

$$(\mathcal{F})\int (\alpha S) = \alpha\left((\mathcal{F})\int S\right)$$

Teorema 3. *Dacă $F$ este un grup topologic ordonat, $\mathcal{F}$ un filtru pe grupoidul $G$ și $S$ o sumă Riemann definită pe $G$ cu valori în $\mathfrak{T}(F)$, integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$, atunci*

$$(\mathcal{F})\int S \geqslant a,$$

dacă pentru orice $x \in F$

$$\hat{S}(X) \cap \{x \mid x \geqslant a\} \neq \varnothing \qquad (8)$$

Este suficient să observăm că mulțimile (8) formează o bază de filtru mai fin decît filtrul de bază $\hat{S}(\mathcal{F})$ și că mulțimea

$$\{x \mid x \geqslant a\}$$

este închisă.

Teorema 4. *Fie $(F_i)_{i \in I}$ o familie finită nevidă de filtre care are proprietatea $(D)$ și fie $\mathcal{F}$ un filtru mai fin decît filtrul*

$$\bigodot_{i \in I} \mathcal{F}_i$$

*Dacă suma Riemann $S$ este integrabilă pentru fiecare filtru $\mathcal{F}_i$ $(i \in I)$ atunci $S$ este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$ și*

$$(\mathcal{F})\int S = \sum_{i \in I} (\mathcal{F}_i)\int S.$$

Este suficient să arătăm că $S$ este integrabilă pentru filtrul şi că

$$\bigcirc_{i\in I}\mathcal{F}_i$$

$$(\bigcirc_{i\in I}\mathcal{F}_i)\int S=\sum_{i\in I}(\mathcal{F}_i)\int S.$$

Fie $U$ o împrejurime şi $(U_i)_{i\in I}$ o familie finită de împrejurimi care verifică relaţia

$$\sum_{i\in I}U_iU\subset U.$$

Fie pentru fiecare $i\in I$, o mulţime $X_i\in\mathcal{F}_i$ pentru care

$$\hat{S}(X_i)\times\{(\mathcal{F}_i)\int S\}\subset U_i.$$

Atunci

$$\hat{S}(\bigcirc_{i\in I}X_i)\times\{\sum(\mathcal{F}_i)\int S\}\subset(\sum_{i\in I}\hat{S}(X_i))\times\{\sum_{i\in i}(\mathcal{F}_i)\int S\}$$

$$=\sum_{i\in I}(\hat{S}(X_i)\times\{(\mathcal{F}_i)\int S\})\subset\sum_{i\in I}U_i\subset U$$

şi deci

$$\lim\hat{S}(\bigcirc_{i\in i}\mathcal{F}_i)=\sum_{i\in I}(\mathcal{F}_i)\int S$$

Deci S este integrabilă pentru filtrul

$$\bigcirc_{i\in I}\mathcal{F}_i$$

şi

$$(\bigcirc_{i\in I}\mathcal{F}_i)\int S=\sum_{i\in I}(\mathcal{F}_i)\int S$$

*Observaţii. a)* Din rezultatul obţinut mai sus, vom deduce activitatea finită a diferitelor integrale pe care le vom considera mai jos.

*b)* Se demonstrează fără dificultate că integrabilitatea funcţii $S$ pentru filtrul $\mathcal{F}$ şi egalitatea

$$(\mathcal{F})\int S=\sum_{i\in I}(\mathcal{F}_i)\int S$$

e păstrează dacă în locul ipotezei

$$\bigcirc_{i\in I}\mathcal{F}_i\subset\mathcal{F}$$

presupunem că oricare ar fi împrejurimea $U$ şi mulţimea

$$X\in\bigcirc_{i\in I}\mathcal{F}_i$$

putem găsi o mulțime $Z_X \in \mathfrak{F}$ care are proprietatea: *pentru orice* $z \in Z_X$ *există* $x \in X$ *astfel încît*

$$S(z) \times S(x) \subset U.$$

Este suficient să arătăm că $S$ este integrabilă pentru filtrul $\mathfrak{F}$ și că

$$(\mathfrak{F})\int S = (\bigcirc_{i \in I} \mathfrak{F}_i)\int S.$$

Fie (9)

$$X \in \bigcirc_{i \in I} \mathfrak{F}_i$$

o mulțime pentru care

$$\hat{S}(X) \times \{(\bigcirc_{i \in I} \mathfrak{F}_i)\int S\} \subset U;$$

atunci

$$\hat{S}(Z_X) \times \{(\bigcirc_{i \in I} \mathfrak{F}_i)\int S\} \subset U \bigcirc U,$$

ceea ce arată că $S$ este integrabilă pentru filtrul $\mathfrak{F}$ și că avem egalitatea (9).

Teorema 5. *Fie* $F$ *un grup abelian topologic separat și* $S$ *o sumă Riemann cu valori în* $\mathfrak{F}(F)$, *integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$. *Dacă* $(\mathfrak{F}_i)_{1 \leq i \leq 2}$ *este o familie de filtre care are proprietatea* $(D)$ *și*

$$\mathfrak{F}_1 \bigcirc \mathfrak{F}_2 \supset \mathfrak{F}$$

*atunci* $S$ *este integrabilă pentru filtrele* $\mathfrak{F}_1$ *și* $\mathfrak{F}_2$.

Vom demonstra integrabilitatea sumei S. pentru filtrul $\mathfrak{F}_1$. Fie $V$ o vecinătate a elementului neutru în grupul $F$ și $X$ o mulțime din filtrul $\mathfrak{F}$ pentru care

$$\hat{S}(X) - \hat{S}(X) \subset V.$$

Fie $X_1 \mathfrak{F}_1 \in$ și $X_2 \in \mathfrak{F}_2$ două mulțimi care verifică relația

$$X_1 \bigcirc X_2 \subset X$$

alese astfel încît $x_1 \bigcirc x_2$ este definit pentru orice $x_1 \in X_1$ și $x_2 \in X_2$ [1]). Atunci

$$\hat{S}(X_1) - \hat{S}(X_1) \subset \hat{S}(X_1 \bigcirc X_2) - \hat{S}(X_1 \bigcirc X_2)$$

$$\subset \hat{S}(X) - \hat{S}(X) \subset V$$

și deci baza de filtru $\hat{S}(\mathfrak{F}_1)$ este o bază de filtru Cauchy. Cum $F$ este complet, $S$ este integrabilă pentru filtrul $\mathfrak{F}_1$.

*Observații. a)* În ipotezele teoremei 5, deducem

$$(\mathfrak{F}_1)\int S + (\mathfrak{F}_2)\int S = (\mathfrak{F})\int S.$$

*b)* Dacă $F$ este un semigrup, și nu un grup, teorema 5 nu rămîne totdeauna adevărată.

---

[2]) Ceea ce este posibil întrucît familia $(\mathfrak{F}^i)_{1 \leq i \leq 2}$ are proprietatea $(D)$.

Intr-adevăr, fie $F$ o mulțime total ordonată care conține elementele $u$ și $o$ și fie $u<o$. Legea de compoziție

$$(x, y) \to x+y = \inf(x, Ny)$$

și structura aniformă discretă, definesc pe $F$ o structură de semigrup uniform; O este elementul neutru al semigrupului.

Fie $E = \{\eta\ \xi\}$ și $T = \mathfrak{P}(E)$. Fie $f$ o aplicație a mulțimii $T$ în $\mathfrak{P}(F)$ definită prin egalitățile:

$$f(\{\xi\}) = \{0\} \quad , \quad f(\{\eta\}) = \{u, o\}$$
$$f(\varnothing) = \varnothing \qquad f(E) = \{u, o\}.$$

Urmează

$$f \in M_T(E,F).$$

Fie $\mathfrak{F}$ filtrul pe grupoidul $T(E)$ care are ca bază mulțimea care are ca singur element partițiunea $(\{\eta\}, \{\xi\})$ și $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ filtrele care au ca bază partițiunile $(\{\eta\})$ respectiv $(\{\xi\})$. Evident

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$$

Totuși

$$(\mathfrak{F}_2)\int S_f = 0$$

și

$$(\mathfrak{F})\int S_f = 0$$

dar $S_f$ nu este integrabilă pentru filtrul $\mathfrak{F}_1$ întrucît

$$S_f(\{\eta\}) = f(\{\eta\}) = \{u, o\}.$$

**3. Funcții integrabile**

Fie $E$ o mulțime nevidă, $T$ o familie nevidă de părți ale lui $E$ care conține o mulțime nevidă și $G$ un grupoid exemplul 5, 1, §1, III ale cărui elemente sînt familii finite formate cu mulțimi nevide din $T$ și care au proprietatea: *dacă* $x \in G$, $y \in G$ *și* $x \cap y$ *este definit,* $x \cap y$ *este familia formată cu mulțimile din* $x$ *și* $y$.

Fie $F$ un semigrup uniform

$$f \in M_T(E, F)$$

*și* $S_f$ suma Riemann (exemplul 3, 2, § 1, III) definită pentru $x = (a_i)_{i \in I} \in G$ prin egalitatea

$$S_f(x) = \sum_{i \in I} f(a_i)$$

Definiția 3. *Vom spune că funcția* $f$ *este integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$, *dacă suma Riemann* $S_f$. *este integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$. *Vom numi integrală a funcției* $f$ *pentru filtrul* $\mathfrak{F}$ *și vom nota*

$$(\mathfrak{F})\int f \tag{10}$$

*integrala sumei Riemann* $S_f$.

Integrala (10) definită mai sus, o vom numi uneori *integrală aditivă*; întrebuințarea acestei denumiri va fi justificată prin exemplele care vor fi considerate.

Din teoremele demonstrate la 2. pentru sumele Riemann $S_f$, deducem o serie de teoreme corespunzătoare pentru integralele (10).

Teorema 6. *Dacă pentru orice* $a \in T$

$$f_1(a) \subset f_2(a)$$

*și dacă* $f_2$ *este integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$, $f_1$ *este integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$ *și*

$$(\mathfrak{F})\int f_1 = (\mathfrak{F})\int f_2.$$

Este suficient să observăm că relația

$$f_1(a) \subset f_2(a),$$

implică

$$S_{f_1}(x) \subset S_{f_2}(x)$$

și să utilizăm teorema 1.

Fie, pentru fiecare $j \in I$, $F_j$ și $F$ un semigrup uniform, și $\varphi$ o reprezentare continuă a semigrupului produs, $\pi_{j\in I} F_j$ în $F$. Fie pentru fiecare $j \in I$.

$$f_j \in M_T(E,F_j)$$

și fie $f$ aplicația

$$a \to \pi_{j\in I} f_j(a)$$

Dacă notăm tot cu $\varphi$ extensiunea reprezentării la mulțimea părților semigrupului produs $\pi_{j\in I} F_j$, se vede fără dificultate că

$$\varphi^\circ f \in M_T(E,F)$$

Fie $\mathfrak{F}$ un filtru pe *grupoidul* $G$. Din teorema 2 deducem:

Teorema 7. *Dacă* $f_j$ *este integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$, *oricare ar fi* $j \in I$, $\varphi^\circ f$ *este integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$ *și*

$$(\mathfrak{F})\int \varphi_0 f = \varphi\,((\mathfrak{F})\int f_j)_{j\in I})$$

Este suficient să arătăm că

$$S_{\varphi\circ f}(x) = \varphi(S_f(x)) \tag{11}$$

și

$$S_f(x) = \pi_{j\in I} S_{f_j}(x), \tag{12}$$

oricare ar fi $x \in G$.

Egalitatea (11) este o consecință a ipotezelor făcute asupra funcției $\varphi$; pentru egalitatea (12), observăm că dacă $x = (a_i)_i \in A^E G$,

$$S_f(x) = \sum_{i\in A} f(a_i) = \sum_{i\in A} \prod_{j\in I} f_j(a_i) = \prod_{j\in I} \sum_{i\in A} f_j(a_i) = \prod_{j\in I} S_{f_j}(x)$$

*Observații.* Din teorema 7, alegînd convenabil semigrupurile uniforme $F, F_j\,(j \in I)$ și reprezentarea $\varphi$ deducem:

*a) Dacă* $f_j\,(1 \leqslant j \leqslant 2)$ *sînt integrabile pentru filtrul* $\mathfrak{F}$, *funcția* $f=f_1+f_2$ *este integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$ *și*

$$(\mathfrak{F})\int f = (\mathfrak{F})\int f_1 + (\mathfrak{F})\int f_2$$

*b) Dacă* $f$ *este integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$ *și* $(\alpha,x) \to \alpha x$ *este o lege de compoziție externă care are proprietățile:*

$$1^\circ\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y;$$

$$2^\circ\ x \to \alpha x \text{ este continuă,}$$

$f$ *este integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$ *și*

$$(\mathfrak{F})\int (\alpha f) = \alpha\,((\mathfrak{F})\int f)$$

Rezultatele *a* și *b* se deduc imediat și din rezultatele corespunzătoare demonstrate pentru sume Riemann, dacă observăm că pentru orice $x \in G$

$$S_f(x) = S_{f_1}(x) + S_{f_2}(x)$$

și

$$S_{\alpha f}(x) = \alpha\, S_f(x).$$

Teorema 8. *Dacă* $G$ *este un grup topologic ordonat și* $f$ *o funcție integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$.

$$(\mathfrak{F})\int f \geq y$$

*dacă pentru orice* $a \in T$

$$f(a) \cap \{x \mid x \geqslant y\} \neq \varnothing\,.$$

Observăm că pentru orice $x = (a^i)_{i \in A} \in A^{\in G}$,

$$S_f(x) \cap \{x \mid x \geqslant y\} = \Big(\sum_{i \in A} f(a_i)\Big) \cap \{x \mid x \geqslant y\} \neq \varnothing$$

putem utiliza teorema 3.

Din teoremele 4 și 5 deducem [1]):

Teorema 9. *Dacă* $f$ *este integrabilă pentru fiecare filtru* $\mathfrak{F}_i$ $(i \in I)$ atunci *este integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$ *și*

$$(\mathfrak{F})\int f = \sum_{i \in I} (\mathfrak{F}_i)\int f$$

Teorema 10. *Dacă* $f$ *este integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$, $f$ *este integrabilă pentru filtrele* $\mathfrak{F}_1$ *și* $\mathfrak{F}_2$ *și*

$$(\mathfrak{F}_1)\int f + (\mathfrak{F}_2)\int f = (\mathfrak{F})\int f.$$

[1]) Păstrăm notațiile și ipotezele din teoremele 4 și 5.

Observația $b$ dată după teorema 5, arată că teorema 10 nu rămîne necesar adevărată dacă $F$ este un semigrup și nu un grup; suma Riemann construită în acest exemplu este o sumă $S_f$.

Fie $F$ și $H$ două semigrupuri uniforme și $g$ o aplicație a mulțimii $\mathfrak{F}(F)$ în mulțimea $\mathfrak{F}(H)$ care are proprietățile $1^0$, $2^0$, $3^0$ formulate la 2, § 2, I și proprietatea:

$$\delta^0 \quad g(a) + g(b) \subset g(a + b)$$

pentru orice părți $a \subset F, b \subset F$

Se vede imediat că dacă $g$ este o reprezentare continuă a semigrupului $F$ în semigrupul $H$, extensiunea reprezentării la mulțimea părților $\mathfrak{F}(F)$ are proprietățile $1^0, 2^0, 3^0$ de la 2 §2 I și $\delta^0$. Un alt exemplu este dat de funcția $a \to \bar{a}$, unde prin $\bar{a}$, am notat aderența mulțimii $a$.

Teorema 11. *Dacă funcția $f$ este integrabilă pentru filtrul $\mathfrak{F}$, funcția $g \circ f$ este integrabilă pentru filtrul $\mathfrak{F}$ și*

$$(\mathfrak{F})\int g \circ f = g((\mathfrak{F})\int f)$$

Este suficient să observăm că pentru orice $x = (a_i)_{i \in A} \in G$,

$$S_g \circ f(x) = \sum_{i \in A} g(f(a_i)) \subset g\Big(\sum_{i \in A} f(a_i)\Big) = g(S_f(x)).$$

Corolar. *Dacă $f$ este integrabilă pentru filtrul $\mathfrak{F}$ și $\bar{f}$ este aplicația*

$$a \to \overline{f(a)},$$

*$\bar{f}$ este integrabilă pentru filtrul $\mathfrak{F}$ și*

$$(\mathfrak{F})\int \bar{f} = (\mathfrak{F})\int f$$

*Observație.* Proprietatea $b$, formulată după teorema 7, poate fi obținută și ca o consecință a teoremei 11.

#### 4. Tipuri particulare de integrale

Fie $F$ un modul topologic separat pe un inel topologic separat $R$ [1]). Fie $G$ grupoidul considerat de la 3

$$h \in M_T(E,R), \quad f \in M_T(E,F),$$

două funcții. Dacă $hf$ este definită pentru orice $a \in T$ prin egalitatea

$$(hf)(a) = h(a)f(a),$$

atunci

$$hf \in M_T(E,F)$$

și deci se poate considera integrala funcției $hf$ pentru un filtru $F$, dat pe grupoidul $G$.

[1]) Toate inelele considerate în această lucrare vor fi comutative și cu element unitate, iar modulele unitare.

Dacă $h$ este o funcție *aditivă* (I, II) definită pe $T$ cu valori în $R$ și $f$ o aplicație a mulțimii $E$ în $F$ și pentru orice $a \in T$.

$$(hf)(a) = h(a)f(a),$$

în care $f(a)$ este imaginea directă a mulțimii $a$ prin $f$,

$$hf \in M_T(E,F).$$

Sumele Riemann de tipul $S_{hf}$ și integralele

$$(\mathcal{F})\int hf \tag{13}$$

vor fi numite respectiv, *sume Riemann-Stieltjes* și *integrale Riemann-Stieltjes*. Integralele (13) vor fi notate și

$$(\mathcal{F})\int dhf, \tag{14}$$

sau

$$(\mathcal{F})\int dh(t).\ f(t). \tag{15}$$

Fie acum

$$h \in M_T(E,R)$$

și fie pentru fiecare $j \in I$,

$$f_j \in M_T(E,F).$$

Fie: $\varphi$ o reprezentare continuă a modulului topologic produs $F^I$ în $F$, $f$ aplicația

$$a \to \prod_{j \in I} f_j(a)$$

și $g$ aplicația

$$a \to \prod_{j \in I} h(a) f_i(a).$$

Atunci pentru orice $a \in T$,

$$h(a)f(a) \subset g(a) \tag{16}$$

și

$$h(a)\ \varphi(f(a)) \subset \varphi(g(a)) \tag{17}$$

Cu notațiile introduse putem formula:

Teorema 12. *Dacă $hf_j$ ($j \in I$) este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$, $h(\varphi \circ f)$ este integrabilă pentrul filtrul $\mathcal{F}$ și*

$$(\mathcal{F})\int h(\varphi \circ f) = \varphi\left((\mathcal{F})\int hf_j)_{j \in I}\right)$$

După teorema 7 funcția $\varphi \circ g$ este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$. După teorema 6, relația de incluziune (17), implică integrabilitatea funcției $h(\varphi \circ f)$ pentru filtrul $\mathcal{F}$ și egalitatea

$$(\mathcal{F})\int h(\varphi \circ f) = (\mathcal{F})\int \varphi \circ g \tag{18}$$

După teorema 6,

$$(\mathcal{F})\int \varphi \circ g = \varphi((\mathcal{F})\int hf_j)_{j\in I}) \tag{19}$$

Comparînd egalitățile (18) și (19) obținem

$$(\mathcal{F})\int h(\varphi \circ f) = \varphi(((\mathcal{F})\int hf_j)_{j\in I});$$

deci teorema 12 este demonstrată.

Fie acum

$$f \in M_T(E,F),$$

$I$ o mulțime finită de indici și pentru fiecare $j \in I$,

$$h_j \in M_T(E,R).$$

Atunci:

Teorema 13. *Dacă $h_j f (j \in I)$ este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$, $(\sum_{j\in I} h_j) f$ este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$ și*

$$(\mathcal{F})\int (\sum_{j\in I} h_j) f = \sum_{j\in I} (\mathcal{F})\int h_j f$$

După teorema 7, funcția $\sum_{j\in I} h_j f$ este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$ și

$$(\mathcal{F})\int \sum_{j\in I} h_j f = \sum_{j\in I} (\mathcal{F})\int h_j f \tag{20}$$

Dar pentru orice $a \in T$

$$(\sum_{j\in I} h_j(a))\, f(a) \subset \sum_{j\in I} h_j(a)\, f(a) \tag{21}$$

După teorema 6, relația (21) implică integrabilitatea funcției $(\sum_{j\in I} h_j) f$ pentru filtrul $\mathcal{F}$ și egalitatea

$$(\mathcal{F})\int (\sum_{j\in I} h_j) f = (\mathcal{F})\int \sum_{j\in I} h_j f \tag{22}$$

Egalitățile (21) și (22) implică

$$(\mathcal{F})\int (\sum_{j\in I} h_j) f = \sum_{j\in I} (\mathcal{F})\int h_j f;$$

deci teorema 13 este demonstrată.

Din teoremele 12 și 13 obținem următorul:

Corolar. *Dacă $(\alpha_j)_{j\in I}$, $(\beta_j)_{j\in I}$ sînt două familii finite de elemente din $R$ și pentru fiecare $j \in I$ și $j \in J$,*

$$h_j \in M_T(E,R),\ f_j \in M_T(E,F)$$

*funcția*

$$f = \left(\sum_{i \in I} \alpha_i h_i\right)\left(\sum_{I \in I} \beta_j f_j\right)$$

*este integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}$ *dacă* $h_j f_j$ $((j, i) \in I \times J)$ *este și*

$$(\mathfrak{F})\int f = \sum_{(j,i) \in I \times J} \alpha_j \beta_i \int h_j f_i$$

*Integralele date de Onicescu.* Fie $F$ modulul considerat mai sus și $\mathfrak{L}^*(F)$ mulțimea endomorfismelor (algebrice) ale modulului $F$. Fie

$$h \in M_T(E, \mathfrak{L}^*(F))$$

și

$$f \in M_T(E, F)$$

Fie $hf$ funcția definită pentru $a \in T$ prin egalitatea

$$(hf)(a) = \{e(y) \mid e \in h(a),\ y \in I(a)\}$$

Integrale de tipul

$$(\mathfrak{F})\int hf, \tag{23}$$

au fost recent introduse și utilizate de Onicescu în problemele de Calculul Probabilităților [1]).

Este ușor de văzut că integralele precedente studiate în acest număr sînt cazuri particulare ale integralei (23); este suficient pentru aceasta să identificăm fiecare element $\gamma \in R$ cu endomorfismul spațiului $F$,

$$y \to \gamma\, y$$

Dacă $h$ este o funcție aditivă și $f$ o aplicație a mulțimii $E$ în $F$ vom folosi pentru integrala (23) una din notațiile (14) sau (15) introduse mai sus.

**5. Exemple**

1) Fie $I = [a,b]$ un interval închis și $\mathfrak{D}_I$ grupoidul introdus în exemplul 1, 1, §1. Pentru fiecare interval $J \in \mathfrak{I}(I)$, fie $\mathfrak{D}_I(J)$ mulțimea diviziunilor $x = (I_j)_j \in A^{\varepsilon}\, \mathfrak{D}_I$ pentru care

$$\bigcup_{j \in A} I_j = J.$$

Pentru diviziunile $x \in \mathfrak{D}_I(J)$ și $y \in \mathfrak{D}_I(J)$ vom scrie $x \leqslant y$ dacă fiecare interval din diviziunea $y$ este conținut într-un interval din diviziunea $x$. Relația $x \leqslant y$ este o relație de ordine pe mulțimea $\mathfrak{D}_I(J)$ și $\mathfrak{D}_I(J)$ este filtrantă pentru această relație de ordine.

---

[1]) Cazuri particulare au fost considerate de [15] și [5].

Notăm $\mathfrak{F}(J)$ filtrul pe $\mathfrak{D}_I$ care are ca bază mulțimea secțiunilor lui $\mathfrak{D}_I(J)$. Filtrele $\mathfrak{F}(J)$ au proprietățile:

1° *Dacă* $(J_j)_{j\in A}$ *este o diviziune, familia de filtre* $(\mathfrak{F}(j_j))_{j\in A}$ *are proprietatea* $(D)$.

2° *Dacă* $(J)j\in A\in \mathfrak{D}_I(J)$ *atunci*

$$\bigcap_{j\in A}\mathfrak{F}(J_j) = \mathfrak{F}(J)$$

Fie $F$ un semigrup uniform și

$$f\in M_{I(I)}(I,F)$$

Definiția 4. *Vom spune că funcția* $f$ *este* $(\alpha')$ *integrabilă pe intervalul* $J\in\mathfrak{J}(I)$ *dacă este integrabilă pentru filtrul* $\mathfrak{F}(J)$. *Integrala*

$$(\mathfrak{F}(J))\int f$$

*o vom numi* $(\alpha')$ *— integrala funcției* $f$ *pe intervalul* $J$ *și o vom nota*

$$(\alpha)\int_J f \tag{24}$$

Din teoremele demonstrate în 3 și din proprietățile 1° și 2° ale filtrelor $\mathfrak{F}(J)$ se deduc imediat proprietățile integralelor (24). De exemplu, din teorema 10 deducem:

*Dacă* $(J_j)_j\in A\in\mathfrak{D}_I(J)$ *și dacă* $f$ *este* $(\alpha)$*-integrabilă pe fiecare* $J_j$ $(j\in A)$ $f$ *este* $(\alpha)$ *integrabilă pe* $J$ *și*

$$\sum_{j\in A}(\alpha)\int_{J_j} f = (\alpha)\int_J f \tag{25}$$

2) Fie $\mathfrak{D}_I$ grupoidul introdus în exemplul precedent [1]). Notăm pentru fiecare diviziune $x = (L_i)_i\in H\in\mathfrak{D}_I$

$$N(x) = \sup_{i\in H}(\text{lung. } L_i)$$

și pentru fiecare interval $J\in\mathfrak{J}(I)$ și $\delta>0$

$$\mathfrak{D}^{\delta}(I) = \{x \mid x\in\mathfrak{D}_I(J),\ N(x)\leqslant\delta\}$$

Mulțimile

$$\{\mathfrak{D}^{\delta}(I) \mid \delta>0\}$$

formează o bază de filtru pe mulțimea $\mathfrak{D}_I$ ; vom nota filtrul corespunzător prin $\mathfrak{F}'(J)$. Este evident că

$$\mathfrak{F}'(J)\subset\mathfrak{F}(J) \tag{26}$$

pentru orice $J\in\mathfrak{J}(I)$ și că familia de filtre $(\mathfrak{F}(J_j))_{j\in A}$ are proprietatea $(D)$ pentru orice diviziune $(J_j)_j\in A\in\mathfrak{D}_I$.

[1]) Păstrăm notația introdusă.

Fie $F$ un semigrup uniform şi

$$f \in M_{\mathcal{J}(I)}(I,F)$$

Definiţia 5. *Vom spune că funcţia $f$ este $(\alpha')$-integrabilă pe intervalul $J \in \mathcal{J}(I)$ dacă este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}'(J)$. Integrala*

$$(\mathcal{F}'(J))\int f$$

*o vom numi $(\alpha')$ - integrala funcţiei $f$ pe intervalul $J$ şi o vom nota*

$$(\alpha')\int_J f \tag{27}$$

*Observaţie.* Din relaţia (26), între filtrele $\mathcal{F}'(J)$ şi $\mathcal{F}(J)$ urmează că orice funcţie $f$, $(\alpha')$ - integrabilă pe intervalul $J$ este şi $(\alpha)$ - integrabilă pe intervalul $J$ şi

$$(\alpha')\int_J f = (\alpha)\int_J f$$

Reciproca nu este întotdeauna adevărată. Dacă luăm $I=[1,1]$ şi

$$f(J) = \begin{cases} \{0\} & \overset{\circ}{J} \not\ni 0 \\ \{1\} & \overset{\circ}{J} \ni 0 \end{cases} \tag{28}$$

funcţia $f$ este $(\alpha)$ - integrabilă pe intervalul $I$ şi

$$(\alpha)\int_I f = 0,$$

dar nu este $(\alpha')$ - integrabilă. Observăm că funcţia $f$ este $(\alpha')$- integrabilă pe intervalele $[-1, 0]$ şi $[0,1]$ şi

$$(\alpha')\int_{[-1,0]} f = (\alpha')\int_{[0,1]} f = 0$$

Presupunem acum că $F$ este un *grup abelian topologic separat*

Definiţia 6. *Vom spune că o funcţie*

$$f \in M_{I(\mathfrak{I})}(I,F)$$

*este continuă, dacă pentru orice vecinătate $V$ a elementului unitate din grupul $F$, există un $\delta_\nu > 0$ şi*

$$f(J) \subset V$$

*dacă*

$$\text{lung. } J \leqslant \delta_\nu$$

Teorema 13. *O funcție continuă $f$ este $(\alpha)$-integrabilă pe intervalul $J \in \mathfrak{J}(I)$, dacă și numai dacă este $(\alpha')$-integrabilă și atunci*

$$(\alpha)\int_j f = (\alpha')\int_j f$$

Va fi suficient să arătăm că dacă $f$ este $(\alpha)$-integrabilă, atunci este și $(\alpha')$-integrabilă.

Fie $U$ o vecinătate a unității în grupul $F$ și $x_0 = (I_i)_i \in H \in \mathfrak{D}_I(J)$ o diviziune pentru care

$$S_f(x) \subset U + (\alpha)\int_j f,$$

dacă $x \in \mathfrak{D}_I(J)$ și $x \geqslant x_0$. Fie $V$ o vecinătate simetrică a unității care verifică relația [1])

$$\overset{((3-n1))}{V} \subset U,$$

unde $n$ este numărul elementelor din $H$ și fie

$$\delta = \inf(\delta V, \text{ lung. } I_i \, (i \in H))$$

Vom arăta că pentru orice $z \in \mathfrak{D}^\delta(J)$

$$S_f(z) \subset \overset{(2)}{U} + (\alpha)\int_J f$$

ceea ce va implica $(\alpha')$-integrabilitatea funcției $f$.

Fie $Z = (L_j)_{j \in B} \in \mathfrak{D}^\delta(J)$ o diviziune, $B_1$ mulțimea indicilor $j \in B$ pentru care $L_j$ este conținut într-un interval $I_i$ și $B_2 = \complement B_1$; atunci $B_2$ are cel mult $n$-1 elemente. Avem

$$S_f(z) - (\alpha)\int_J f = \sum_{j \in B} f(L_j) - (\alpha)\int_J f = \sum_{j \in B_1} f(L_j) + \sum_{j \in B_2} f(L_j) - (\alpha)\int_J f$$

$$\sum_{j \in B_1} f(L_j) - (\alpha)\int_j f + \overset{n-1)}{V} \subset \sum_{\in B_1} f(L_j) + \sum_{(j,i) \in M} f(L_j \cap I_i) - \sum_{(j,i) \in M} f(L_j \cap I_i)$$

$$- (\alpha)\int_J f + \overset{(n-1)}{V}$$

unde $M$ este mulțimea perechilor de indici $(j, i)$, pentru care $L_j \cap I_i$ este

---

[1]) Pentru orice vecinătate $W$ și întreg $p > 0$ notăm

$$\overset{(p)}{W} = W + W + \ldots + W$$

un interval (nedegenerat) $\neq L_j$; $M$ conține cel mult $2(n-1)$ elemente. Urmează

$$\sum_{\in B_1} f(L_j) + \sum_{(j,i)\in M} f(L_j \cap I_i) - \sum_{(j,i)\in M} f(L_j \cap I_i) - (\alpha)\int_J f \subset U + V^{(2(n-1))}$$

și deci

$$S_f(z) \subset U + V^{(3(n-i))} + (\alpha)\int_J f \subset U^{(2)} + (\alpha)\int_J f,$$

Deci funcția $f$ este $(\alpha')$-integrabilă pe intervalul $J$. Din teoremele demonstrate în 3 se deduc proprietățile integralei (27); din teoremele 9 și 13 deducem:

*Dacă* $(J_j)_{j\in A} \in \mathfrak{D}_I(J)$, *și dacă* $f$ *este continuă și* $(\alpha')$*-integrabilă pe fiecare interval* $J_j$ $(j \in A)$, $f$ *este* $(\alpha')$*-integrabilă pe intervalul* $J$ *și*

$$\sum_{J\in A} (\alpha')\int_{J_j} f = (\alpha)\int_J$$

*Observații. a)* Integrala lui Burkill vezi în [29] este un caz particular al integralei (27).

*b)* Din observația făcută după definiția 5 se vede că teorema 9 nu este adevărată, fără ipoteze suplimentare, pentru integrala (27).

*c)* Nu orice funcție $f$, continuă, este $(\alpha')$-integrabilă sau $(\alpha)$-integrabilă. De exemplu, dacă $f$ este o funcție reală definită pe intervalul $I$ și dacă punem pentru orice interval $J = [\alpha,\beta]$

$$f(J) = \{\, |f(\beta) - f(\alpha)| \,\},$$

atunci $f$ este $(\alpha)$-integrabilă dacă și numai dacă $f$ are variația mărginită.

3) Fie $E$ o mulțime, $I$ o mulțime de părți ale lui $E$ și $T(E)$ grupoidul introdus în exemplul 3, 1, § 1. Pentru fiecare $a \in T$ fie $T_E(a)$, mulțimea partițiunilor $x = (a_i)_{i\in A}$ pentru care

$$\bigcup_{i\in A} a_i = a$$

Pentru două partițiuni $x \in T_E(a)$ și $y \in T_E(a)$, vom scrie $x \leq y$ dacă fiecare mulțime din $y$ este conținută într-o mulțime din $x$. Relația $\leq$ este o relație de ordine și $T_E(a)$ este filtrantă pentru această relație [1]).

Pentru fiecare $a \in T$ să notăm cu $\mathcal{F}(a)$, filtrul, pe $T(E)$, care are ca bază mulțimea secțiunilor mulțimii ordonate $T_E(a)$. Se arată fără dificultate că filtrele $F(a)$ au proprietățile:

1° *Dacă* $(a_i)_{i\in A}$ *este o partițiune, familia* $(\mathcal{F}(a_i))_{i\in A}$ *are proprietatea* $(D)$

2° *Dacă* $(a_i)_{i\in A} \in T_E(a)$, *atunci*

$$\bigcap_{i\in A} \mathcal{F}(a_i) = \mathcal{F}(a)$$

[1]) Presupunem în acest exemplu că pentru orice familie finită $(a_i)_{i\in A}$ de mulțimi din $T$

$$\bigcap_{i\in A} a_i \in T$$

Fie $F$ un semigrup uniform și

$$f \in M_T(E, F)$$

D e f i n i ț i a 7. *Vom spune că funcția $f$ este* ($\beta$) *- integrabilă pe mulțimea $a \in T$, dacă este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}(a)$.*

*Integrala*

$$(\mathcal{F})\,(a))\int f$$

*o vom numi* ($\beta$) *- integrala funcției $f$ pe mulțimea $a$ și o vom nota*

$$(\beta)\int_J f \tag{29}$$

Proprietățile integralei (29) se deduc din teoremele generale demonstrate în 3 și din proprietățile filtrelor $\mathcal{F}(a)$.

*Observații. a*) Integrala *aditivă* a lui A. C o l m o g o r o v [6] este un caz particular al integralei (29).

*b*) Dacă $T$ este un trib care conține mulțimea $E$, $g$ o funcție reală sau complexă mărginită și $T$ măsurabilă, $\mu$ o măsură complet aditivă definită pe tribul $T$ și dacă funcția $f$ este definită pentru fiecare $a \in T$ prin egalitatea

$$f(a) = \mu(a)g(a),$$

atunci funcția $f$ este ($\beta$) - integrabilă pe mulțimea $E$ iar integrala

$$(\beta)\int_E f,$$

este *integrala Radon-Stieltjes* a funcției $f$ în raport cu măsura $\mu$.

*c*) In legătură cu exemplul 3, vom mai formula cîteva definiții și vom demonstra cîteva rezultate.

Fie $F$ un *grup topologic ordonat.* O aplicație $f$ a mulțimii $T$ în $F$ *este superior semiaditivă* dacă pentru orice $a \in T$ și $x = (a_i)_{i \in A} \in T_E(a)$,

$$f(a) \leqslant \sum_{i \in A} f(a_i),$$

$f$ este *inferior semiaditivă dacă* pentru orice $a \in T$ și $x = (a_i)_{i \in A} \in T_E(a)$.

$$f(a) \geqslant \sum_{i \in A} f(a_i).$$

O aplicație $f$ a mulțimii $T$ în $F$ are *variația superioară mărginită,* dacă mulțimea

$$\left\{\sum_{i \in A} f(a_i) \mid (a_i)_{i \in A} \in T_E(E)\right\} \tag{30}$$

este *majorată, f* are *varicția inferioară mărginită,* dacă mulțimea (30) este minorată.

Marginea superioară, a mulțimii (30), dacă există, va fi numită *variația superioară* a funcției $f$ (pe mulțimea $E$) și notată $\overline{W}_f(E)$. Marginea inferioară va fi numită *variația inferioară* și notată $\underline{W}_f(E)$.

Se pot da definiții corespunzătoare dacă se consideră numai partițiuni $x \in T_E(a)$, unde $a \in T$. Variațiile superioară și inferioară, vor fi notate respectiv $\overline{W}_f(a)$ și $\underline{W}_f(a)$.

Dacă $f$ este superior semiaditivă și are variația superioară mărginită pe mulțimea $a \in T$, atunci mulțimea

$$\mathfrak{M}_f(a) = \{\sum_{i \in A} f(a_i) \mid (a_i)_{i \in A} \in T_E(a)$$

este filtrantă pentru relația $\leqslant$ și majorată și deci

$$\underline{W}_f(a) = \inf \mathfrak{M}_f(a) = \lim_{x \in \mathfrak{M}_f(a)} x \tag{31}$$

Din (31) și (32) urmează

$$\overline{W}_f(a) = \sup \mathfrak{M}_f(a) = \lim_{x \in \mathfrak{M}_f(a)} x \tag{32}$$

Dacă $f$ este inferior semiaditivă și are variația inferioară mărginită pe mulțimea $a \in T$

*Dacă funcția* $f$[1]) *este superior (inferior) semiaditivă și are variația superioară (inferioară) mărginită pe mulțimea* $a \in T$, $f$ *este* ($\beta$)*-integrabilă pe mulțimea* $a$ *și*

$$(\beta)\int_a f = \overline{W}_f(a) \quad ((\beta)\int_a f = \underline{W}_f(a))$$

Din proprietățile integralei deducem că variațiile $\overline{W}_f$ și $\underline{W}_f$ sînt funcții aditive de mulțime.

[1]) Identificăm în acest enunț mulțimile cu un element cu elementul corespunzător.

## IV. INTEGRALE COMPLET ADITIVE

### § 1. Grupoizi completi. Sume Lebesgue.

#### 1. Grupoizi completi

Definiția 1. *Vom numi grupoid complet, o mulțime $G$ pe care s-a definit o lege de compoziție*

$$(x_i)_{i\in A} \to \bigcirc_{i\in A} x_i \tag{33}$$

*care la familii numărabile*[1] $(x_i)_{i\in A}$ *de elemente din $G$ face să corespundă un element din $G$, $\bigcirc_{i\in A} x_i$, și care are proprietățile:*

1° *dacă $\bigcirc_{i\in A} x_i$ este definit*[2] *și $\varphi$ este o permutare a mulțimii $A$, $\bigcirc_{i\in A} x_{\varphi(i)}$ este definit și*

$$\bigcirc_{i\in A} x_i = \bigcirc_{i\in A} x_{\varphi(i)};$$

2° *dacă $\bigcirc_{i\in A} x_i$ este definit și $(A_\lambda)_{\lambda\in B}$ este o partiție a lui $A$*

$$\bigcirc_{\lambda\in B}\ (\bigcirc_{i\in A_\lambda} x_i)$$

*este definit și*

$$\bigcirc_{i\in A} x_i = \bigcirc_{i\in B}\ (\bigcirc_{\lambda\in A_\lambda} x_i);$$

3° *există un element neutru $e$.*

Un grupoid complet este un grupoid conform definiției 1,1, §1, III.

Dacă $(X_i)_{i\in A}$ este o familie numărabilă de părți ale grupoidului complet $G$, vom nota, ca și în cazul unui grupoid, prin $\bigcirc_{i\in A} X_i$ mulțimea elementelor $\bigcirc_{i\in A} x_i$ (definite), unde $x_i \in X_i$ pentru fiecare $i \in A$. Mulțimea $\bigcirc_{i\in A} x_i$ este întotdeauna bine definită.

*Exemple de grupoizi* 1) Fie $E$ o mulțime nevidă și $T$ o familie de părți ale lui $E$ care conține o parte nevidă. Vom numi *partiție numărabilă* orice familie numărabilă de mulțimi disjuncte, nevide din T; fie $T^*(E)$ mulțimea tuturor partițiunilor. Dacă $(x_i)_{i\in A}$ este o familie numărabilă de elemente din $T^*(E)$ i dacă două mulțimi oarecare luate respectiv din $x_\nu$, și $x_\mu$ $(\nu \neq \mu)$ sînt disjuncte, vom nota $\bigcirc_{i\in A} x_i$, partiționea numărabilă formată cu mulțimile tuturor partițiunilor $x_i$ $(i \in A)$. Atunci legea de compoziție

$$(x_i)_{i\in A} \to \bigcirc_{i\in A} x_i,$$

definește pe $T^*(E)$ o structură de grupoid, pentru care partiționea vidă, $e$, este elementul neutru.

---

[1]) Legea de compoziție (33) nu este definită necesar pentru orice familie numărabilă $x_i$ $i \in A$ de elemente din $G$.

[2]) Ori de cîte ori vom scrie $\bigcirc_{i\in A} x_i$ vom subînțelege că familia $(x_i)_{i\in A}$ este numărabilă.

Acest exemplu corespunde exemplului 1, 1, § 1, I.

2) Fie $X$ o mulțime reticulată care conține cel puțin două elemente și care are un cel mai mic element $\varnothing$. Vom numi *partițiune numărabilă*, prin analogie cu exemplul 1) de mai sus, orice familie numărabilă de elemente din $X \neq \varnothing$, disjuncte două cîte două. Fie $P^*$ mulțimea acestor partițiuni. Putem defini pe $P^*$ o structură de grupoid complet, făcînd ca la orice familie numărabilă de partițiuni din $P^*$, $(x_i)_{i \in A}$, pentru care două elemente oarecare din $x_\nu$ și $x_\mu$ $(\nu \neq \mu)$ sînt disjuncte să corespundă partițiunea numărabilă formată cu elementele tuturor partițiunilor $x_i (i \in A)$.

Dacă presupunem că mulțimea $T$ din exemplul 1 conține mulțimea vidă $\varnothing$ și este reticulată pentru relația de incluziune, atunci $T^*(E)$ este o particularizare a grupoidului complet $P^*$. Exemplul 2 este analog cu exemplul 4, 1, § 1, III.

3) Fie $E$ o mulțime și $T$ o familie de părți ale lui $E$, care conține o parte nevidă. Fie $G$ un *grupoid complet*, ale cărui elemente sînt familii numărabile [1]) formate cu mulțimi nevide din $T$ și care are proprietatea:

*dacă* $(x_i)_{i \in A}$ *este o familie numărabilă de elemente din* $G$ *și* $\bigcirc_{i \in A} x_i$ *este definit,* $\bigcirc_{i \in A} x_i$ *este format cu mulțimile din fiecare familie* $x_i$ $(i \in A)$.

De exemplu, dacă

$$x_i = (a_j^i)_{j \in A^i} \quad (i \in A)$$

și $\bigcirc_{i \in A} x_i$ este definit, atunci

$$\bigcirc_{i \in A} x_i = (a_j^i)_{(i,j) \in M^2)}$$

în care

$$M = \bigcup_{i \in A} \{i\} \times A^i$$

## 2. Sume Lebesgue

Fie $G$ un grupoid și $F$ un semigrup uniform.

Definiția 2. *O funcție* $S$ *definită pe o parte* $D_S \subset G$ *cu valori în* $\mathfrak{P}(F)$ *este o sumă Lebesgue dacă:*

**1°** *pentru orice familie numărabilă* $(x_i)_{i \in A}$ *de elemente din* $D_S$ *pentru care* $\bigcirc_{i \in A} x_i$ *este definit și aparține lui* $D_S$, *familia* $(S(x_i))_{i \in A}$ *este sumabilă și*

$$S(\bigcirc_{i \in A} x_i) = \sum_{i \in A} S(x_i);$$

**2°** *pentru orice* $x \in D_S$, $S(x) \neq \varnothing$;

**3°** *elementul neutru* $e$ *al grupoidului* $G$, *aparține lui* $D_S$ *și* $S(e) = \{\bigcirc\}$.

$D_S$ va fi numit de definiție al sumei Lebesgue $S$. Dacă $D_S = G$ $S$ suma Lebesgue, este o sumă Riemann conform definiției 2,2, § 1, III.

---

[1]) O aceeași mulțime poate intra de mai multe ori în familia considerată; eventual de infinitate de ori.

[2]) Două familii $(b_i)_{i \in B}$ și $(c_j)_{j \in C}$ sînt identice dacă există o aplicație biunivocă $\varphi$ a mulțimii $B$ pe mulțimea $C$ și

$$b_i = c_{\varphi(i)}$$

pentru fiecare $i \in B$.

Dacă $(X_i)_{i\in A}$ este o familie numărabilă de părți ale domeniului de definiție $D_S$,

$$\hat{S}(D_S \cap \underset{i\in A}{\circ} X_i) \subset \sum_{i\in A} \hat{S}(X_i). \tag{34}$$

în care prin

$$\sum_{i\in A}' S(X_i)$$

am notat mulțimea sumelor $\sum_{i\in A} z_i$, corespunzătoare familiilor sumabile $(z^i)_{i\in I}$ ($z_i \in \hat{S}(X_i)$, $i \in A$). Evident incluziunea (2) nu poate fi înlocuită întotdeauna prin egalitate; înlocuirea poate fi făcută dacă pentru orice familie numărabilă $(x_i)_{i\in A}$, $(x_i \in X_i)$, $i \in A)$, $\underset{i\in A}{\circ} x_i$ este definit și aparține domeniului de definiție $D_S$.

*Exemple de sume Lebesgue.* Vom da mai jos două exemple de sume Lebesgue corespunzătoare exemplelor 2 și 3 de la (2, § 1, III).

1) Fie $T^*(E)$ grupoidul considerat în exemplul 1, din 1, $F$ un semigrup uniform și

$$f \in M_T(E, F)$$

Fie $D_S$ mulțimea partițiunilor numărabile $(a_i)_{i\in A} \in T^*(E)$ pentru care familia $(f(a_i))_{i\in A}$ este sumabilă. Pentru fiecare $x = (a_i)_{i\in A} \in D_S$ fie

$$S(x) = \sum_{i\in A} f(a_i)$$

Se vede fără dificultate că $S$ este o sumă Lebesgue. Verificarea condițiilor 2° și 3° este imediată. Pentru verificarea condiției 1° să luăm $x_i = (a_j^i)_{j\in A^i} \in D_S$ $(i \in A)$; familia $f(a_j^i))_{j\in A^i}$ este deci sumabilă $(i \in A)$. Dacă $\underset{i\in A}{\circ} x_i$ este definit și aparține lui $D_S$

$$\underset{\in A}{\circ} x_i = (a_j^i)_{(j,i)\in M}$$

în care

$$M = \bigcup_{i\in A} \{i\} \times A^i$$

și familia $(f(a_j^i))_{(j,i)\in M}$ este sumabilă. După propoziția 1, 3, §1, I

$$S(\underset{i\in A}{\circ} X_i) = \sum_{(j,i)\in M} f(a_j^i) = \sum_{i\in A} \sum_{j\in A^i} f(a_j^i) = \sum_{i\in A} S(x_i)$$

și deci $S$ este o sumă Lebesgue. Vom nota adesea această sumă, ca și în cazul sumelor Riemann, prin $S_f$.

2) Fie $G$ grupoidul complet introdus în exemplul 3 de la 1, $F$ un semigrup uniform și

$$f \in M_T(E, F)$$

Fie $D_S$ mulţimea elementelor $(a_i)_{i\in A} \in G$ pentru care familia $(f(a_i))_{i\in A}$ este sumabilă şi fie

$$S(x) = \sum_{i\in A} f(a_i),$$

pentru fiecare $x = (a_i)_{i\in A} \in G$. Se arată în exemplul 1 că $S$ este o sumă Lebesgue, care are pe $D_S$ ca domeniu de definiţie. Această sumă Lebesgue o vom nota de asemenea $S_f$.

## § 2. Integrale complet aditive

### 1. Filtre pe grupoizi completi

Fie $G$ un grupoid complet.

Definiţia 1. *Vom spune că o familie numărabilă nevidă de filtre* $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ *are proprietatea* $(D^*)$ *dacă pentru fiecare* $i \in I$ *există o mulţime* $X_i \in \mathcal{F}_i (i \in I)$ *astfel încît pentru orice* $x_i \in X$

$$\bigcirc_{i\in I} x_i$$

*este definit.*

Din definiţie se deduce imediat că o familie finită nevidă de filtre are proprietatea $(D^*)$ dacă şi numai dacă are proprietatea $(D)$.

Dacă familia numărabilă nevidă de filtre, $(\mathcal{F}_i)_i \in I$ are proprietatea $(D^*)$ atunci mulţimea tuturor părţilor de forma

$$\bigcirc_{i\in I} X_i \tag{35}$$

în care $X_i \in \mathcal{F}_i (i \in I)$ formează o bază de filtru pe grupoidul complet $G$[1]).

Filtrul generat de baza formată cu mulţimile (35) va fi notat

$$\bigcirc_{i\in I} \mathcal{F}_i$$

### 2. Sume Lebesgue complet integrabile

Fie $F$ un semigrup uniform, $G$ un grupoid complet, $S$ o sumă Lebesgue definită pe $D_S \subset G$ şi $\mathcal{F}$ un filtrul pe $G$.

Definiţia 2. *Vom spune că suma Lebesgue* $S$ *este complet integrabilă pentru filtrul* $\mathcal{F}$ *dacă* $D_S \in \mathcal{F}$ *şi filtrul de bază* $\hat{S}(\mathcal{F})$ [2]) *converge către o limită. Vom numi această limită integrala completă a sumei* $S$ *şi o vom nota*

$$(\mathcal{F}, c)\int S. \tag{36}$$

---

[1]) Într-adevăr, dacă $Y_i \in \mathcal{F}_i$ şi $Z_i \in \mathcal{F}_i$ $(i \in I)$ $(\bigcirc_{i\in I} Y_i) \cap (\bigcirc_{i\in I} Z_i) \supset \bigcirc_{i\in I} Y \cap Z_i)$ şi proprietatea $(D^*)$ implică

$$\bigcirc_{i\in I} X_i = \varnothing$$

pentru orice familie $(X_i)_{i\in I}$ în care $X_i \in \mathcal{F}_i$ $(i \in I)$.

[2]) De fapt filtrul considerat este filtrul de bază $\hat{S}(\mathcal{F}_{D_S})$.

Cînd nu va fi posibilă nici o confuzie în loc de *complet integrabilă* și *integrala completă* vom spune *integrabilă* și *integrală*.

Vom enunța și demonstra o serie de proprietăți ale integralei (36), corespunzătoare proprietăților demonstrate în 2, § 2, III.

Teorema 1. *Dacă* $S_1$ *și* $S_2$ *sînt două sume Lebesgue iar:*

1° $D_{S_2} \subset D_{S_1}$ ;

2° $S_1(x) \subset S_2(x)$ *pentru orice* $x \in D_{S_2}$ ;

3° $S_2$ *este integrabilă pentru filtrul* $\mathcal{F}$ ; *atunci* $S_1$ *este integrabilă pentru filtrul* $\mathcal{F}$ *și*

$$(\mathcal{F}, c)\int S_1 = \mathcal{F}, c)\int S_2.$$

La fel ca și teorema 1, de la 2, § 2, III, teorema precedentă se deduce din propoziția 3 de la 2, § 2, I.

Fie $I$ o mulțime oarecare, $F_j$ $(j \in I)$ un semigrup uniform și $S_j$ $(j \in I)$ o sumă Lebesgue definită pe $D_{S_j} \subset G$ cu valori în $\mathfrak{X}(F_j)$.

Fie

$$D_S = \bigcap_{j \in I} D_{S_j}$$

și pentru fiecare $x \in D_S$, fie

$$S(x) = \prod_{j \in I} S_j(x).$$

Vom arăta că $S$ este o *sumă Lebesgue* care are ca domeniu de definiție partea $D_S \subset G$. Condițiile 2° și 3° (definiția 2, 2, § 1) se verifică imediat. Rămîne să verificăm condiția 1°. Fie pentru aceasta $(x_i)_{i \in A}$ o familie numărabilă de elemente din $D_S$ pentru care $\bigcirc_{i \in I} x_i$ este definit și aparține lui $D_S$. Atunci familia $(S_j(x_i))_{i \in A}$ este sumabilă și

$$S_j\left(\bigcirc_{i \in A} x_i\right) = \sum_{i \in A} S_j(x_i)$$

pentru fiecare $j \in I$; deducem că familia $\left(\prod_{j \in I} S_j(x_i)\right)_{i \in A}$ este sumabilă și [1])

$$\sum_{i \in A} S(x_i) = \sum_{i \in A}\left(\prod_{j \in I} S_j(x_i)\right) = \prod_{j \in I}\left(\sum_{i \in A} S_j(x_i)\right) = \pi_{j \in I} S_j\left(\bigcirc_{i \in A} x_i\right) = S\left(\bigcirc_{i \in A} x_i\right)$$

Deci $S$ este o sumă Lebesgue.

Fie $F$ un semigrup uniform și $\varphi$ o reprezentare continuă a semigrupului produs, $\pi_{j \in A} F_j$ în $F$; atunci $\varphi \circ S$ [2]) este o sumă Lebesgue și în același mod ca în capitolul III, putem demonstra:

---

[1]) Dacă pentru fiecare $j \in I$, $(X_j)_{j \in A}$ este o familie sumabilă de părți ale semigrupului $F_j$, atunci familia $\left(\prod_{j \in I} X_j^i\right)_{i \in A}$ este sumabilă și

$$\sum_{i \in A}\left(\prod_{j \in I} X_j^i\right) = \prod_{j \in I}\left(\sum_{i \in A} X_j^i\right)$$

[2]) Notăm tot cu $\varphi$ extensiunea la mulțimea părților produsului $\pi_{j \in I} F_j$.

Teorema 2. *Dacă $\mathcal{F}$ este un filtru pe grupoidul complet $G$, $D_S \in \mathcal{F}$ şi $S_j$ este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$ oricare ar fi $j \in I$, $\varphi \circ S$ este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$ şi*

$$(\mathcal{F}, c)\int \varphi \circ S = \varphi\,((\mathcal{F}, c)\int S_j)_{j \in I}).$$

*Observaţii a)* Dacă mulţimea $I$ este finită este suficient să presupunem că $S_j$ este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$, oricare ar fi $j \in I$; această condiţie implică $Ds_j \in \mathcal{F}$ pentru fiecare $j \in I$ şi cum $I$ este finită şi

$$D_S = \bigcap_{j \in I} D_{S_j} \in \mathcal{F}.$$

*b)* Dacă

$$I = \{1, 2\} \quad , \quad F_1 = F_2 = F$$

şi $S_1$, $S_2$ sînt integrabile pentru filtrul $\mathcal{F}$, $S = S_1 + S_2$ este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$ şi

$$(\mathcal{F}, c)\int (S = (\mathcal{F}, c)\int S_1 + (\mathcal{F}, c)\int S_2$$

*c)* Dacă $(\alpha, x) \to \alpha\, x$ este o lege de compoziţie şi dacă

$$\alpha\,(x + y) = \alpha\, x + \alpha\, y$$

şi aplicaţia $x \to \alpha x$ este continuă, $\alpha S$ este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$ dacă $S$ este integrabilă şi

$$(\mathcal{F}, c)\int (\alpha\, S) = \alpha\,((\mathcal{F}, c)\int S)$$

Teorema 3. *Dacă $F$ este un grup topologic ordonat, $\mathcal{F}$ un filtru pe grupoidul $G$ şi $S$ o sumă Lebesgue cu valori în $\mathfrak{X}(F)$ integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$,*

$$(\mathcal{F}, c)\int S \geqslant a$$

*dacă pentru orice $X$*

$$\hat{S}(X) \cap \{x \mid x \geqslant a\} = \varnothing$$

Teorema precedentă corespunde teoremei 3 de la 2, § 2, III şi se demonstrează în acelaşi mod.

Să presupunem acum că $F$ este un semigrup uniform *complet.*

Teorema 4. *Fie $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ o familie numărabilă nevidă de filtre care are proprietatea $(D^*)$ şi $\mathcal{F}$ un filtru mai fin decît filtrul*

$$\bigcirc_{i \in I} \mathcal{F}_i \tag{37}$$

*Dacă $S$ este o sumă Lebesgue integrabilă pentru fiecare $\mathcal{F}_i$ $(i \in I)$ şi $D_S$ aparţine filtrului (37), familia*

$$((\mathcal{F}_i, c)\int S)_{i \in I}$$

*este sumabilă, $S$ este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}$ și*

$$(\mathcal{F}, c)\int S = \sum_{i \in I} (\mathcal{F}_i, c)\int S$$

Este suficient să arătăm că familia

$$((\mathcal{F}_i, c)\int S)_{i \in I}$$

este sumabilă, că $S$ este integrabilă pentru filtrul (37) și că

$$(\bigcirc_{i \in I} \mathcal{F}_i, c)\int S = \sum_{i \in I} (\mathcal{F}_i, c)\int S$$

Fie $U$ o împrejurime și $(W)_{i \in I}$ o familie de împrejurimi care pentru orice parte finită $I' \subset I$ verifică relația

$$\sum_{i \in I} W_i \subset U \text{ [1]}$$

Fie $X_i \in \mathcal{F}_i$ $(i \in I)$ o mulțime pentru care

$$\hat{S}(X_i) \times \{(\mathcal{F}_i, c)\int S\} \subset W_i$$

atunci pentru orice parte finită $I' \subset I$

$$(\sum_{i \in I'} \hat{S}(X_i)) \times \{\sum_{i \in I'} (\mathcal{F}_i, c)\int S\} \subset \sum_{i \in I'} W_i U \tag{38}$$

Cum

$$D_S \cap \bigcap_{i \in I} X_i = \varnothing$$

și cum $F$ este complet, urmează că familia

$$((\mathcal{F}_i, c)\int S)_{i \in I}$$

ste sumabilă. Din relația (38) deducem

$$\sum_{i \in I}' \hat{S}(X_i) \times \{\sum_{i \in I} (\mathcal{F}_i, c)\int S\} \subset \overline{U}$$

și deci

$$\hat{S}(D_S \cap \bigcirc_{i \in I} X_i) \times \{\sum_{i \in I} (\mathcal{F}_i, c)\int S\} \subset \overline{U}$$

Deci $S$ este integrabilă pentru filtrul (37) și

$$(\bigcirc_{i \in I} \mathcal{F}_i, c)\int S = \sum_{i \in I} (\mathcal{F}_i, c)\int S$$

[1]) Condiția (*c*) de la 1, § 1, I.

*Observații a*). Din teorema 4 se deduce *aditivitatea completă* a integralelor particulare.

*b*). Condiția ca semigrupul $F$ să fie complet, poate fi omisă dacă presupunem că $S$ este integrabilă pentru (37); obținem în acest caz următorul rezultat:

*Dacă $S$ este integrabilă pentru filtrul* (37) *și pentru fiecare filtru* $\mathcal{F}_i$ $(i \in I)$, *familia*

$$\left((\mathcal{F}_i, c)\int S\right)_{i \in I}$$

*este sumabilă și*

$$(\mathcal{F}, c)\int S = \sum_{i \in I} (\mathcal{F}_i, c)\int S.$$

Alegem o familie de părți $(X_i)_{i \in I}$, $X_i \in \mathcal{F}_i$ $(i \in I)$ pentru care

$$\hat{S}(X_i) \times \left\{(\mathcal{F}_i, c)\int S\right\} \subset W_i \tag{39}$$

oricare ar fi $i \in I$ și

$$\hat{S}\left(\bigcirc_{i \in I} X_i\right) \times \left\{\bigcirc_{i \in I} \mathcal{F}_i, c\right)\int S\Big\} \subset U \tag{40}$$

Din relația (39) deducem relația (38) și din (38) și (40) sumabilitatea familiei

$$\left((\mathcal{F}_i, c)\int S\right)_{i \in I}$$

și egalitatea

$$(\bigcirc_{i \in I} \mathcal{F}_i, c)\int S = \sum_{i \in I} (\mathcal{F}_i, c)\int S$$

Să presupunem că $F$, este un *grup abelian topologic separat și complet.*

Teorema 5. *Fie $S$ o sumă Lebesgue cu valori în $\mathfrak{L}(F)$, integrabilă pentru filtrul* F. *Dacă* $(\mathrm{F}_i)_{i \in I}$ *este o familie numărabilă nevidă de filtre care are proprietatea (D*) și dacă*

$$\bigcirc_{i \in I} \mathcal{F}_i \supset \mathcal{F} \text{ și } D_S \in \mathcal{F}_i \ (i \in I)$$

*atunci $S$ este integrabilă pentru fiecare filtru* $\mathcal{F}_i$ $(i \in I)$

Fie $X \in \mathcal{F}$ o mulțime pentru care

$$\hat{S}(X) - \hat{S}(X) \subset V,$$

în care $V$ este o vecinătate a unității grupului $F$. Fie $(X_i)_{i \in I}$ o familie de părți, $X_i \in \mathcal{F}_i$ $(i \in I)$ care verifică relația

$$\bigcirc_{i \in I} X_i \subset X.$$

Atunci

$$\hat{S}(D_S \cap X_i) - \hat{S}(D_S \cap X_i) \subset \hat{S}(X) - \hat{S}(X) \subset V$$

pentru fiecare $i \hat{S} I$ dacă familia $(X_i)_{i \in I}$ este aleasă convenabil; deci baza de filtru $\hat{S}(\mathcal{F}_i)$ este o bază de filtru Cauchy și cum $F$ este complet, $S$ este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}_i$.

*Observații.* *a*) Teorema 5 permite o formulare mai generală a rezultatului în observația *b* făcută după teorema 4, dacă $F$ este un grup complet și anume integrabilitatea pentru fiecare filtru $\mathcal{F}_i (i \in I)$ se deduce din integrabilitatea pentru filtrul (37).

*b*) Observația făcută după teorema 5, de la 2, § 2, III arată că dacă $F$ este un semigrup uniform, teorema nu rămîne necesar adevărată.

### 3. Funcții complet integrabile

Fie $E$ o mulțime nevidă, $T$ o familie de părți ale mulțimii $E$ care conține o parte nevidă și $G$ un grupoid complet (exemplul 3, 1, §1) format cu familii numărabile de mulțimi nevide din $T$ și care are proprietatea: *dacă* $(x_i)_{i \in A}$ *este o familie numărabilă de elemente din* $G$ *și* $\bigcirc_{i \in A} x_i$ *este definit,* $\bigcirc_{i \in A} x_i$ *este format cu mulțimile din fiecare familie* $x_i (i \in A)$

Fie $F$ un semigrup uniform,

$$f \in M_T(E,F)$$

și $D_S$ mulțimea familiilor $(a_i)_{i \in A}$ din $G$ pentru care familia $(f(a_i))_{i \in A}$ este sumabilă și $S_f$ suma Lebesgue (exemplul 2, 2, §1) definită pentru fiecare $x = (a_i)_{i \in A} \in D_S$ prin egalitatea

$$S_f(x) = \sum_{i \in A} f(a_i)$$

Definiția 3. *Vom spune că funcția* $f$ *este complet integrabilă pentru filtrul* $\mathcal{F}$, *dacă* $S_f$ *este complet integrabilă pentru filtrul* $\mathcal{F}$. *Vom numi integrala completă a sumei* $S_f$ *integrala completă a funcției* $f$ *și o vom nota*

$$(\mathcal{F}, c)\int f$$

În loc de complet integrabilă și integrală completă, vom spune numai integrabilă și integrală cînd nu va fi nici o confuzie.

La fel ca pentru integralele aditive, din teoremele demonstrate în 2 pentru sumele Lebesgue se deduc o serie de teoreme pentru integralele (40). Vom enunța o singură teoremă care se deduce din teorema 4 și vom lăsa formularea celorlalte rezultate în seama cititorului.

Teorema 6. *Fie* $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ *o familie numărabilă nevidă de filtre care are proprietatea* $(D^*)$ *și* $\mathcal{F}$ *un filtru mai fin decît filtrul*

$$\bigcirc_{i \in I} \mathcal{F}$$

*Dacă* $D_{S_f}$ *aparține filtrului de mai sus și dacă* $f$ *este integrabilă pentru fiecare filtru* $\mathcal{F}_i (i \in I)$, *familia*

$$\left((\mathcal{F}_i, c)\int f\right)_{i \in I}$$

*este sumabilă, $f$ este intergrabilă pentru filtru $\mathcal{F}$ şi*

$$(\mathcal{F},c)\int f = \sum_{i\in I}(\mathcal{F}_i,c)\int f$$

**4. Exemple**

Fie $E$ o mulţime, $T$ o familie de părţi care conţine o parte nevidă şi $T'(E)$ grupoidul complet introdus în exemplul 1,1 de la § 1. Presupunem că orice intersecţie finită nevidă de mulţimi din $T$ aparţine lui $T$ şi pentru orice $a\in T$ notăm $T_E^*(a)$ mulţimea partiţiunilor $x=(a_i)_{i\in A}\in T^*(E)$ pentru care

$$a=\bigcup_{i\in A} a_i$$

Dacă pentru două partiţiuni oarecare $x\in T_E^*(a)$ şi $y\in T_E^*(a)$ scriem $x\leqslant y$ cînd orice mulţime din $y$ este conţinută într-o mulţime din $x$, atunci relaţia definită este o relaţie de ordine pe mulţimea $T_E^*(a)$ şi din condiţia impusă familiei $T$ deducem că $T_E^*(a)$ este filtrantă.

Notăm pentru fiecare $a\in T$, prin $\mathcal{F}^*(a)$ filtrul pe grupoidul complet $T^*(E)$ care are ca bază secţiunile mulţimii $T_E^*(a)$. Se demonstrează fără dificultate că:

1° *Dacă* $(a_i)_{i\in A}\in T^*(E)$, *familia de filtre* $(\mathcal{F}^*(a_i))_{i\in A}$ *are proprietatea* $(D^*)$.

2° *Dacă* $(a_i)_{i\in A}\in T_E^*(a)$,

$$\bigcirc_{i\in A}\mathcal{F}^*(a_i)=\mathcal{F}^*(a).$$

Fie $F$ un semigrup uniform şi

$$f\in M_T(E,F)$$

Definiţia 4. *Vom spune că funcţia $f$ este integrabilă pe mulţimea $a\in T$ dacă este integrabilă pentru filtrul $\mathcal{F}^*(a)$. Integrala*

$$(\mathcal{F}(a),c)\int f$$

*o vom numi integrala funcţiei $f$ pe mulţimea $a$ şi o vom nota*

$$(c)\int_a f \tag{41}$$

Integrala (41) coincide cu integrala complet aditivă a lui A. Colmogorov [6] sau cu integrala complet aditivă a lui O. Nycodim [20] dacă se particularizează convenabil semigrupul $F$ şi funcţia $f$. Integrala lui G. Birkhoff [4], de asemenea este un caz particular al integralei (41); $F$ este în acest caz un spaţiu Banach, iar funcţia $f$ este de forma

$$(a)=\mu(a)\,g(a)$$

pentru fiecare $a\in T$, $\mu$ este o măsură reală complet aditivă, iar $g$ o aplicaţie a mulţimii $E$ în $F$. Integrale de tipul celor introduse de O. Onicescu 4, § 2,III; [8]) pot fi de asemenea considerate.

Din proprietățile integralei (41) ne mărginim să enunțăm.

3° *Dacă* $(a_i)_{i\in A} \in T_E^*(a)$ *și* $f$ *este integrabilă pe mulțimea* $a$ *și pe fiecare* $a_i$ $(i \in A)$, *familia*

$$\left((c)\int_{a_i} f\right)_{i\in A}$$

*este sumabilă și*

$$(c)\int_a f = \sum_{i\in a} (c)\int_{a_i} f$$

4° *Dacă* $f$ *este complet aditivă, atunci* $f$ *este integrabilă pe fiecare mulțime* $a \in T$ *și*

$$(c)\int_a f = f(a).$$

În formularea ultimului rezultat am identificat mulțimile cu un singur element cu elementul corespunzător.

Vom face cîteva considerații asemănătoare cu cele din exemplul 3 de la 5, § 2, III.

Fie $F$ un *grup topologic ordonat.* O aplicație $f$ a mulțimii $T$ în $F$ se numește *superior complet semiaditivă* dacă pentru orice $a \in T$ și $(a_i)_{i\in A} \in T_E^*(a)$.

5° familia $(f(a_i))_{i\in A}$ este sumabilă;

6° $f(a) \leqslant \sum_{i\in A} f(a_i)$.

Funcția $f$ se numește *inferior complet semiaditivă* dacă pentru orice $a \in T$ și $(a_i)_{i\in A} \in T_E^*(a)$.

7° familia $(f(a_i))_{i\in A}$ este sumabilă;

8° $f(a) \geqslant \sum_{i\in A} f(a_i)$.

Ca și în exemplul 3 menționat mai sus putem defini *variația totală superioară* pe mulțimea $a$, $\overline{W}_f^*(a)$ și *variația totală inferioară* pe mulțimea $a$, $\underline{W}_f^*(a)$.

Cu aceste definiții și notații putem formula următorul rezultat:

*Dacă funcția* $f$ *este superior (inferior) complet semiaditivă și are variația totală superioară (inferioară) mărginită pe mulțimea* $a \in T$, *funcția* $f$ *este integrabilă pe mulțimea* $a$ *și*

$$(c)\int_a f = \overline{W}_f^*(a), \left((c)\int_a f = \underline{W}_f^*(a)\right)$$

Urmează pentru orice $(a_i)_{i\in A} \in T_E^*(a)$

$$\overline{W}_f^*(a) = \sum_{i\in A} \overline{W}_f^*(a_i) \qquad \left(\underline{W}_f^*(a) = \sum_{i\in A} \underline{W}_f^*(a_i)\right)$$

*Observație.* Dacă $f$ este o funcție reală $\geqslant 0$, aditivă, definită pe un trib $T$, $f$ este superior și inferior semiaditivă și

$$\overline{W}_f(a) = \underline{W}_f(a) = f(a)$$

pentru orice mulțime $a \in T$. Dacă $f$ nu este superior complet semiaditivă

$$(\beta)\int_a f = f(a) > (c)\int_a f = \underline{W}_f^*(a)$$

**5. Teoreme de comparație**

Vom da mai jos două teoreme de comparație între integrala ($\beta$) introdusă în definiția 7 de la 5, § 2, III și integrala completă (41) introdusă în definiția 4 din 4.

Pentru simplificarea expunerii vom presupune că familia de mulțimi $T$ este un *clan* care conține mulțimea $E$, adică:

1° $E \in T$;

2° $a \in T$ și $b \in T$ implică $a \cup b \in T$;

3° $a \in T$ și $b \in T$ implică $a \cap \complement b \in T$.

Vom mai presupune că $F$ este un grup abelian topologic separat.

Definiția 5. *O funcție*

$$f \in M_T(E,F)$$

*este continuă* [1]) *dacă pentru orice șir de mulțimi nevide din* T,

$$a_1 \supset a_2 \supset \ldots \supset a_n \supset \ldots$$

*pentru care*

$$\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} a_n = \Phi,$$

*familia* $(f(a_n))_{1 \leqslant n < \infty}$ *converge către zero după filtrul secțiunilor mulțimii* $\{n \mid 1 \leqslant n < \infty\}$.

Propoziția 1. *Fie* 1 *o mulțime numărabilă filtrantă pentru relația* $\leqslant$, $\Phi$ *filtrul secțiunilor mulțimii I și* $(a_i)_{i \in I}$ *o familie de mulțimi nevide din I. Dacă pentru* $i_2 > i_1$,

$$a_{i_1} \supset a_{i_2}$$

*și*

$$\bigcap_{i \in I} a_i = \varnothing,$$

*familia* $(f(a_i)_{i \in I}$ *converge către zero după filtrul* $\Phi$.

Dacă familia $(f(a_i))_{i \in I}$ nu converge către zero, există o vecinătate $V$ a lui zero și pentru orice $i \in I$ un $i_V \geqslant i$ pentru care

$$f(a_{i_V}) \cap \complement V = \varnothing.$$

Fie $(i^n)_{1 \leqslant n < \infty}$ un șir cofinal total ordonat; pentru fiecare n$(1 \leqslant n < \infty)$, să notăm cu $i_v^n$ un element din $I$, $\geqslant i^n$, pentru care

$$f(a_{i_v^n}) \cap \complement V \neq \varnothing$$

putem presupune că șirul $(i_v^n)_{1 \leqslant n < \infty}$ este total ordonat.

---

[1]) În tot acest număr, expresia *funcție continuă* va fi folosită conform cu această definiție.

Dacă notăm

$$b_n = a_{i_\nu}^n, \qquad (1 \leqslant n < \infty),$$

atunci

$$b_1 \supset b_2 \supset \ldots \supset b_n \supset \ldots$$

și

$$\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} b_n = \varnothing$$

și deci familia $(f(b_n))_{1 \leqslant n < \infty}$ converge către zero după filtrul secțiunilor mulțimii $\{n \mid 1 \leqslant n < \infty\}$; dar această concluzie contrazice relațiile (42).

Deci propoziția este demonstrată.

*Observație.* Dacă $F$ este un spațiu normat, $g$ o aplicație mărginită a mulțimii $E$ în $F$ și $\mu$ o funcție reală complet aditivă definită pe $T$, funcția $f$ definită pe $T$ prin egalitatea

$$f(a) = \mu(a)g(a),$$

este continuă.

Teorema 7. *Dacă $f$ este continuă și ($\beta$)-integrabilă pe mulțimea $E$, $f$ este complet integrabilă pe mulțimea $E$ și*

$$(\beta)\int_E f = (c)\int_E f$$

Fie $V$ o vecinătate simetrică a lui zero în grupul $F$ și $x = (a_i)_{i \in I} \in T_E(E$ o partițiune care are proprietatea: dacă $y = (b_\rho)_{\rho \in H} \in T_E(E)$ și $y \geqslant x$, atunci

$$S_f(y) \subset (\beta)\int_E f + V.$$

Fie $z = (c_i)_{i \in k} \in T_E^*(E)$ o partițiune oarecare $\geqslant y$. Vom arăta că familia $(f(c_i))_{i \in k}$ este sumabilă și că

$$S_f(z) \subset (\beta)\int_E f + \overline{(n+1)}V,$$

în care $n$ este numărul elementelor din I.

Pentru orice parte finită $J \subset K$ și $i \in I$ să punem

$$e_{i,J} = a_i \cap \left(\bigcup_{\nu \in Ci} C_\nu\right)$$

dacă $J_2 \supset J_1$ atunci

$$e_{i,T1} \supset e_{i,T2}$$

și

$$\bigcap_J e_{i,J} = \bigcap_J \left(a_i \cap \left(\bigcup_{\nu \in CJ} a\right)\right) = \varnothing,$$

pentru orice $i \in I$. După propoziția 1, urmează

$$f(e_{i,J}) \subset V$$

pentru orice $i \in I$[1]), dacă $J \supset J_0$ şi $J_0$ este o parte finită a lui $K$, aleasă convenabil.

Pentru fiecare parte finită $J \subset K$,

$$\left(\bigcup_{i \in j} c_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} e_{i,J}\right) = E$$

deci mulţimile $c_i$ $(i \in J)$ şi mulţimile nevide $e_{i,J}$ $(i \in I)$ formează o partiţiune aparţinînd lui $T_E(E)$, şi această partiţiune este evident $\geqslant x$. Urmează dacă $J \supset J_0$

$$\sum_{i \in I} f(c_i) \subset \sum_{i \in I} f(c_i) + \sum_{i \in I} f(e_{i,J}) - \sum_{i \in I} f(e_{i,J})$$

$$\subset (\beta)\int_E f + \overset{(n+1)}{V} \tag{43}$$

Din relaţia (43) deducem

$$\sum_{i \in I_1} f(c_i) - \sum_{i \in I_2} f(c_i) \subset \overset{(n+1)}{V},$$

dacă $J_1 \cap J_2 \supset J_0$; deci familia $(f(c_i))_{i \in K}$ este sumabilă; urmează

$$\sum_{i \in K} f(c_i) \subset (\beta)\int_E f + \overset{(n+1)}{V},$$

ceea ce arată că funcţia $f$ este complet integrabilă pe mulţimea $E$ şi

$$(c)\int_E f = (\beta)\int_E f.$$

*Observaţie.* Dintr-o observaţie făcută la sfîrşitul nr. 4, urmează că integralele

$$(\beta)\int_E f \text{ şi } (c)\int_E f$$

pot exista fără ca să fie egale. Vom da acum un exemplu simplu datorit lui A. Kolmogorov. Fie $E = (0.1]$ şi $T$ cel mai mic clan care conţine intervalele $(\alpha, \beta]$ $(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1)$. Fie $f$ funcţia definită pentru $a \in T$ prin egalitatea

$$f(a) = \begin{cases} \{u\} & \text{dacă } a = (0, \beta] \\ 0 & \text{dacă } a \neq (0, \beta] \end{cases}$$

în care $u$ este un element $\neq 0$ din $F$. Este uşor de văzut că

$$(\beta)\int_{(0,1]} f = u.$$

---

[1]) Întrucît $I$ este o mulţime finită.

Deoarece $\left(\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right)_{1 \leqslant n < \infty} \in T_E^*(E)$ și cum

$$f\left(\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) = 0,$$

pentru fiecare $n$ $(1 \leqslant n < \infty)$ urmează

$$(c)\int_{(0,1)} f = 0$$

Deci funcția $f$ este $(\beta)$-integrabilă și complet integrabilă și integralele corespunzătoare sînt diferite.

Definiția 6. *O funcție*

$$f \in M_T(E, F)$$

*este tare continuă dacă pentru orice șir de mulțimi nevide*

$$a_1 \supset a_2 \supset \ldots \supset a_n \supset \ldots$$

*pentru care*

$$\bigcap_{1 \leqq n < \infty} a_n = \Phi$$

*și pentru orice șir de partițiuni* $(x_n)_{1 \leqslant n < \infty}$, $x_n \in T_E(a_n)$, *familia* $(S_f(x_n))_{1 \leqq n < \infty}$ *converge către zero după filtrul secțiunilor mulțimii* $\{n \mid 1 \leqslant n < \infty\}$.

*Observații.* Orice funcție tare continuă este și continuă. Dacă $f$ este additivă, atunci $f$ este tare continuă dacă și numai dacă $f$ este continuă.

Propoziția 2. *Fie $I$ o mulțime numărabilă filtrantă pentru relația $\leqslant$, $\Phi$ filtrul secțiunilor mulțimii $I$ și $(a_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi nevide din $I$. Dacă pentru $i_2 > i_1$*

$$a_{i_1} \supset a_{i_2}$$

și

$$\bigcap_{i \in I} a_i = \varnothing,$$

*atunci familia de mulțimi*

$$(\hat{S}_f(T_E(a_i)))_{i \in I}, \tag{44}$$

*converge către zero după filtrul* $\Phi$.

Dacă familia (44) nu converge către zero după filtrul $\Phi$, există o vecinătate $V$ a lui zero, și pentru orice $i \in I$ un $i_V \geqslant i$ și o partițiune $x^{iV} \in T_E(a_{i_V})$ pentru care

$$S_f(x^{i_V}) \cap \complement V \neq \varnothing \tag{45}$$

Luăm un şir $(i^n)_{1 \leqslant n < \infty}$ total ordonat cofinal şi pentru $n$ fiecare $n(1 \leqslant n < \infty)$ să notăm $i_v^n$ un indice $\geqslant i^n$ pentru care

$$S_f(x)\ n\ C\ V \neq \varnothing;$$

putem presupune şirul $(i^n)_{1 \leqslant n < \infty}$ total ordonat. Dacă

$$x_n = x^{i_v^n} \qquad (1 \leqslant n < \infty)$$

atunci familia $(S_f(x_n))_{1 \leqslant n < \infty}$ converge către zero, ceea ce este contradictoriu cu relaţiile (45). Deci propoziţia este demonstrată.

Teorema 8. *Fie $f$ o funcţie tare continuă, $f$ este complet integrabilă pe mulţimea $E$ dacă şi numai dacă $f$ este* ($\beta$) *- integrabilă pe mulţimea $E$ şi*

$$(c)\int_E f = (\beta)\int_E f$$

(m) Dacă funcţia $f$ este tare continuă şi ($\beta$)-integrabilă, din teorema (7) se deduce integrabilitatea completă a funcţiei $f$ şi egalitatea

$$(c)\int_E f = (\beta)\int_E f$$

(n) Presupunem funcţia $f$, complet integrabilă. Fie $V$ o vecinătate simetrică a lui zero şi $x = (a_i)_{i \in I} \in T_E^*(E)$, o partiţiune care are proprietatea: orice partiţiune $y \in T_E^*(E), \geqslant x$, aparţiune lui $D_{S_f}$ şi

$$S_f(y) \subset (c)\int_E f + V$$

Fie $I_0 \subset I$ o parte finită care are proprietăţile:

1° $$\sum_{i \in \mathbf{C} I_0} f(a_i)\ \mathbf{C}\ V;$$

° pentru orice partiţiune

$$z \in T_E\Big(\bigcup_{i \in \mathbf{C} I_0} a_i\Big),$$

avem

$$S_f(z) \subset V\ ^{1}).$$

Fie $t = (d_j)_{j \in L} \in T_E(E)$ o partiţiune $\geqslant$ decît partiţiunea formată cu mulţimile $a_i$ $(i \in I_0)$ şi $\bigcup_{i \in \mathbf{C} I_0} a_i$. Fie $L_0 \subset L$ astfel încît

$$\bigcup_{j \in L_0} d_j = \bigcup_{i \in I_0} a_i$$

[1]) Proprietatea 2° este o consecinţă a propoziţiei 2.

Atunci partiţiunea formală cu mulţimile $d_j\,(j \in L_0)$ şi $a_i\,(i \in C\, I_0)$ este $\geqslant x$ şi deci

$$\sum_{j \in L_0} f(d_j) + \sum_{i \in C I_0} f(a_i) \subset (c)\int_E f + V.$$

Dar

$$S_f(l) \subset \sum_{j \in L_0} f(d_j) + \sum_{j \in C L_0} f(d_j) + \sum_{i \in C I_0} f(a_i) - \sum_{i \in C I_0} f(a_i) - \sum_{I_0} f(a_i) \subset (c)\int_E f + \overset{(3)}{V}$$

întrucît $(d_j)_{j \in} \; L_0 \in T_E\,(\bigcup_{i \in C I_0} a_i)$. Deci $f$ este $(\beta)$-integrabilă pe mulţimea $E$ şi

$$(c)\int_E f = (\beta)\int_E f$$

**6. Sume Lebesgue absolut convergente**

Fie $E$ o mulţime, $T$ o familie de părţi ale lui $E$, care conţine o parte nevidă şi $T^*\,(E)$ grupoidul complet introdus în exemplul 1) din 1, § 1 pe care l-am considerat şi la 4. Fie $F$ un *spaţiu Banach*,

$$f \in M_T\,(E, F),$$

$D_S$ mulţimea partiţiunilor $x = (a_i)_{i \in A} \in T^*\,(E)$ pentru care familia $(f(a_i))_{i \in A}$ este convergentă şi pentru fiecare $x \in D_S$,

$$S_f(x) = \sum_{i \in A} f(a_i)$$

Fie $B_f$ mulţimea elementelor $x = (a_i)_{i \in A} \in T^*\,(E)$ pentru care familia $(f\,(a_i))_{i \in A}$ este *absolut sumabilă*; este evident că

$$B_f \subset D_S\,.$$

Definiţia 7. *Vom spune că o funcţie $f$ este $(\gamma)$-integrabilă pe mulţimea $a \in T$ dacă*

1° $B \in F^*\,(a)$;

2° *filtrul de bază $\hat{S}_f\,(F^*\,(a))$ are o limită.*

Din definiţie urmează că orice funcţie $f$, $(\gamma)$-integrabilă pe mulţimea $a \in T$ este şi complet integrabilă şi

$$\lim\, \hat{S}_f\,(F^*\,(a)) = (c)\int_a f^{1})$$

Pentru integralele complete ale funcţiilor $(\gamma)$-integrabile se pot formula şi demonstra proprietăţi care în general nu sînt adevărate pentru integralele

[1]) Din acest motiv nu introducem un nou nume şi un nou simbol pentru integrala completă a unei funcţii $(\gamma)$-integrabilă.

complete. Mai jos vom da cîteva din aceste proprietăţi şi vom face cîteva observaţii privind relaţiile între funcţiile complete integrabile şi funcţiile $(\gamma)$-integrabile

Teorema 9. *Dacă funcţia $f$ este $(\gamma)$-integrabilă pe mulţimea $a \in T$ şi $(a_i)_{i\in I} \in T_E^*(a)$, funcţia $f$ este $(\gamma)$-integrabilă pe mulţimea $a_i$ $(i \in I)$, familia*

$$\left( (c)\int_{a_i} f \right)_{i\in I} \tag{46}$$

*este absolut sumabilă şi*

$$(c)\int_a f = \sum_{i\in I} (c)\int_{a_i} f \tag{47}$$

(i) Din teorema 5 urmează că funcţia $f$ este complet integrabilă pe mulţimea $a_i$ $(i \in I)$. Pentru a deduce $(\gamma)$-integrabilitatea funcţii, este suficient să observăm că pentru orice parte $B \subset A$, familia $(f(c_i))_{i\in B}$ este absolut sumabilă dacă familia $(f(c_i))_{i\in A}$ este absolut sumabilă.

(ii) După teorema 4, familia (46) este sumabilă, şi egalitatea (47) este satisfăcută. Rămîne deci de demonstrat că familia (46) este absolut sumabilă.

Fie $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ o familie sumabilă de numere strict pozitive şi pentru fiecare $i \in I$, $X_i$ o mulţime din filtrul $\mathcal{F}^*(a_i)$ care verifică relaţia

$$\hat{S}(X_i) \subset W_i\left((c)\int_{a_i} f\right), \tag{48}$$

în care

$$W_i = \{(x, y) \mid \quad \|x - y\| \leqslant \varepsilon_i\}$$

Putem presupune că $\underset{i\in I}{\circ} x_i$ este definit pentru orice famile de elemente $(x_i)_{i\in I}$ din produsul $\prod_{i\in I} X_i$ şi

$$\underset{i\in I}{\circ} X_i \subset B_f,$$

întrucît prin ipoteză $B_f \in \mathcal{F}^*(a)$. Atunci dacă

$$z_i \in \hat{S}(X_i) \qquad (i \in I),$$

familia $(z_i)_{i\in I}$ este absolut sumabilă; din relaţia (48) deducem pentru fiecare $i \in I$,

$$\|(c)\int_{a_i} f\| \leqslant \|z_i\| + \varepsilon_i$$

şi deci

$$\sum_{i\in I} \left\| (c)\int_{a_i} f \right\| \leqslant \sum_{i\in I} \qquad (\|z_i\| + \varepsilon_i)$$

Deci familia (46) este absolut sumabilă, iar teorema este demonstrată. Pentru orice funcţie

$$f \in M_T(E, F),$$

să notăm $\|f\|$ funcția definită pentru orice $a \in T$ prin egalitatea

$$\|f\|(a) = \{\|y\| \mid y \in f(a)\}$$

Din definiția 7 se deduce că *funcția f este* ($\gamma$)*-integrabilă pe mulțimea* $a \in T$, *dacă funcțiile f și* $\|f\|$ *sînt complet integrabile*; este suficient să observăm că

$$B_f = B_{\|f\|}$$

și că integrabilitatea completă a funcției $f$ pe mulțimea $a \in T$ implică

$$B_f = B_{\|f\|} \in \mathcal{T}^*(a)$$

Reciproca nu este adevărată; ($\gamma$)-integrabilitatea pe mulțimea $a \in T$, nu atrage integrabilitatea funcției $\|f\|$ pe mulțimea $a$. Luăm ca exemplu [1]) $E = [0,1]$, $F$ spațiul Banach al funcțiilor reale mărginite definite pe $E$ normat prin

$$\|g\| = \sup_{t \in E} |g(t)|,$$

$T$ familia mulțimilor $a \subset E$ măsurabile Lebesgue și $\mu$ măsura Lebesgue. Dacă $g_m$ este o aplicație a lui $E$ în $F$ definită prin egalitatea

$$g_m = \begin{cases} 0 & x \in \mathbf{C}\, m \\ \varphi_{\{x\}}\ ^{2}) & x \in m \end{cases}$$

în care $m \in \mathcal{S}(E)$ și $f$ funcția definită prin egalitatea

$$f(a) = \mu(a)\, g(a).$$

$f$ este complet integrabilă pe mulțimea $E$ și

$$(c)\int_E f = 0;$$

deoarece $g$ este mărginită [3]) și $\mu(E) = 1$,

$$B_f = T^*(x)$$

și deci $f$ este ($\gamma$)-integrabilă. Totuși $\|f\|$ nu este integrabilă pentru orice mulțime $m \in \mathcal{S}(E)$ întrucît

$$\|f\|(a) = \mu(a)\, \varphi_m(a)$$

Dacă $m \in T$, $\|f\|$ este integrabilă. Din integrabilitatea funcției $f$ nu rezultă *integrabilitatea în sensul lui Bochner* a funcției $g$. Dacă luăm $m = E$, atunci

$$\varphi_m = 1$$

și

$$\|f\|(a) = \mu(a);$$

deci $\|f\|$ este integrabilă. $g$ nu este însă integrabilă Bochner întrucît subspațiul $g(\mathbf{C}m_0)$ nu este separabil oricare ar fi mulțimea $m_0$ de măsură Lebesgue

---

[1]) $\varphi_e$ este funcția caracteristică a mulțimii $e$.

[2]) Utilizarea *contraexemplelor* de această formă este, desigur, datorită neseparabilității spațiului Banach $F$.

[3]) Această observație este generală; o funcție de forma (49) este ($\gamma$)-integrabilă dacă este complet integrabilă întrucît

$$B_f = T^*(E)$$

nulă. Reciproc însă, dacă funcţia $g$ este integrabilă Bochner, funcţia $f$ este $(\gamma)$-integrabilă.

*Dacă*

$$f \in M_T(E, F)$$

*şi* $\|f\|$ *sînt complet integrabile, atunci*

$$\|(c)\int_a f\| \leqslant (c)\int_a \|f\| \tag{50}$$

Inegalitatea (50) este o consecinţă imediată a inegalităţii

$$\sup \|\hat{S}_f(X)\| \leqslant \sup \hat{S}_{\|f\|}(X)\ ^1)$$

valabilă pentru orice $X \in F(a)$.

Ca încheiere vom indica un procedeu simplu prin care pot fi construite exemple de funcţii complet integrabile care nu sînt $(\gamma)$-integrabile. Fie E o mulţime numărabilă şi $(f_t)_{t \in E}$ o familie de elemente care nu este absolut sumabilă, dar care este sumabilă. Fie $T = \mathfrak{T}(E)$ şi pentru orice $a \in T$,

$$f(a) = \{\sum_{t \in a} f_t\}.$$

Evident

$$f \in M_T(E, F),$$

$f$ este complet integrabilă pe orice mulţime $a \in T$ şi

$$(c)\int_a f = \sum_{t \in a} f_t$$

Totuşi $f$ nu este $(\gamma)$-integrabilă pe mulţimea E.

---

[1]) $\|\hat{S}_f(X)\| = \{\|y\| \; y \in \hat{S}_f(X)\}$.

## V. INTEGRALA LUI RICKART

### § 1. Definiția integralei. Proprietă

**1. Filtrele lui Phillips-Rickart**

Fie $E$ o mulțime și $T$ o familie de părți ale mulțimii $E$ care odată cu orice familie finită $(a_j)_{j\in A}$ conține și intersecția $\bigcap_{j\in A} a_j$. Pentru orice mulțime $a\in T$ să notăm $T(a)$ mulțimea familiilor $x\in T(E)$ formate cu submulțimi ale lui $a$; evident $T(a)\supset T_E(a)$. Fie $x=(e_j)_{j\in J}\in T_E(a)$ și $X$ o parte $\neq\varnothing$ a mulțimii $T(a)$; vom spune că $x$ este o *partiție de bază*[1]) a lui $X$ dacă există o parte finită $J_0\subset J$ care are proprietatea: pentru orice parte finită $I\supset J_0$, $(e_j)_{j\in I}\in X$.

Definiția 1. *Pentru orice $a\in T$ fie $\mathcal{R}(a)$ mulțimea părților $X\subset T(a)$ care au proprietatea: există o partiție $x\in T_E^*(a)$ pentru care orice partiție $x'\in T_E^*(a)$, $\geqslant x$ este o partiție de bază a mulțimii $X$.*

Este ușor de văzut că pentru orice $a\in T$, $\mathcal{R}(a)$ este un filtru pe mulțimea $T(a)$, întrucît $T_E^*(a)$ este filtrantă pentru relația $\leqslant$. Filtrele $\mathcal{R}(a)$ le vom numi *filtrele lui Phillips Rickart*, întrucît au fost utilizate de acești autori [24], [25], pentru a defini integrale pentru funcții de punct sau de mulțime luînd valori în spații vectoriale local convexe.

$\mathcal{R}(a)$ considerată ca o familie de părți ale mulțimii $(TE)$ este o bază de filtru; filtrul generat de această bază va fi notat tot prin $\mathcal{R}(a)$ și denumit ca mai sus.

**2. Integrala lui Rickart. Definiții și proprietăți**

Fie $F$ un semigrup uniform și

$$f\in M_T(E,F)$$

Pentru orice $x=(e_i)_{i\in I}\in T(E)$ fie

$$\mathcal{R}_f(x)=\sum_{i\in I} f(e_i)$$

Este ușor de văzut că $\mathcal{R}_f$ este o sumă Riemann pe grupoidul $T(E)$.

Definiția 2. *Vom spune că funcția $f$ este integrabilă Rickart p mulțimea $a\in T$ dacă baza de filtru $\hat{\mathcal{R}}_f(\mathcal{R}(a))$ converge către o limită. Vom numi această limită integrala Rickart a funcției $f$ pe mulțimea $a$ și o vom nota*

$$(r)\int_a f \tag{51}$$

Cînd nu va fi nici o confuzie, vom spune integrabilă și integrală în loc de integrabilă Rickart și integrală Rickart.

Din proprietățile generale ale limitei, rezultă imediat că pentru ca $f$ să fie integrabilă pe mulțimea $a$ este necesar ca $\hat{\mathcal{R}}_f(\mathcal{R}(a))$ să fie o *bază de filtru Cauchy* pe $F$; dacă $F$ este complet, condiția este necesară și suficientă.

Din definiție urmează că integrabilitatea Rickart a funcției $f$ pe mulțimea $a\in T$ este echivalentă, conform cu definiția 3, de la 3, § 2, III, cu integrabilitatea funcției $f$ pentru filtrul $\mathcal{R}(a)$ și

$$(r)\int_a f=(\mathcal{R}(a))\int_a f$$

[1]) Dacă $X$ este mulțimea tuturor familiilor $(e_j)_{j\in I}$ în care $I$ este o parte finită $I_0$ și $J_0$ este o parte finită a mulțimii $J$, $x$ este o partiție de bază a mulțimii $X$.

Rezultă atunci că teoremele 7,8,9,12, de la 3,§ 2,III) cît şi consecinţele lor sînt valabile pentru integrala (51) întrucît demonstrarea acestor teoreme nu foloseşte proprietăţi speciale ale filtrelor considerate. Vom arăta mai jos că teoremele 10 şi 11 cît şi *aditivitatea completă* se pot demonstra şi pentru integrala (51); aceste rezultate se vor deduce din proprietăţile filtrelor $\mathcal{R}(a)$ care vor fi date mai jos.

Definiţiile de la 4, teoremele 13 şi 14 cît şi definiţia dată de O. Onicescu se transpun în mod evident şi pentru integrala (51).

Vom demonstra:

Teorema 1. *Dacă $f$ este o funcţie complet aditivă* [1]) *definită pe $T$, atunci $f$ este integrabilă pe fiecare mulţime $a \in T$ şi*

$$(r)\int_a f = f(a)$$

Este suficient să observăm că dacă $U$ este o împrejurime a semigrupului uniform $F$ şi dacă pentru fiecare $x = (e_i)_{i\in I} \in T_E^*(a)$ notăm cu $x_U$ mulţimea familiilor finite $(e_i)_{i\in J}$ $(J \subset I)$ pentru care

$$\sum_{i\in J} f(e_i) \in U(f(a)),$$

atunci

$$X_U = \bigcup_{x\in T_E^*(a)} x_U$$

aparţine filtrului $\mathcal{R}(a)$ şi pentru orice $y \in X_U$

$$\mathcal{R}_f(y) \in U(f(a))$$

### 3. Filtrele lui Phillips-Rickart

Vom formula acum patru proprietăţi ale filtrelor lui Phillips-Rickart, care vor fi utilizate mai departe pentru a demonstra o serie de proprietăţi ale integralei lui Rickart.

($PR_1$) *Dacă $(a_j)_{j\in I} \in T(E)$ familia de filtre $(R(a_j))_{j\in I}$ are proprietatea (D).*

($PR_2$) *Dacă $(a_j)_{j\in I} \in T_E(a)$,*

$$\bigcirc_{j\in I} \mathcal{R}(a_j) \subset \mathcal{R}(a)$$

($PR_3$) *Dacă $(a_j)_{i\in j} \in T_E^*(a)$ şi $X \in \mathcal{R}(a)$, $X^j \in \mathcal{R}(a)$ $(j \in J)$, atunci există o parte finită $J_0 \subset J$ astfel încît pentru price parte finită $I \subset J$ care conţine pe $J_0$*

$$X \cap \bigcirc_{j\in J} X^j \neq \varnothing$$

($PR_4$) *Dacă $(a_j)_{j\in J} \in T_E^*(a)$, $X^j \in \mathcal{R}(a_j)$ pentru $j \neq j_0$ şi $X \in \mathcal{R}(a)$ există o mulţime $X^{j_0} \in \mathcal{R}(a_{j_0})$ care are proprietatea: pentru orice parte finită*

---

[1]) Identificăm mulţimile cu un singur element cu elmentul corespunzător aşa cum am făcut şi mai înainte.

*nevidă* $Z^{i_0} \subset X^{i_0}$ *se pot determina părți* $Z^i \subset X^i$ *și o parte finită* $J_0$ *a lui* $J$ *astfel încît*

$$\bigcirc_{i \in I} Z^i \subset X$$

*pentru orice parte finită a lui* $J$, *care conține pe* $J_0$.

Pentru a simplifica verificarea proprietăților formulate mai sus, vom nota:

1° pentru orie $x = (a_i)_{i \in I} \in T(E)$ și $a \in T$, prin $x^a$ familia $(a_i \cap a)_{i \in I'}$ în care $I'$ este mulțimea indicilor $i \in I$ pentru care $a_i \cap a \neq \varnothing$; $x^a \in T(E)$ și este posibil ca $x^a = \varnothing$;

2° pentru orice $x = (a_i)_{i \in I} \in T^*(E)$ și $a \in T$, prin $x^a$ familia $(a_i \cap a)_{i \in I'}$ în care $I'$ este mulțimea indicilor $i \in I$ pentru care $a_i \cap a \neq \varnothing$; $x^a \in T^*(E)$ și este posibil ca $x^a = \varnothing$.

($PR_1$) Verificarea proprietății ($PR_1$) este imediată.

($PR_2$) Pentru verificarea proprietății ($PR_2$) să luăm o familie $(X_i)_{i \in I}$ de mulțimi, unde pentru fiecare $i \in I$, $X_i \in \mathcal{R}(a_i)$. Putem presupune că pentru orice $y_i \in X_i$ $(i \in I)$, $\bigcirc_{i \in I} y_i$ este definit. Fie $x_i \in T_E^*(a_i)$ o partițiune de bază a mulțimii $X_i$ $(i \in I)$ și fie $x_0 = \bigcirc_{i \in I} x_i$; vom arăta că orice partițiune din $T_E^*(a)$, $\geqslant x_0$ este o partițiune de bază a mulțimii $\bigcirc_{i \in I} X_i$ ceea ce va implica

$$\bigcirc_{i \in I} X_i \in \mathcal{R}(a)$$

și deci

$$\bigcirc_{i \in I} \mathcal{R}(a_i) \subset \mathcal{R}(a)$$

Fie $x \in T_E^*(a) \geqslant x_0$; atunci $x^{a_i} \geqslant x_i$ și $x^{a_i}$ este deci o partițiune de bază a mulțimii $X_i$ $(i \in I$. Deoarece

$$x = \bigcirc_{i \in I} x_i^a$$

urmează că $x$ este o partițiune de bază a mulțimii $\bigcirc_{i \in I} X_i$

($PR_3$) Fie pentru fiecare $i \in J$, $x_i \in T_E^*(a_i)$ o partițiune de bază a mulțimii $X_i$ astfel încît $\bigcirc_{i \in J} x_i$ este o partițiune de bază a mulțimii $X$. Fie $y_0 \in T(a)$ o parte a familiei $\bigcirc_{i \in J} x_i$ pentru care $y \in X$ dacă $y \in T(a)$, $y$ este o parte a familiei $\bigcirc_{i \in J} x_i$ și $y \supset y_0$. Pentru fiecare $i \in J$ fie $y_i \in T(a_i)$ o parte a familiei $x_i$ pentru care $y \in X_i$ dacă $y \in T(a_i)$, $y$ este o parte a familiei $x_i$ și $y \supset y_i$; putem presupune $y_i \supset y_0^{a_i}$ pentru fiecare $i$. Atunci dacă

$$J_0 = \{ i \mid y_0^{a_i} \neq \varnothing \}$$

pentru fiecare parte finită $I$ a lui $J$ care conține pe $J_0$,

$$\bigcirc_{i \in I} y_i \supset y_0$$

și prin urmare

$$X \cap \bigcirc_{i \in I} X_i \neq \varnothing$$

Deci proprietatea $(PR_1)$ este satisfăcută.

$(PR_4)$ Fie pentru fiecare $j \in J$ o partiţiune $x_j \in T_E^*(a_j)$ cu proprietăţile:

$(\alpha)$ dacă $j \neq j_0$, $x_j$ este o partiţiune de bază a mulţimii $X_j$;

$(\beta)$ dacă $x \in T^*(a)$ şi

$$x \geqslant \underset{j \in J}{\circ} x_j$$

$x$ este o partiţiune de bază a mulţimii $X$.

Fie $X^{j_0}$ mulţimea familiilor de forma $y^{a_{j_0}}$ unde $y$ este o parte finită a unei partiţiuni

$$x \geqslant \underset{j \in J}{\circ} x_j$$

care are proprietăţile:

$(\gamma)$ dacă $j \neq j_0$ $x^{a_j} = x_j$;

$(\delta)$ dacă $y' \supset y$ este o parte finită a familiei $x$, $y' \in X$.

Se vede fără dificultate că $X^{j_0} \in \mathcal{R}(a_{j_0})$. Fie acum $Z^{j_0} \subset X^{j_0}$ o parte finită.

Fie $y_S^{a_{j_0}} (S \in L)$ elementele din $Z^{j_0}$ ($y_S$ este o parte finită a unei partiţiuni $x \geqslant \underset{j \in J}{\circ} x_j$ pentru care proprietăţile $(\gamma)$ şi $(\delta)$ sînt verificate). Pentru fiecare $j \neq j_0$ fie $Z^j$ mulţimea al cărui singur element este o parte finită din $x_j$ aparţinînd mulţimii $X^j$ şi conţinînd fiecare din familiile $y_S^{a_j} (S \in L)$.

Dacă

$$J_0 = \{ j \mid \text{există } s \in L \text{ pentu care } y_S^{a_j} \neq \varnothing \},$$

atunci pentru orice parte finită $I$ a lui $J$, care conţine pe $J_0$

$$\underset{j \in I}{\circ} Z^j \subset X$$

#### 4. Alte proprietăţi ale integralei lui Rickart

Din proprietatea $(PR_2)$ şi din teorema 10 de la 3, § 2, III deducem:

Teorema 2. *Dacă funcţia $f$ este integrabilă Rickart pe fiecare mulţime $a_j$ $(j \in I)$, $f$ este integrabilă Rickart pe mulţimea $a$ şi*

$$(r)\int_a f = \sum_{j \in I} (r)\int_{a_j} f$$

Teorema 3. *(Aditivitatea completă). Fie $(a_j)_{j \in I} \in T_E^*(a)$ şi fie $f$ o funcţie integrabilă pe $a$ şi pe fiecare $a_j$ $(j \in I)$. Atunci familia*

$$\left( (r)\int_{a_j} f \right)_{j \in I}$$

*este sumabilă şi*

$$\sum_{j \in J} (r)\int_{a_j} f = (r)\int_a f.$$

Fie pentru fiecare $j$, o mulțime $X_j \in \mathcal{R}(a_j)$ pentru care

$$\hat{S}_f(X_j) \times \left\{(r)\int_{a_j} f\right\} \subset U_j$$

și $X \in \mathcal{R}(a)$ o mulțime pentru care

$$\hat{S}_f(X) \times \left\{(r)\int_a f\right\} \subset U.$$

Dacă împrejurimile $U_j$ verifică relația

$$\sum_{j\in J} U_j \subset U$$

pentru orice parte finită $J$ a lui $I$ (ceea ce putem presupune) obținem

$$\sum_{j\in J} \hat{S}_f(X_j) \times \left\{(r)\int_{a_j} f\right\} \subset U$$

Din proprietatea ($PR_3$) a filtrului lui Phillips-Rickart, urmează că putem găsi o parte finită $J_0 \subset I$ și în fiecare $X_j$ o familie $x_j$ astfel încît pentru orice parte finită $J \subset I$ care conține pe $J_0$,

$$\underset{j\in J}{\circ} x_j \in X.$$

Atunci

$$\hat{S}_f\left(\underset{j\in J}{\circ} x_j\right) \times \left\{\sum_{j\in J}(r)\int_{a_j} f\right\} \subset U$$

și cum avem și

$$\hat{S}_f\left(\underset{j\in J}{\circ} x_j\right) \times \left\{(r)\int_a f\right\} \subset U,$$

urmează

$$\left(\sum_{j\in J}(r)\int_{a_j} f,\ \int_a f\right) \in U \circ U,$$

deci teorema este demonstrată întrucît $U$ este arbitrară.

*Observație.* In teorema precedentă am presupus integrabilitatea funcției $f$ pe fiecare mulțime $a_j$ ($j \in I$). Integrabilitatea pe $a_j$ nu rezultă necesar din integrabilitatea funcției pe mulțimea $a$, cînd $F$ este un semigrup uniform; integrabilitatea rezultă după cum vom arăta în teorema următoare dacă $F$ este un grup.

Facem acum ipoteza că $F$ este un *grup abelian topoligic separat complet.*

Teorema 4. *Fie* $(a_j)_{j\in J} \in T_E^*(a)$ *și* $f$ *o funcție integrabilă pe mulțimea* $a$. *Atunci* $f$ *este integrabilă pe fiecare mulțime* $a_j$ ($j \in J$), *familia*

$$\left((r)\int_{a_j} f\right)_{j\in J}$$

*este sumabilă şi*

$$\sum_{j\in J}(r)\int_{a_j} f = (r)\int_a f$$

Este suficient să demonstrăm integrabilitatea funcţiei $f$ pe fiecare mulţime $a_{j_0}$ ($j_0 \in J$). Fie $V$ o vecinătate a elementului neutru al grupului $F$ şi $X \in \mathcal{R}(a)$ o mulţime pentru care

$$\hat{S}_f(X) - \hat{S}_f(X) \subset V.$$

Fie $Z^{j_0}$ [1]) o parte finită nevidă a mulţimii $X^{J_0}$; atunci pentru orice parte finită $I$ a lui $J$ care conţine pe $J_0$

$$\hat{S}_f(Z^{j_0}) - \hat{S}_f(Z^{j_0}) \subset \sum_{j\in I}\hat{S}_f(Z^j) - \sum_{j\in I}\hat{S}_f(Z^j) =$$

$$= \hat{S}_f(\bigcirc_{j\in I} Z^j) - \hat{S}_f(\bigcirc_{j\in I} Z^j) \subset V.$$

Prin urmare

$$\hat{S}_f(X^{j_0}) - \hat{S}_f(X^{j_0}) \subset V$$

Deci $\hat{S}_f(\mathcal{R}(a_{j_0}))$ este o bază de filtru Cauchy pe grupul $F$, şi cum $F$ este complet, funcţia $f$ este integrabilă pe $a_{j_0}$.

**5. Integrala multiformă a lui Rickart**

Fie $F$ mulţimea părţilor închise ale unui grup abelian topologic separat în care legea de compoziţie este notată cu $\mathsf{T}$. Legea de compoziţie

$$(X\ Y) \to X\,\mathsf{T}\,Y$$

şi filtrul generat de mulţimile

$$\widetilde{V} = \{(X, Y) \mid X \subset V\,\mathsf{T}\,Y,\ Y \subset V\,\mathsf{T}\,X\}$$

definesc pe $F$ o structură de semigrup uniform, (exemplul 3, dela 1, § 1, I).

Integrala introdusă în acest paragraf, pentru funcţia

$$f \in M_T(E, F)$$

este o generalizare directă a *integralei multiforme* introdusă de E. Rickart [25]

**6, Echivalenţa diferenţială**

Fie $F$ un *grup abelian topologic separat* şi fie

$$f \in M_T(E, F),\ g \in M_T(E, F)$$

Definiţia 3. *Vom spune că funcţiile $f$ şi $g$ sînt diferenţial echivalente pe mulţimea $a \in T$ dacă baza de filtru $\hat{S}_{f-g}(\mathcal{R}(b))$ converge către zero pentru orice mulţime $b \in T$, $b \subset a$.*

---

[1]) Utilizăm notaţiile introduse în formularea proprietăţii ($PR_4$).

Dacă $f$ și $g$ sînt diferențial echivalente pe mulțimea $a \in T$ vom scrie

$$f \sim g \ (a) \tag{52}$$

Din definiție urmează că

$$f \sim g \ (a)$$

dacă și numai dacă

$$(r)\int_b (f-g) = 0 \tag{53}$$

pentru orice mulțime $b \subset a$; dacă $f$ și $g$ sînt integrabile, egalitatea (53) este echivalentă cu egalitatea

$$(r)\int_b f = (r)\int_b g$$

Este ușor de văzut că

$$f \sim g \ (a)$$

și $b \in T$, $b \subset a$ implică

$$f \sim g \ (b)$$

Dacă $(a_j)_{j \in A} \in T_E(a)$ și

$$f \sim g \ (a_j)$$

pentru fiecare $j \in A$, deducem din teorema 2 și egalitatea (53)

$$f \sim g \ (a)$$

Teorema 5. *Dacă*

$$f \sim g \ (a) \text{ și } g \sim h(a)$$

*atunci*

$$f \sim h \ (a).$$

Este suficient să observăm că pentru orice mulțime $b$,

$$(f-h)(b) \subset (f-g)(b) + (g-h)(b)$$

*Observații.* Din teorema 5 și egalitatea (53) deducem imediat că relația

$$f \sim g \ (a) \tag{54}$$

este o relație de echivalență pe mulțimea funcțiilor integrabile. Relația (54) nu este însă o relație de echivalență pe mulțimea $M_T(E,F)$; de exemplu dacă $f(b)=F$ pentru fiecare mulțime $b \in T$, atunci

$$(f-f)(b) = F$$

ceea ce arată că $f-f$ nu este integrabilă dacă $F$ conține mai mult decît un singur element. Să observăm totuși că este posibil ca $f-f$ să fie integrabilă fără ca $f$ să fie integrabilă.

Teorema 6. *Dacă $f$ este integrabilă pe mulțimea $a$*

$$f \sim g\,(a)$$

*atunci $g$ este integrabilă pe mulțimea $b (b \subset a, b \in T)$ și*

$$(r)\int_b f = (r)\int_b g$$

Pentru orice $b \in T$, $b \subset a$

$$g(b) \subset (g-f)(b) + f(b);$$

deci $g$ este integrabilă pen orice mulțime $b$ și

$$(r)\int_b f = (r)\int_b g$$

Teorema 7. *Dacă $f$ este integrabilă pe mulțimea $a$ și*

$$\varphi(b) = (r)\int_b f,$$

*pentru fiecare mulțime $b \subset a$, $b \in T$,*

$$\varphi \sim f(a).$$

*Dacă $\varphi$ este o funcție complet additivă și*

$$\varphi \sim f(a),$$

*$f$ este integrabilă pe mulțimea $a$ și*

$$\varphi(b) = (r)\int_b f,$$

*pentru fiecare mulțime $b \in T$, $b \subset a$.*

Teorema este o consecință imediată a rezultatelor obținute mai sus.

**7. O nouă definiție a echivalenței diferențiale**

Fie $F$ un *semigrup uniform* și

$$f \in M_T(E, F),\ g \in M_T(E\,F)$$

două funcții.

Definiția 4. *Vom spune că funcțiile $f$ și $g$ sînt diferențial echivalente pe mulțimea $a \in T$, dacă pentru orice mulțime $b \in T$, $b \subset X$ și orice împrejurime $U$ există o mulțime $X_b \in \mathcal{R}(b)$*[1]) *care satisface relația*

$$(\widehat{S}f\,(X),\ \widehat{S}_g\,(X) \in \widetilde{U}$$

Dacă $f$ și $g$ sînt diferențial echivalente pe mulțimea $a$ (conform definiției 4) vom scrie

$$f \equiv g\ (a) \qquad (55)$$

[1]) Mulțimea $X$ poate depinde de $b$.

Din definiție deducem:

Teorema 8. *Relația* (55) *este o relație de echivalență pe mulțimea* $M_T(E,F)$

*Observație.* Se vede fără dificultate, dacă $F$ este grup, că

$$f \sim g\ (a)$$

implică

$$f \equiv g\ (a)$$

Implicația reciprocă nu este adevărată.

Teorema 9. *Dacă*

$$f \equiv g\ (a)$$

*și funcția f este integrabilă pe mulțimea a,g este integrabilă pe mulțimea a și*

$$(r)\int_a f = (r)\int_a g$$

Fie $U$ o împrejurime simetrică și $X$ o mulțime din filtrul $\mathcal{R}(a)$ care verifică relațiile:

$$\hat{S}_f(X) \subset U\left((r)\int_a f\right)$$

$$\hat{S}_g(X) \subset U(\hat{S}_f(X)).$$

Urmează

$$\hat{S}_g(X) \subset \overset{(2)}{U}\left((r)\int_a f\right)$$

ceea ce arată că $g$ este integrabilă pe mulțimea $a$ și

$$(r)\int_a g = (r)\int_a f$$

Teorema 10. *Dacă*

$$(r)\int_b f = (r)\int_b g$$

*pentru orice mulțime* $b \subset a$, $b \in T$.

$$f \equiv g\ (a).$$

Fie $b \subset a$, $b \in T$ și $X \in \mathcal{R}(b)$ o mulțime pe care

$$\hat{S}_f(X) \times \left\{(r)\int_b f\right\} \subset U$$

și

$$\hat{S}_g(X) \times \left\{(r)\int_b g\right\} \subset U$$

Urmează

$$\hat{S}_f(X) \times \hat{S}_g(X) \subset \overset{(2)}{U}$$

şi deci

$$(\hat{S}_f(X), \hat{S}_g(X)) \subset \overset{(\widetilde{2})}{U};$$

deci

$$f \equiv g(b)$$

*Observaţii. a)* Pentru relaţia

$$f \equiv g(a)$$

este valabilă o teoremă cu totul asemănătoare cu teorema 7. Lăsăm formularea şi demonstrarea acestei teoreme în seama cititorului.

*b)* Definiţia 3 dată echivalenţei diferenţiale corespunde definiţiei date de A. Kolmogorov. Aşa cum este dată definiţia poate fi formulată numai pentru grupuri. O definiţie care are sens şi în semigrupuri şi care coincide în grupuri cu definiţia 3 se obţine înlocuind (în definiţia 4) relaţia

$$(\hat{S}_f(X), \hat{S}_g(X)) \in \widetilde{U},$$

prin

$$\hat{S}_f(X) \times \hat{S}_g(X) \subset U$$

Definiţia 4 este o generalizare directă pentru semigrupuri a definiţiei dată de E. Rickart pentru spaţii liniare topologice local convexe.

*c)* Dacă $F$ este un grup iar $f$ şi $g$ sînt integrabile pe mulţimea $a \in T$, atunci

$$f \sim g\ (a)$$

dacă şi numai dacă

$$f \equiv g\ (a)$$

**8. Teoreme de comparaţie**

Teorema 11. *Dacă funcţia $f$ este complet integrabilă pe mulţimea $a \in T$, atunci funcţia este integrabilă Rickart şi*

$$(c)\int_a f = (r)\int_a f$$

Fie $U$ o împrejurime simetrică şi $X$ o mulţime din filtrul $\mathcal{F}(a)$ care verifică relaţia

$$\hat{S}_f(X) \subset U\left((c)\int_a f\right);$$

fie pentru fiecare $x \in X$, $x_\cup$ mulţimea familiilor finite $y \subset x$ pentru care

$$S_f(y) \subset U(S_f(x)) \subset U(\hat{S}_f(X))$$

Reuniunea mulțimilor $x_\nu$ aparține filtrului $\mathcal{R}(a)$ și

$$\hat{S}_f(X_\nu) \subset \overset{(2)}{U}\left((c)\int_a f\right)$$

Deci $f$ este integrabilă Rickart pe mulțimea $a$ și

$$(c)\int_a f = (r)\int_a f$$

Teorema 12. *Dacă funcția $f$ este integrabilă Rickart pe mulțimea $a \in T$ și $D_{S_f} \in \mathcal{F}^*(a)$, funcția este complet integrabilă și*

$$(c)\int_a f = (r)\int_a f$$

Este suficient să arătăm că funcția $f$ este complet integrabilă. Fie $X$ o mulțime din filtrul $\mathcal{R}(a)$ care verifică relația

$$\hat{S}_f(X) \subset U\left((r)\int_a f\right)$$

și $x_0 \in T_E^*(a)$ o partițiune care are proprietățile:

1° $x \in D_{S_f}$ dacă $x \geqslant x_0$ și $x \in T_E^*(a)$;

2° $x$ este o partițiune de bază a mulțimii $X$ dacă $x \geqslant x_0$ și $x \in T_E^*(a)$.

Fie $\gamma$ mulțimea partițiunilor $x \in T_E^*(a)$, $x \geqslant x_0$; $y \in \mathcal{F}^*(a)$ și

$$\overline{S_f(x) \subset U\left((r)\int_a f\right)},$$

pentru orice $x \in Y$. Deci

$$\overline{\hat{S}_f(Y) \subset U\left((r)\int_a f\right)},$$

ceea ce arată că funcția $f$ este complet integrabilă pe mulțimea $a$.

*Observație.* R. S. Phillips [24] a arătat că există funcții $f$ de forma

$$f(e) = \mu(e)\, g(e) \qquad (e \in T) \tag{56}$$

în care $\mu$ este o măsură $\geqslant 0$ complet aditivă și $g$ o aplicație a lui $E$ într-un spațiu local convex $F$, care nu sînt complet integrabile, deși sînt integrabile Rickart. Tot R. S. Phillips, în aceeași lucrare, a arătat că dacă $F$ este un spațiu Banach, atunci orice funcție $f$ de forma (56) integrabilă Rickart este și complet integrabilă. Vom da mai jos un exemplu de funcție ale cărei valori sînt elemente dintr-un spațiu Banach, care este integrabilă Rickart dar care nu este complet integrabilă. Evident această funcție nu poate fi de forma (56).

Observăm că, dacă $F$ este un spațiu Banach real sau complex cu un număr finit de dimensiuni și deci, în particular, dacă $F$ este mulțimea numerelor reale sau complexe, orice funcție integrabilă Rickart este și complet integrabilă.

*Exemplu.* Să luăm $F$ ca spaţiu Banach spaţiul funcţiilor mărginite definite pe intervalul [0,1] normat prin

$$\| x \| = \sup_{t \in [0,1]} | x(t) |$$

şi ca funcţie $f$, funcţia definită pentru orice mulţime $e \subset [0,1]$ prin egalitatea

$$f(e) = \delta(e)\, \varphi_e$$

în care $\delta(e)$ este diametrul mulţimii $e$, iar $\varphi_e$ funcţia caracteristică a mulţimii $e$. Este uşor de văzut că *funcţia $f$ este integrabilă Rickart pe intervalul* [0,1] şi că

$$\int_{[0,1]} f = 0$$

Intr-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ şi fie $x = (e_i)_{i \in I}$ o partiţiune a intervalului [0,1] pentru care $\delta(e_i) \leqslant \varepsilon$ oricare ar fi $i$. Atunci pentru orice parte finită $J \subset I$

$$0 \in \sum_{i \in J} f(e_i) = \sum_{i \in J} \delta(e_i)\, \varphi\, e_i \leqslant \varepsilon\, \varphi_e$$

în care

$$e' = \bigcup_{i \in J} e_i$$

Deci

$$\left\| \sum_{i \in J} f(e_i) \right\| \leqslant \varepsilon$$

Deci funcţia $f$ este integrabilă Rickart şi integrala pe intervalul [0,1] este egală cu zero.

Observăm acum că oricare ar fi partiţiunea $x_0$ există o partiţiune $x \geqslant x_0$ pentru care familia $(f(e))_{e \in x}$ nu este sumabilă. Este evident că există $e_0 \in x_0$ care conţine două puncte $p$ şi $q$ neizolate pentru $e_0$. Notăm

$$\delta = | p - q |$$

şi

$$V(p) = \{ r \in e_0 \mid | p - r | \leqslant \delta/4 \},\ V(q) = \{ r \in e_0 \mid q - r | \leqslant \delta/4 \}$$

Fie

$$D(p) \subset V(p) \cap \mathbf{C}_{\{p\}}$$

şi

$$D(q) = V(q) \cap \mathbf{C}_{\{q\}}$$

două mulţimi infinite numărabile şi

$$a = e_0 \cap \mathbf{C}\,(D(p) \cup D(q))$$

şi

$$a_{r,t} = \{ r, t \}$$

pentru orice pereche $(r,t) \in D(p) \times D(q)$. Atunci familia $x$ formată cu părţile $a$, $a_{r,t}$ şi $e \in x_0$, $e \neq e_0$ este evident o partiţiune a intervalului [0,1] $\geqslant x_0$.

Se arată fără dificultate că familia $(f(e))_{e \in x}$ nu este sumabilă; cum spațiul $F$ este complet, este suficient a observa că familia $(f(a_{r,t}))\ (r,t) \in D(p) \times D(q)$ nu este sumabilă întrucît

$$f(a_{r,t}) = \delta(a_{r,t})\, \varphi\, a_{r,t}$$

și prin urmare

$$\| f(a_{r,t}) \| = \delta(a_{r,t}) \geqslant \frac{\delta}{2}$$

Deci *funcția f nu este complet integrabilă.*

## § 2. Integrale slabe

### 1. Definiție

Fie $F$ un spațiu Banach real [1]) și $F'$ dualul său. Topologia *slabă* a spațiului Banach $F$ o vom nota $\sigma(F, F')$; un sistem fundamental de vecinătate al punctului $x_0 \in F$ în topologia $\sigma(F, F')$ este format de mulțimea părților lui $F$ de forma

$$V_\varepsilon(x_0; x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \{ x \mid \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} | x'(x_0) - x'(x) | \leqslant \varepsilon \} \qquad (57)$$

în care $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ sînt $n$ forme liniare continue și $\varepsilon$ un număr $>0$.

Dacă $x' \in F'$ și

$$f \in M_T(E, F),$$

atunci

$$x' \circ f \in M_T(E, R)\ ^2)$$

Definiția 1. *Vom spune că funcția f este slab integrabilă pe mulțimea $a \in T$ dacă pentru orice $b \in T$, $b \subset a$ există un element $I_b \in F$ care verifică egalitatea*

$$x'(I_b) = (c)\int_b x' \circ f$$

*oricare ar fi $x' \in F'$.*

Din definiție deducem că funcția $f$ este slab integrabilă pe orice mulțime $b \in T$, $b \subset a$ dacă este slab integrabilă pe $a$.

Vom numi elementul $I_a$, *integrala slabă* a funcției $f$ pe mulțimea $a$ și vom nota

$$I_a = (s)\int_a f$$

*Observații.* *a*) Dacă $F$ este mulțimea numerelor reale cu structura obișnuită, atunci integrala slabă coincide cu integrala completă.

*b*) Integrala slabă coincide cu integrala introdusă de I. B. Pettis [23] dacă $f$ este de forma

$$f(b) = \mu(b)\, g(b)$$

---

[1]) Această ipoteză nu este esențială.

[2]) Notăm în același mod extensiunea lui $x'$ la mulțimea părților spațiului Banach, $F$.

pentru orice mulțime $b \in T$, în care $\mu$ este o măsură complet aditivă $\geqslant 0$ și $g$ o aplicație a mulțimii $E$ în $F$.

Integrale de același tip, ale căror valori aparțin unui spațiu local convex sau bidualului $F'^*$, pot fi definite în mod analog: aceste integrale sînt generalizări ale integralelor slabe introduse de diferiți autori [9], [12] și [14].

**2. Proprietăți**

Fie

$$f \in M_T(E, F)$$

o funcție slab integrabilă pe mulțimea $a$ și fie $x' \in F'$. Există atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ o partițiune $x \in T_a^*(E)$ care are proprietatea: dacă $y = (e_i)_{i \in A} \in T_a^*(E)$ este $\geqslant x$, familia $(x'(f(ei)))_{i \in A}$ este sumabilă și

$$\left| \sum_{i \in A} x'(f(e_i))) - x'(I_a) \right| \leqslant \varepsilon$$

Dacă $J_0 \subset A$ este o parte finită convenabil aleasă atunci și $J \subset A$ este o parte finită care conține pe $J_0$,

$$\left| \sum_{i \in J} x'(f(e_i)) - x'(I_a) \right| \leqslant 2\varepsilon,$$

sau

$$\sum_{i \in J} f(e_i) - I_a \in V_{2\varepsilon}(I_a; x')$$

dacă utilizăm notația (57) introdusă mai sus. Cum

$$V_{2\varepsilon}(I_a; x_1', \ldots, x_n') = \bigcap_{i=1}^{n} V_{2\varepsilon}(I_a; x_i')$$

urmează

Teorema 1. *O funcție $f$ slab integrabilă pe mulțimea $a$ este integrabilă Rickart pe mulțimea $a$ pentru topologia $\sigma(F, F')$ și*

$$(r)\int_a f = I_a$$

Se deduc imediat o serie de proprietăți ale integralei slabe din care enunțăm numai

1° *Dacă $f$ și $g$ sînt integrabile pe mulțimea $a \in T$ și $\alpha$, $\beta$ sînt două numere reale $\alpha f + \beta g$ este slab integrabilă și*

$$(s)\int_a (\alpha f + \beta g) = \alpha\,(s)\int_a f + \beta(s)\int_a g$$

2° *Dacă $f$ este slab integrabilă pe mulțimea $a$ și $(a_i)_{i \in A} \in T_E^*(a)$ $f$ este slab integrabilă pe fiecare mulțime $a_i$ $(i \in A)$ familia*

$$\left((s)\int_{a_i} f\right)_{i \in A} \tag{58}$$

*este sumabilă pentru topologia* $\sigma(F, F')$

$$\sum_{I \in A} (s)\int_{a_i} f = (s)\int_{a} f$$

*Observații. a*) Din teorema 1 se deduce sumabilitatea familiei (38) pentru topologia slabă $\sigma(F, F')$; sumabilitatea familiei (58) pentru topologia spațiului Banach $F$ se deduce din sumabilitatea slabă dacă $T$ este un trib, întrucît în acest caz pentru orice parte $B \subset A$, familia

$$\left((s)\int_{a_i} f\right)_{i \in B}$$

este sumabilă (pentru topologia $\sigma(F, F')$) și

$$\sum_{i \in B} (s)\int_{a_i} f = (s)\int_{\bigcup_{i \in B} a_i} f$$

*b*) Am arătat mai sus că orice funcție $f$ slab integrabilă este integrabilă Rickart pentru topologia $\sigma(F, F')$. Reciproc orice funcție $f$ integrabilă Rickart pentru topologia spațiului Banach $F$ sau pentru topologia mai puțin fină $\sigma(F, F')$ este slab integrabilă.

## ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА И ИХ ИНТЕГРАЛЫ

### (КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе рассматриваются интегралы для функций множества, значения которых суть части равномерной полугруппы, в которой операция композиции есть равномерно непрерывная. Интегралы А. Колмогорова, К. Е. Рикарта, М. Никодима, также как и интегралы, определенные фильтрами М. Котлара и И. Френкеля, являются частными случаями.

Интегралы определены по некоторым фильтрам, данным на алгебраических системах, резюмирующих существенные свойства частичных систем, обычно принимающих участие в определении интегралов.

В первой части работы введены равномерные полугруппы, во второй дано необходимое и достаточное условие абсолютных непрерывностей, в третьей изучаются аддитивные интегралы, в четвертой — полностью аддитивные интегралы и в последней части определены интеграл типа интеграла, введенного Рикартом, и слабый интеграл, обобщающий интеграл, введенный Ж. Б. Петисом и И. Гельфандом.

# FONCTIONS D'ENSEMBLE ET LEURS INTÉGRALES

## (RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on considère des intégrales pour des fonctions d'ensemble, dont les valeurs sont des parties d'un demi-groupe uniforme dans lequel l'opération de composition est uniformément continue. Les intégrales de A. Kolmogoroff, C. E. Rickart, M. Nycodim ainsi que les intégrales définies par des filtres par M. Cotlar et Y. Frenkel sont des cas particuliers.

Les intégrales sont définies suivant certains filtres donnés sur des systèmes algébriques qui résument les propriétés essentielles des systèmes de partition qui interviennent d'habitude dans la définition de l'intégrale.

Dans la première partie du travail, on introduit les demi-groupes uniformes, dans la seconde, on donne une condition nécessaire et suffisante des continuités absolues, dans la troisième, on étudie les intégrales additives, dans la quatrième, les intégrales complètement additives et dans la dernière, on définit une intégrale du type introduit par Rickart et une intégrale faible, qui généralise l'intégrale introduite par J. B. Pettis et I. Gelfand.

## BIBLIOGRAFIE

1. Aleksandrov A. D., Matem. sbornik, 1941, t. 9, p. 257 — 260.
2. Alexiewicz A., Studia Math., 1949, t. 11, p. 211 — 232.
3. Bourbaki N., *Éléments de Mathématique*. Hermann, Paris, 1943.
4. Birkhoff G., Trans. Amer. Math. Soc., 1935, t. 38, p. 357 — 378.
5. Bochner S. a. Taylor A. E., Annals of Math., 1938, t. 39, p. 913 — 944.
6. Kolmogorov A., Math. Annalen, 1930, t. 103, p. 654 — 697.
7. Cotlar M. şi Fraenkel Y., Univ. Nauc. Tucuman, 1947, t. 6, p. 352 — 371.
8. Day M. M., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, t. 51, p. 467 — 521.
9. Dieudonné J., Annales Univ. Grenoble, 1947 — 1948, t. 23, p. 315 — 347.
10. — Ann. Ec. Norm., 1942, t. 59, p. 267 — 291.
11. Dubrovski V., Matem. sbornik, 1947, t. 20, p. 315 — 334.
12. Dunford N., Trans. Amer. Math. Soc., 1938, t. 44, p. 441 — 453.
13. Fréchet M., Revue Sci., 1944, t. 82, p. 211 — 252.
14. Gelfand I., Trudî Instit. matematiceskih u tehniceskih nauk Harkovskogo Universiteta 1937, t. 13, p. 315 — 328.
15. Gowurin M., Fund. Math., 1936, t. 27, p. 420 — 429.
16. Hildebrant T. H., Bull. Amer. Math. Soc., 1940, t. 46, p. 646.
17. Jeffery R. L., Duke Math. J., 1940, t. 6, p. 706 — 721.
18. Kempisty S., *Fonctions d'intervalle non additives*. Hermann, Paris, 1939.
19. Nycodim M., Anal. Inst. Henri Poincaré, 1949, t. 11, p. 357 — 364.
20. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1947, t. 225, p. 517 — 529.
21. Nakamura Masahiro, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1942, t. 18, p. 238 — 251;
22. Orlicz W., Studia Math., 1929, t. 1, p. 1 — 39 şi 249 — 255.
23. Pettis J. B., Trans. Amer. Math. Soc., 1938, t. 44, p. 621 — 638.
24. Phillips R. S., Trans. Amer. Math. Soc., 1940, t. 47, p. 359 — 467.
25. Rickart C. E., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, t. 52, p. 498 — 521.
26. — Duke Math., 1943, t. 10, p. 653 — 665.
27. Romanovski P., Matem. sbornik, 1941, t. 9, p. 510 — 518.
28. Ringenberg A. L., Duke Math. J. 1948, t. 15, p. 239 — 270.
29. Saks S., *Theory of the interval*. Varşovia, 1937.
30. Stewart F. M., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, t. 68, p. 278 — 289.
31. Van der Lijn G., Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 1941, t. 10, p. 398 — 406.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul V, nr. 1—2, 1954

# ASUPRA GRUPURILOR DE MIŞCARE MAXIME ALE SPAŢIILOR RIEMANNIENE $V_n$

DE

C. TELEMAN

Scopul acestei lucrări este de a arăta că spaţiile simetrice $V_{2p}(\lambda)$, considerate de G. Vrănceanu [4], [1] [5] [2] au un grup maxim de transformări în ele înşile, în categoria spaţiilor $V_{2p}$ ireductibile, cu curbură variabilă.

Spaţiile $V_n$ cu curbură constantă au un grup de transformări în ele înşile cu $n(n+1)/2$ parametri, deci pentru $n = 2p$, acest grup are $2p^2 + p$ parametri, iar grupul de stabilitate are $2p^2 - p$ parametri.

Matematicianul sovietic I. P. Egorov [2] a arătat că un spaţiu $V_n$ al lui Einstein are un grup cu cel mult $n(n-1)/_2 + 2$ parametri, iar spaţiile $V_n$ ce nu sînt ale lui Einstein au un grup cu cel mult $n(n-1)/2 + 1$ parametri, maximul fiind atins de spaţiile reductibile $\mathcal{R}_n$, care sînt produsul direct al unui spaţiu $V_{n-1}$ cu curbură constantă şi al unei drepte euclidiene.

G. Vrănceanu a arătat că spaţiile $\mathcal{R}_n$ sînt singurele spaţii $V_n$ cu curbură variabilă al căror grup are $n(n-1)/2 + 1$ parametri şi că maximul dat de Egorov pentru spaţiile Einstein poate fi atins numai pentru $n = 4$; pentru $n \geqslant 4$, G. Vrănceanu a dat maximul $(n-1)(n-2)/2 + 5$, care este atins pentru $n = 4$ şi $n = 6$ dar nu mai este atins pentru $n > 6$, [4] [3].

Spaţiile $V_4$ şi $V_6$ pentru care maximul este atins, intră într-o categorie de spaţii simetrice $V_{2p}(\lambda)$, ale căror grupuri de stabilitate sînt grupuri de rotaţii simplectice şi au $p^2$ parametri [4] [4] şi [5] [5]. Recent, G. Vrănceanu a arătat că aceste spaţii, considerate ca spaţii al căror grup de stabilitate are o transformare distinsă (permutabilă cu toate celelalte), au un grup maxim de transformări în ele înşile [8].

Noi vom arăta acuma că, exceptînd spaţiile cu curbură constantă, nu există alte spaţii $V_{2p}$ ireductibile avînd un grup tranzitiv de mişcări, care să aibă un grup de stabilitate cu mai mult de $p^2$ parametri. Vom arăta pentru

---

[1]) p. 45
[2]) p. 122 — 136.
[3]) p. 37.
[4]) p. 45.
[5]) p. 122.

aceasta că grupul complet de rotaţii în $2p$ variabile nu poate avea un subgrup ireductibil real (neseparabil) care să aibă mai mult de $p^2$ parametri; iar grupurile de rotaţii separabile avînd mai mult de $p^2$ parametri (deci care conţin un grup complet de rotaţii în $m < 2p$ variabile), nu pot fi grupuri de stabilitate în spaţii riemanniene ireductibile cu curbură variabilă şi grup tranzitiv de mişcări.

Demonstraţia noastră pleacă de la faptul că grupurile de rotaţii în $n$ variabile, avînd mai puţin de $n$ $(n-1)/2$ parametri, sînt subgrupuri ale grupului de mişcări a unei hipersfere cu centrul în origine, din spaţiul euclidian $E_n$; se arată că aceste subgrupuri invariază pe hipersferă două sau mai multe sisteme Pfaff complimentare. Aplicăm apoi metoda dată de G. Vrănceanu, scriind aceste subgrupuri ca grupuri separabile de transformări de congruenţe ortogonale.

Din aceste consideraţii deducem de asemenea că un subgrup neseparabil al grupului complet de rotaţii în $2p+1$ variabile poate avea cel mult $p^2$ parametri.

Lucrarea de faţă am făcut-o din îndemnul şi sub îndrumarea prof. G. Vrănceanu, căruia îi aducem vii mulţumiri.

## I. O teoremă asupra spaţiilor $V_n$, separabile

**1. Formule fundamentale.** Considerăm în spaţiul riemannian $V_n$, două sisteme Pfaff complimentare

$$ds^h = 0, \quad (h = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

$$ds^\alpha = 0, \quad (\alpha = m+1, \ldots n), \tag{1'}$$

astfel încît metrica lui $V_n$ să fie dată de formula

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^m)^2 + (ds^{m+1})^2 + \ldots + (ds^n)^2 \tag{2}$$

Ne propunem să studiem grupul de transformări

$$\overline{x}^i = \overline{x}^i(x^1, \ldots, x^n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

care invariază metrica (2) şi sistemele (1), (1').

Dacă notăm cu $\overline{ds}^h$, $\overline{ds}^\alpha$ formele Pfaff care se obţin din $ds^h$, $ds^\alpha$ înlocuind variabilele $x^i$ şi diferenţialele $dx^i$ prin $\overline{x}^i$ şi $d\overline{x}^i$, transformările (3) se pot exprima ca transformări de congruenţe ortogonale

$$\overline{ds}^h = c_k^h\, ds^k, \ (h, k = 1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

$$\overline{ds}^\alpha = c_\beta^\alpha\, ds^\beta, \ (\alpha, \beta = m+1, \ldots, n) \tag{4'}$$

Deci transformările (3) formează un subgrup finit continuu al unui grup ortogonal separabil de transformări de congruenţe, ce se obţin luînd în formulele (4) şi (4') pentru $c_k^h$ şi $c_\beta^\alpha$ funcţii arbitrare de $x^i$ satisfăcînd următoarele condiţii de ortogonalitate

$$c_k^h\, c_k^{h'} = \delta_{h'}^h, \quad c_\beta^\alpha\, c_\beta^{\alpha'} = \delta_{\alpha'}^\alpha \tag{5}$$

Dacă notăm cu $\gamma_{bc}^a$ coeficienţii de rotaţie ai lui Ricci pe congruenţele $ds^a$ $(a = 1, \ldots, n)$ şi cu $\overline{\gamma}_{bc}^a$ ceea ce devin aceşti coeficienţi cînd înlocuim varia-

bilele $x^i$ prin $\overline{x}^i$, avem următoarele relații în termeni finiți pentru funcțiile $c_k^h$, $c_\beta^\alpha$ din (4), (4'), [10] [1])

$$\overline{\gamma}_{hk}^{\alpha}\, c_l^h\, c_r^k - \gamma_{lr}^{\beta}\, c_\beta^\alpha = 0, \tag{6}$$

$$\overline{\gamma}_{\alpha\beta}^{h}\, c_\lambda^\alpha\, c_\mu^\beta - \gamma_{\lambda\mu}^{k}\, c_k^h = 0, \tag{6'}$$

din care se vede că $\gamma_{\alpha\beta}^h$, $\gamma_{hk}^\alpha$ sînt componentele a doi tensori față de grupul (4), (4').

Punînd

$$\gamma_{\alpha\beta}^h - \gamma_{\beta\alpha}^h = w_{\alpha\beta}^h \quad , \quad 2v_{hk}^\alpha = \gamma_{hk}^\alpha + \gamma_{kh}^\alpha, \tag{7}$$

$$\gamma_{hk}^\alpha - \gamma_{kh}^\alpha = w_{hk}^\alpha \quad , \quad 2v_{\alpha\beta}^h = \gamma_{\alpha\beta}^h + \gamma_{\beta\alpha}^h, \tag{7'}$$

obținem din (6), (6') formulele de transformare a patru tensori

$$\overline{w}_{\alpha\beta}^{h}\, c_\lambda^\alpha\, c_\mu^\beta - w_{\lambda\mu}^k\, c_k^h = 0, \tag{8}$$

$$\overline{v}_{hk}^{\alpha}\, c_l^h\, c_r^k - v_{lr}^{\beta}\, c_\beta^\alpha = 0, \tag{9}$$

$$\overline{w}_{hk}^{\alpha}\, c_l^h\, c_r^k - w_{lr}^{\beta}\, c_\beta^\alpha = 0\,, \tag{10}$$

$$\overline{v}_{\alpha\beta}^{h}\, c_\lambda^\alpha\, c_\mu^\beta - v_{\lambda\mu}^h\, c_k^h = 0\,. \tag{11}$$

Acești tensori au o interpretare geometrică simplă; de exemplu relațiile $w_{\alpha\beta}^h = 0$ exprimă că spațiul $V_n^{n-m}$ definit de sistemul (1) este olonom. Dacă în plus avem $v_{hk}^\alpha = 0$, atunci metrica spațiului complimentar $V_n^m$ dat de (1')

$$ds_1^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^m)^2, \tag{12}$$

se poate exprima în raport cu $m$ variabile independente și cu diferențialele acestora [7] [2]).

De asemenea, dacă avem $w_{hk}^\alpha = 0$, spațiul $V_n^m$ dat de (1') este olonom, iar dacă avem și $v_{\alpha\beta}^h = 0$, atunci metrica lui $V_n^{n-m}$

$$ds_2^2 = (ds^{m+1})^2 + \ldots + (ds^n)^2, \tag{13}$$

este o metrică în $n - m$ variabile.

**2. O teoremă asupra spațiilor separabile.** Vom determina acuma spațiile separabile $V_n$ (numim spațiu separabil, un spațiu $V_n$ în care ni se dau două sau mai multe sisteme Pfaff complimentare invariante), pentru care grupul (4) depinde de $m(m-1)/2$ funcții $c_k^h$ independente, deci pentru care tensorii (8), (9), (10), (11) nu impun funcțiilor $c_k^h$ nici o relație în termeni finiți distinctă de condițiile de ortogonalitate (5). Vom presupune că avem $m > \frac{n}{2}$ și $n \geqslant 6$.

Vom arăta în primul rînd că avem $\gamma_{\lambda\mu}^k = 0$, deci

$$w_{\lambda\mu}^k = 0, \tag{14}$$

$$v_{\lambda\mu}^k = 0. \tag{15}$$

[1]) p. 241.
[2]) p. 257.

Pentru aceasta putem observa că dacă matricea $\| \gamma^k_{\lambda\mu} \|$ cu $m$ coloane şi $(n-m)^2$ linii nu este de rang 0, atunci ea poate fi de rang $r < m$ sau $r = m$; în primul caz avem un sistem Pfaff invariant

$$\gamma^k_{\lambda\mu}\, ds^k = 0,$$

care impune cel puţin o condiţie, funcţiilor $c^h_k$, independentă de (5), iar în cazul $r = m$, relaţiile (6′) pot fi rezolvate în raport cu $c^h_k$ ca funcţii de $c^\alpha_\beta$; dar numărul funcţiilor $c^\alpha_\beta$ independente este cel mult $(n-m)\,(n-m-1)/2$ şi avem $(n-m)\,(n-m-1)/2 < m\,(m-1)/2$, deoarece am presupus că $m > \dfrac{n}{2}$.

Ajungem de asemenea la condiţiile (14), (15), folosind o metodă directă: dacă $\gamma^k_{\lambda\mu}$ nu impun nici o condiţie funcţiilor $c^h_k$, atunci tensorul de ordinul II

$$\gamma^{hk} = \gamma^h_{\lambda\mu}\, \gamma^k_{\lambda\mu} \tag{16}$$

este proporţional cu tensorul lui Kronecker $\delta^h_k$, deci avem

$$\gamma^{hk} = \rho \delta^h_k$$

Dacă $\rho = 0$, obţinem relaţiile (14), (15); cînd $\rho \neq 0$, putem înmulţi relaţiile (6′) cu $\gamma^k_{\lambda\mu}$ şi să sumăm în raport cu $\lambda$ şi $\mu$. Avem atunci

$$\rho c^h_k = \overline{\gamma}^h_{\alpha\beta}\, \gamma^k_{\lambda\mu}\, c^\alpha_\beta\, c^\beta_\mu$$

deci $C^h_k$ pot fi rezolvate în raport cu $c^\alpha_\beta$ [1]).

Din formulele (14) se vede că spaţiul $V^{n-m}_n$ definit de sistemul $ds^h = 0$ este olonom.

Să considerăm acum spaţiul $V^m_n$ definit de ecuaţiile $ds^\alpha = 0$ şi să formăm tensorul de ordinul IV

$$W_{hklr} = w^\alpha_{hk}\, w^\alpha_{lr}, \tag{17}$$

care este strîmb simetric în $h, k$ şi în $l, r$ şi simetric în perechile $(h, k)$, $(l, r)$. Se ştie că un tensor avînd aceste proprietăţi impune cel puţin o condiţie, distinctă de relaţiile (5), funcţiilor $c^h_k$, afară de cazul cînd avem

$$W_{hklr} = \rho \delta^{(hk)}_{(lr)}, \tag{18}$$

unde $\delta^{(hk)}_{(lr)} = 0$ dacă perechile $(h, k)$, $(l, r)$ au cel puţin un indice distinct şi $\delta^{(hk)}_{(hk)} = 1$, $\delta^{(hk)}_{(kh)} = -1$. Presupunînd $h < k$, $l < r$, relaţiile (17), (18) ne arată că dacă notăm cu $A$ matricea cu $n-m$ coloane şi $m\,(m-1)/2$ linii $A = \| w^\alpha_{hk} \|$ şi cu $A^*$ transpusa matricei $A$, avem

$$A^* A = \rho U \tag{19}$$

unde $U$ este matricea unitate cu $m\,(m-1)/2$ linii şi $m\,(m-1)/2$ coloane. Avem din (19)

$$\text{rang } (\rho U) \leqslant \text{rang } A;$$

---

[1]) Această demonstraţie ne-a fost indicată de G. Vrănceanu.

dar rang $U = m(m-1)/2 > n - m$, deoarece am presupus $n \geqslant 6$, $m > \frac{n}{2}$, deci rang $U >$ rang $A$, prin urmare $\rho = 0$ şi relaţia (19) ne dă rang $(A^* A) = 0$. După o teoremă a lui Silvester, avem

$$\text{rang } A + \text{rang } B - p \leqslant \text{rang } (AB)$$

$A$ şi $B$ fiind două matrici, prima cu $p$ coloane şi a doua cu $p$ linii. În cazul considerat, obţinem

$$\text{rang } A + \text{rang } A^* - (n - m) \leqslant 0$$

sau, deoarece rang $A^* =$ rang $A$,

$$\text{rang } A \leqslant \frac{n-m}{2},$$

deci sistemul Pfaff

$$w^{\alpha}_{hk}\, ds^{\alpha} = 0,$$

are cel mult $(n - m)/2$ ecuaţii independente. Putem alege formele $ds^{\alpha}$ astfel încît aceste ecuaţii să fie

$$ds^{\alpha'} = 0, \left(\alpha' = m+1, \ldots, m+p,\ p \leqslant \frac{n-m}{2}\right)$$

şi atunci avem $w^{\rho}_{hk} = 0$, $(\rho = m + p + 1, \ldots, n)$.

Aplicînd acelaşi raţionament ca mai sus tensorului

$$W'_{hklr} = w^{\alpha'}_{hk}\, w^{\alpha'}_{lr},$$

obţinem rang $\| w^{\alpha'}_{hk} \| \leqslant \frac{p}{2}$; dar rang $\| w^{\alpha'}_{hk} \| =$ rang $\| w^{\alpha}_{hk} \| = p$ şi din relaţia $p \leqslant \frac{p}{2}$ deducem p $= 0$, prin urmare rang $\| w^{\alpha}_{hk} \| = 0$, deci $w^{\alpha}_{hk} = 0$, adică sistemul $ds^{\alpha} = 0$ este complet integrabil şi spaţiul $V^m_n$ este olonom. Deci putem pune

$$ds^{\alpha} = \lambda^{\alpha}_{\beta}\, dx^{\beta}, \quad (\alpha, \beta = m+1, \ldots n)$$

şi atunci metrica (13) depinde numai de variabilele $x^{\alpha}$ [9] [1]), deoarece avem şi (15); deci avem

$$ds_2^2 = (ds^{m+1})^2 + \ldots + (ds^n)^2 = b_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta}, \tag{20}$$

$b_{\alpha\beta}$ fiind funcţii numai de $x^{\alpha}$.

Considerăm acum cantităţile $v^{\alpha}_{hk} = \frac{1}{2}(\gamma^{\alpha}_{hk} + \gamma^{\alpha}_{kh})$ şi formăm tensorul

$$V_{hklr} = v^{\alpha}_{hk}\, v^{\alpha}_{lr}, \tag{20'}$$

[1]) p. 443.

care este simetric în $h, k$ şi $l, r$ şi în perechile $(h, k)$, $(l, r)$. Acest tensor nu impune nici o condiţie funcţiilor $c^h_k$, independente de (5), dacă forma

$$V_{hklr}\, ds^h\, ds^k\, \delta s^l\ \ \delta s^r \quad (h, k, l, r = 1, \ldots, m)$$

este egală cu

$$\rho\,[(ds^1)^2 + \ldots + (ds^m)^2]\,[(\delta s^1)^2 + \ldots + (\delta s^m)^2]^2 + \rho'\,(ds^1\,\delta s^1 + \ldots + ds^m\,\delta s^m)^2,$$

deci dacă avem $V_{hklr} = \rho\,\delta^h_k\,\delta^l_r + \rho'\,\delta^h_l\,\delta^k_r$,
sau

$$B^*\,B = \rho'\,U_1 + \rho\,M$$

unde $B = \| v^\alpha_{hk} \|$ este o matrice cu $n - m$ coloane şi $m\,(m+1)/2$ linii, $B^*$ este transpusa lui $B$, iar $U_1$ matricea pătrată unitate cu $m\,(m+1)/2$ linii, iar $M$ este o matrice patrată cu $m\,(m+1)/2$ linii, care se poate aduce, printr-o aranjare convenabilă a liniilor coloanelor şi la forma

$$M = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ldots 1}^{m} & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 \ldots 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix} \text{ cu } U_1 = \begin{pmatrix} 1\,0 \ldots\ldots 0 \\ 0\,1\,0 \ldots 0 \\ \vdots \\ 0 \ldots\ldots 1 \end{pmatrix}$$

Din relaţiile rang $(B^*B) \leqslant$ rang $B$ şi rang $B \leqslant n - m$ rezultă rang $(B^*B) \leqslant n - m$, deci în (20″) avem $\rho' = 0$ şi atunci teorema lui Sylvester aplicată produsului $B^*B$ ne dă, ţinînd seama că rang $M = 1$

$$\text{rang } B \leqslant \frac{n - m + 1}{2}$$

Fie $r = \text{rang } B$; printr-o transformare convenabilă a formelor $ds^\alpha$, putem face astfel ca sistemul

$$v^\alpha_{hk}\, ds^\alpha = 0$$

să se reducă la

$$ds^{\alpha'} = 0, \quad (\alpha' = m + 1, \ldots, m + r)$$

deci avem

$$v^\beta_{kh} = 0, \quad (\beta = m + r + 1, \ldots, n).$$

Am arătat mai sus că $r \leqslant \dfrac{n - m + 1}{2}$ şi printr-un raţionament analog, aplicat tensorului

$$V'_{hklr} = v^{\alpha'}_{kh}\ v^{\alpha'}_{lr}$$

se arată că rang $\| v^{\alpha'}_{hk} \| \leqslant \dfrac{r+1}{2}$; dar avem rang $\| v^{\alpha'}_{hk} \|$ = rang $\| v^\alpha_{hk} \| = r$, prin urmare $r \leqslant \dfrac{r+1}{2}$, deci $r \leqslant 1$ iar

$$\text{rang } \| v^\alpha_{hk} \| \leqslant 1.$$

Rezultă că formele pătratice

$$\Omega^\alpha = v^\alpha_{hk}\, ds^h\ ds^k,$$

sînt proporţionale între ele sau identic nule, deci trebuie să avem

$$\Omega^\alpha = w^\alpha\left[(ds^1)^2 + \ldots + (ds^m)^2\right]$$

sau

$$2\, v^\alpha_{hk} = \gamma^\alpha_{hk} + \gamma^\alpha_{kh} = 2\,\delta^h_k\, w^\alpha, \tag{21}$$

unde $w^\alpha$ sînt componentele unui vector faţă de grupul (4′).

Dacă $w^\alpha$ sînt toate nule, metrica (12) a spaţiului $ds^\alpha = 0$ este o metrică în $m$ variabile.

În acest caz, spaţiul $V_n$ este reductibil, deoarece metrica lui se descompune în suma a două metrici $ds_1^2$, $ds_2^2$ cu variabile definite.

Să presupunem că vectorul $w^\alpha$ nu este nul. Sistemul $ds^h = 0$ fiind complet integrabil, ne putem aranja astfel încît să avem

$$ds^h = \lambda^h_k\, dx^k,\ (h, k = 1, \ldots, m)$$

şi, fie metrica lui $V_n^m$

$$ds_1^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^m)^2 = a_{hk}\, dx^h\, dx^k, \tag{21′}$$

în care $a_{hk}$ sînt funcţii de variabilele $x^\alpha$ din (20) şi de variabilele $x^h$.

După o teoremă dată de G. Vrănceanu [9][1] rezultă că avem, în virtutea relaţiilor (21) şi (14),

$$ds_1^2 = e^{2\rho}\, d\sigma^2$$

unde $d\sigma^2$ este o metrică în variabilele $x^h$ şi $\rho$ depinde numai de variabilele $x^\alpha$. Noi vom da aici o nouă demonstraţie a acestui rezultat, care ne va conduce la cîteva formule ce ne sînt necesare în cele ce urmează.

Din relaţiile (14) şi din relaţiile

$$\frac{\partial \lambda^h_b}{\partial x^c} - \frac{\partial \lambda^h_c}{\partial x^b} = w^h_{rs}\, \lambda^r_b\, \lambda^s_c;\quad a_{hk} = \lambda^r_h\, \lambda^r_k$$

precum şi din [3]

$$v^\alpha_{hk} = \frac{1}{2}(w^h_{k\alpha} + w^k_{h\alpha}),$$

rezultă, notînd cu $\left|\mu^i_b\right|$ reciprocul determinantului $\left|\lambda^a_i\right|$

$$\mu^\alpha_\beta \frac{\partial a_{hk}}{\partial x^\alpha} = 2\, v^{\beta|}_{lr}\, \lambda^r_h\, \lambda^l_k = 2w^\beta\, \lambda^r_h\, \lambda^r_k = 2w^\beta\, a_{hk}$$

de unde, înmulţind cu $\lambda^\beta_\gamma$ şi făcînd suma în raport cu $\beta$ şi ţinînd seama că $\mu^\alpha_\beta \lambda^\beta_\gamma = \delta^\alpha_\gamma$ deoarece $\lambda^h_\gamma = 0$, rezultă

$$\frac{\partial a_{hk}}{\partial x^\gamma} = 2w^\beta\, a_{hk}\, \lambda^\beta_\gamma,\ (\beta, \gamma = m+1, \ldots, n)$$

[1]) p. 443.

deci avem

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \log a_{hk} = 2w^\beta \lambda^\beta_{h\gamma}.$$

Înmulțind cu $dx^\gamma$ și făcînd suma în raport cu $\gamma$, avem

$$d \log a_{hk} = 2w^\beta \lambda^\beta_{h\gamma} dx^\gamma = 2w^\beta ds^\beta, \tag{21''}$$

unde diferențiala $d \log a_{hk}$ este luată în raport cu variabilele $x^{m+1}, \ldots, x^n$

Componentele vectorului $w^\alpha$ nu depind de variabilele $x^h$, deoarece dacă ar depinde de aceste variabile, cantitățile

$$w^\beta_h = \frac{\partial w^\beta}{\partial s^h} = \mu^k_h \frac{\partial w^\beta}{\partial x^k}$$

ar fi componentele tensorului de ordinul II

$$\overline{w}^\beta_k c^\alpha_\beta = w^\alpha_h c^h_k,$$

deoarece $n-m<m$, rang $\left\| w^\beta_h \right\| < m$ și grupul (4) ar avea sistemul invariant $w^\beta_k ds^k = 0$.

Din formulele (21'') se vede atunci că

$$w_\beta ds^\beta$$

este diferențiala totală a unei funcții $\rho(x^{m+1}, \ldots, x^n)$ ce depinde numai de variabilele $x^\alpha$ și că avem

$$a_{hk} = e^{2\rho} a^*_{hk},$$

unde $a^*_{hk}$ sînt funcții numai de $x^h$.

Rezultă că metrica spațiului $V^m_n$ se poate scrie

$$ds^2_1 = e^{2\rho} d\sigma^2 \ , \ (d\sigma^2 = a^*_{hk} dx^h dx^k) \tag{22}$$

$d\sigma^2$ fiind o metrică în variabilele $x^h$.

Transformările (3), care invariază metricile (20) și (22), sînt de forma

$$\overline{x}^h = \overline{x}^h(x^1, \ldots, x^m) \ , \ \overline{x}^\alpha = \overline{x}^\alpha(x^{m+1}, \ldots, x^n) \tag{23}$$

și printr-o astfel de transformare, $\rho$ și $d\sigma^2$ devin

$$d\overline{\sigma}^2 = e^{-2a} d\sigma^2 \ , \ \overline{\rho} = \rho + a \ , \ (a = \text{const.}) \tag{23'}$$

Pentru ca funcțiile $c^h_k$ să nu satisfacă la alte relații în termeni finiți înafară de relațiile (5), *este necesar și suficient ca metrica* $d\sigma^2$ *din* (22) *să fie cu curbură constantă.*

Să aducem vectorul $w^\alpha$ la forma canonică $w^{m+1} = \ldots = w^{n-1} = 0$, $w^n = A$; atunci avem

$$d\rho = A\, ds^n \tag{24}$$

în care $A$ este un invariant al transformărilor (23) care depinde, ca și $\rho$, numai de $x^{m+1}, \ldots, x^n$.

Dacă scriem componentele tensorului de curbură al lui $V_n$ pe congruenţele $ds^h$, avem

$$\gamma^a_{bcd} = \frac{\partial \gamma^a_{bc}}{\partial s^d} - \frac{\partial \gamma^a_{bd}}{\partial s^c} + \gamma^a_{fc}\gamma^f_{bd} - \gamma^a_{fd}\gamma^f_{bc} + \gamma^a_{bf}\, w^f_{cd} \qquad (23'')$$

$$(a, b, c, d = 1, \ldots, m; f = 1, \ldots, n).$$

Ţinînd seama de relaţiile $\gamma^h_{\alpha\beta} = 0$, $w^\alpha_{hk} = 0$, $v^\alpha_{hk} = \delta^\alpha_n \delta^h_k A$, deci $\gamma^\alpha_{hk} = \delta^\alpha_n \delta^h_k A$, şi de $\gamma^a_{fc} = -\gamma^f_{ac}$, şi notînd cu $\Gamma^a_{bcd}$ componentele tensorului de curbură al metricii $ds_1^2 = e^{2\rho}\, d\sigma^2$, pe congruenţele $ds^h$, cînd $\rho$ este considerat drept o constantă, avem

$$\Gamma^h_{klr} = \gamma^h_{klr} = 0\ ,\ \Gamma^h_{khk} = \gamma^h_{khk} + A^2 \qquad (23''')$$

Intre curburile $K$ şi $\overline{K}$ ale metricilor $d\sigma^2$ şi $\overline{d\sigma}^2$ din (23') avem relaţia $\overline{K} = e^{2a} K$; deci, aceste metrici fiind echivalente faţă de transformarea (23) rezultă că dacă avem $K \neq 0$, atunci $a = 0$.

Avem următoarea:

T e o r e m ă. *Dacă funcţiile $c^h_k$ din (4) nu satisfac altor relaţii în termeni finiţi în afară de condiţiile de ortogonalitate $c^h_k c^{h'}_k = \delta^{h'}_h$ şi dacă avem $n \geqslant 6, m > \frac{n}{2}$, atunci metrica spaţiului $V_n$ se poate aduce la forma canonică*

$$ds^2 = e^{2\rho}\, d\sigma^2 + ds_2^2, \qquad (24')$$

*unde $d\sigma^2$ este o metrică cu curbură constantă în $m$ variabile $x^1, x^2, \ldots, x^m$, $ds_2^2$ este o metrică arbitrară în $n - m$ variabile $x^{m+1}, \ldots, x^n$, iar $\rho$ este o funcţie depinzînd numai de variabilele $x^{m+1}, \ldots, x^n$. Formele $ds_2^2$ şi $e^{2\rho}\, d\sigma^2$ sînt invarianţi ai grupului de mişcări $G$, al lui $V_n$, care invariază sistemele Pfaff* (1), (1').

*Dacă metrica $d\sigma^2$ nu este euclidiană, atunci $\rho$ şi $d\sigma^2$ sînt de asemenea invarianţi absoluţi ai lui $G$; grupul $G$ este atunci tranzitiv în $V_n$ dacă $\rho$ este constant, deci dacă $V_n$ este reductibil.*

Să considerăm acum cazul $m = \frac{n}{2}$ ($n$ par) şi să presupunem şi aici că numărul funcţiilor $c^h_k$ independente este $m(m-1)/2$.

Dacă numărul funcţiilor $c^\alpha_\beta$ independente din (4') este mai mic decît $m(m-1)/2$, atunci raţionamentul nostru precedent rămîne valabil, şi spaţiul $V_{2m}$ are metrica (24').

Presupunem că numărul funcţiilor $c^\alpha_\beta$ independente este de asemenea $m(m-1)/2$. Considerînd atunci tensorii

$$W_{hklr} = w^\alpha_{hk} w^\alpha_{lr}\ ,\ W_{\alpha\beta\gamma\delta} = w^h_{\alpha\beta} w^h_{\gamma\delta},$$

$$V_{hklr} = v^\alpha_{hk} v^\alpha_{lr}\ ,\ V_{\alpha\beta\gamma\delta} = v^h_{\alpha\beta} v^h_{\gamma\delta},$$

raţionamentele făcute mai sus ne arată că dacă avem $m(m-1)/2 > m$, deci $m > 3$, atunci tensorii $w^\alpha_{hk}$, $w^h_{\alpha\beta}$ sînt nuli. Rezultă de asemenea că formele pătratice,

$$\Omega^\alpha = v^\alpha_{hk}\, ds^h\, ds^k\ ,\ \Omega^h = v^h_{\alpha\beta}\, ds^\alpha\, ds^\beta$$

sînt proporționale cu $(ds^1)^2 + \ldots + (ds^m)^2$, respectiv $(ds^{m+1})^2 + \ldots + (ds^{2m})^2$, deci avem $v^{\alpha}_{hk} = w^{\alpha}\,\delta^{h}_{k}$, $v^{h}_{\alpha\beta} = w^{h}\,\delta^{\alpha}_{\beta}$. Punînd

$$ds^h = \lambda^h_k\, dx^k \quad , \quad ds^\alpha = \lambda^\alpha_\beta\, dx^\beta,$$

găsim, ca mai sus, că

$$ds_1^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^m)^2 = e^{2\rho_1}\, d\sigma_1^2,$$

$$ds_2^2 = (ds^{m+1})^2 + \ldots + (ds^{2m})^2 = e^{2\rho_2}\, d\sigma_2^2,$$

unde $\rho_1$ și $d\sigma_2^2$ depind numai de variabilele $x^\alpha$, iar $\rho_2$ și $d\sigma_1^2$ depind numai de variabilele $x^h$, metricile $d\sigma_1^2$, $d\sigma_2^2$ fiind cu curbură constantă. Pentru ca invarianții $\rho_1$ și $\rho_2$ să nu impună nici o condiție funcțiilor $e^{\alpha}_{\beta}$, $c^{h}_{k}$ trebuie să fie constanți, deci spațiul $V_{2m}$ este reductibil.

Deci dacă $V_{2m}$ este ireductibil, metrica lui se reduce la forma canonică (24′).

Rezultă că *teorema enunțată mai sus rămîne valabilă pentru* $m = n/2$, *dacă* $n > 6$.

4. Considerăm un spațiu $V_n$ separabil, deci un spațiu riemannian în care este dat un grup de mișcări $G$ care invariază două sau mai multe sisteme Pfaff complimentare în $V_n$. Se demonstrează imediat că:

*Condiția necesară și suficientă pentru ca spațiul* $V_n$ *să fie separabil este ca grupul de stabilitate al unui punct oarecare din* $V_n$ *să fie un grup separabil de rotații (reductibil real).*

## II. Grupurile de rotație în $n$ variabile

**1. Invarianții grupurilor de rotații.** Vom arăta acum că: *Orice subgrup* $G_r$ *al grupului complet de rotații în n variabile, invariază două sau mai multe sisteme Pfaff* $S_t$ *complimentare; grupul maxim* $\overline{G}$ *care invariază aceste sisteme se confundă cu* $G_r$ *sau conține grupul* $G_r$ *ca subgrup invariant.*

Pentru demonstrație, considerăm transformările grupului $G_r$

$$\overline{x}^k = c^k_j\, x^j \ , \quad (k, j = 1,2, \ldots, n) \tag{25}$$

și fie

$$X_\alpha = a^j_{k\alpha}\left(x^j \frac{\partial f}{\partial x^k} - x^k \frac{\partial f}{\partial x^j}\right), \tag{26}$$

$$\left(a^j_{k\alpha} + a^k_{j\alpha} = 0,\ \alpha = 1, 2, \ldots, r\right),$$

$r$ operatori formînd o bază normală a grupului $G_r$ [1][1]), deci avem

$$a^{j}_{k\alpha}\, a^{j}_{k\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}.$$

Transformările lui $G_r$ invariază forma bipătratică

$$R = \frac{1}{4}\left[a^j_{k\alpha}\left(x^j y^k - x^k y^j\right)\right]^2 \tag{27}$$

care se mai poate scrie

$$R = R_{jkrs}\, x^j x^r y^k y^s, \tag{27′}$$

[1]) p. 223.

unde $R_{jkrs}$ sînt daţi de

$$R_{jkrs} = a^i_{k\alpha}\, a^r_{s\alpha} - \frac{1}{3}\left(a^i_{k\alpha}\, a^r_{s\alpha} + a^i_{r\alpha}\, a^s_{k\alpha} + a^i_{s\alpha}\, a^k_{r\alpha}\right)$$

şi au proprietăţile tensorului lui Riemann al unui spaţiu riemannian.

Vom arăta că grupul de rotaţii maxim $\overline{G}$, care invariază forma (27), conţine grupul $G_r$ ca subgrup invariant sau se confundă cu $G_r$.

Într-adevăr, dacă introducem formele biliniare

$$\pi_\alpha = \frac{1}{2}\, a^i_{k\alpha}\,(x^j\, y^k - x^k\, y^j),$$

atunci avem

$$R = \pi_1^2 + \pi_2^2 + \ldots + \pi_r^2. \qquad (27'')$$

Pentru ca un operator $X = a^i_k \left(x^j \frac{\partial f}{\partial x^k} - x^k \frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$ să invarieze forma (27'') trebuie ca derivata lui Lie a formei $\pi_\alpha$ faţă de $X$ să se exprime liniar în raport cu formele $\pi_1, \ldots, \pi_r$, deci avem

$$\pi'_\alpha = c^\beta_\alpha\, \pi_\beta,$$

din această formulă se vede că avem

$$(X X_\alpha) = c^\beta_\alpha\, X\, \beta,$$

deci operatorii $X$ formează un grup care are grupul $G_r$ ca subgrup invariant.

Putem scrie forma (27') astfel

$$R = S_{ks}\, y^k\, y^s \quad , \quad (S_{ks} = a^i_{k\alpha}\, a^r_{s\alpha}\, x^j\, x^r);$$

fie $\rho_t\ (x)$ rădăcinile ecuaţiei

$$\left| S_{ks} - \rho\, \delta^k_s \right| = 0, \qquad (27''')$$

care sînt evident funcţii invariante ale grupului $G_r$. Sistemul de ecuaţii

$$S_t : \left[S_{ks} - \rho_t\,(x)\, \delta^k_s\right] y^k = 0, \qquad (28)$$

este un invariant al lui $G_r$; punînd în (28) $y^k = dx^k$, obţinem pentru fiecare $t$ un sistem Pfaff invariat de transformările lui $G_r$

$$S_t : \left[S_{ks} - \rho_t\,(x)\, \delta^k_s\right] dx^k = 0. \qquad (29)$$

Notăm cu $I_1, \ldots, I_n$ coeficienţii lui $\rho^{n-1}, \rho^{n-2}, \ldots$ din ecuaţia (27'''); aceşti coeficienţi sînt polinoame în $x^j$, invariate de transformările lui $G_r$, deci ecuaţiile Pfaff

$$\frac{\partial I_j}{\partial x^k}\, dx^k = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots) \qquad (30)$$

sînt de asemenea ecuaţii invariante ale lui $G_r$. Invers, dacă o transformare ortogonală invariază ecuaţiile (30), atunci ea invariază polinoamele $I_j$ şi deci funcţiile $\rho_t(x)$ din (29). Deci grupul de rotaţii $G$ care invariază ecuaţiile (30) şi sistemele (29), învariază şi forma (27) sau (27''), deoarece forma (27) se poate obţine cu ajutorul invarianţilor $\rho_t(x)$ şi al ecuaţiilor (29); deci sistemele (29) şi ecuaţiile (30) sînt invarianţi ai grupului $\overline{G}$, astfel încît aceşti invarianţi definesc grupul $G_r$ sau un grup $\overline{G}$ care conţine grupul $G_r$ ca subgrup invariant.

Deoarece grupul complet de rotaţii în $n$ variabile este simplu [1]), problema căutării grupurilor de rotaţii maxime, neseparabile, avînd mai puţin de $n(n-1)/2$ parametri, se reduce la determinarea sistemelor (29), (30), care impun cele mai puţine condiţii coeficienţilor $c_k^j$ din (25) şi care nu se reduc la ecuaţia

$$x^j\, dx^j = 0. \tag{31}$$

Fie

$$x^i = \rho f^i(\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}),\ (i = 1, \ldots, n) \tag{32}$$

o reprezentare parametrică a sferei

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = \rho^2, \tag{33}$$

deci avem

$$(f^1)^2 + \ldots + (f^n)^2 = 1,\ f^i \frac{\partial f^i}{\partial \xi^j} = 0. \tag{34}$$

Avem atunci

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\sigma^2 \tag{35}$$

unde

$$d\sigma^2 = (df^1)^2 + \ldots + (df^n)^2 = \frac{df^i}{d\xi^\alpha}\,\frac{\partial f^i}{d\,\xi^\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta \tag{36}$$

este o metrică cu curbură constantă $K = 1$ în variabilele $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}$.

Înlocuind în ecuaţiile (29) şi (30) variabilele $x^j$ şi diferenţialele $dx^j$ prin valorile lor deduse din (32) în care facem $\rho = 1$ şi, exprimînd transformările lui $G_r$ ca transformări pe hipersfera $V_{n-1}$ dată de

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 1, \tag{37}$$

obţinem următoarea:

Teoremă. *Orice grup de rotaţii $G_r$ este un grup de mişcări al hipersferei* (37), *care are ca invarianţi două sau mai multe sisteme Pfaff complimentare în $V_{n-1}$; aceste sisteme definesc grupul $G_r$ sau un grup $\overline{G}$ care conţine grupul $G_r$ ca subgrup invariant.*

Putem deci aplica grupurilor de rotaţii $G_r$ rezultatele obţinute asupra spaţiilor separabile, luînd pentru spaţiile $V_n$ spaţii $V_{n-1}$ cu curbură constantă $K = 1$.

[1]) dacă $n \neq 4$.

**2. Grupurile de rotații separabile (reductibile real).** Fie

$$d\sigma^i = \lambda^i_j(\xi)\, d\xi^j, \quad (i,j = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{38}$$

un sistem de $n-1$ congruențe ortogonale în $V_{n-1}$, astfel încît metrica (36) o putem scrie

$$d\sigma^2 = (d\sigma^1)^2 + \ldots + (d\sigma^{n-1})^2. \tag{38'}$$

Considerăm un grup $G_r$ reductibil real, deci care are cel puțin două funcții invariante care se pot reduce la forma canonică

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2;\ (x^{p+1})^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

Facem o transformare de coordonate de forma

$$x^h = \rho \cos\theta f^h(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{p-1}), \ (h = 1, 2, \ldots, p)$$

$$x^\alpha = \rho \sin\theta f^\alpha(\xi^p, \xi^{p+1}, \ldots, \xi^{n-2}), \ (\alpha = p+1, \ldots, n)$$

cu $f^h f^h = 1$, $f^\alpha f^\alpha = 1$. Metrica (36) se scrie atunci

$$d\sigma^2 = \cos^2\theta\, d\sigma_1^2, + \sin^2\theta\, d\sigma_2^2 + d\theta^2, \tag{39}$$

unde $d\sigma_1^2$, $d\sigma_2^2$ sînt două metrici cu curbură constantă $K = 1$ în variabilele $\xi^1, \ldots, \xi^{p-1}$ respectiv $\xi^p, \ldots, \xi^{n-2}$. Cantitățile $d\sigma_1^2$, $d\sigma_2^2$, $\theta$ sînt evident invarianți absoluți ai grupului $G_r$.

Reciproc, *dacă un grup $G_r$ de mișcări al sferei $V_{n-1}$ are ca invarianți pe $d\sigma_1^2$, $d\sigma_2^2$ și $\theta$, atunci $G_r$ este un grup de rotații în $n$ variabile, reductibile real.*

Vom considera acum un grup de rotații $G_r$ și să presupunem că $G_r$ are ca invarianți în $V_{n-1}$ două sisteme Pfaff complimentare

$$d\sigma^h = 0, \ (h = 1, 2, \ldots, m)$$

$$d\sigma^\alpha = 0\ (\alpha = m+1, \ldots, n-1)$$

astfel încît să avem $m > \dfrac{n-1}{2}$ și $n > 7$. Să scriem grupul $G_r$ ca grup ortogonal de transformări de congruențe

$$d\overline{\sigma}^h = c^h_k\, d\sigma^k, \ (h, k = 1, \ldots, m);\ d\overline{\sigma}^\alpha = c^\alpha_\beta\, d\sigma^\beta, \ (\alpha, \beta = m+1, \ldots, n-1) \tag{39'}$$

și să presupunem că numărul funcțiilor $c^h_k$ independente este $m\,(m-1)/2$.

Am văzut că metrica spațiului $V_{n-1}$ se poate scrie

$$d\sigma^2 = e^{iu}\, d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2, \tag{40}$$

unde

$$d\sigma_1^2 = (d\sigma_1^1)^2 + \ldots + (d\sigma_1^m)^2, \tag{40'}$$

este o metrică cu curbură constantă în $m$ variabile $\xi^1, \ldots, \xi^m$ și

$$d\sigma_2^2 = (d\sigma^{m+1})^2 + \ldots + (d\sigma^{n-1})^2 \tag{40''}$$

este o metrică în $n$-$m$-1 variabile $\xi^{m+1}, \ldots, \xi^{n-1}$ iar $u$ o funcţie de aceste variabile $\xi^{m+1}, \ldots, \xi^{n-1}$, dată de relaţia

$$du = A\, d\sigma^{n-1} \tag{41}$$

$A$ fiind un invariant absolut al lui $G_r$ ce depinde de asemenea numai de $\xi^{m+1}, \ldots, \xi^{n-1}$. Atunci coeficienţii de rotaţie ai lui Ricci $\gamma^a_{bc}$ pe congruenţele $d\sigma^a$ $(a, b, c, = 1, \ldots, n-1)$ satisfac relaţiile

$$\gamma^{\alpha}_{hk} = \delta^{\alpha}_{n-1}\, \delta^{h}_{k} A, \tag{42}$$

$$\gamma^{h}_{\alpha\beta} = 0. \tag{42'}$$

Adăugînd funcţiei $u$ din (41) o constantă convenabilă, putem face în aşa fel încît curbura metricei (40') să fie $k = 1$; metrica $e^{2u} d\sigma_1^2$ în care considerăm pe $u$ drept o constantă, va avea curbura $K' = e^{-2u}$. Ţinînd seamă că spaţiul $V_{n-1}$ are curbura 1, formula (23'') ne dă

$$e^{-2u} = 1 + A^2.$$

Punînd $e^u = \cos\theta$, $\left(0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2} \text{ sau } -\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant 0\right)$ deducem

$$A = tg\,\theta,\ e^u = \cos\theta \tag{43}$$

şi relaţia (41) ne dă

$$d\sigma^{n-1} = \operatorname{cotg}\theta\, du = -d\theta. \tag{43'}$$

Deoarece $A \neq 0$, grupul $G_r$ îl putem scrie

$$d\bar{\sigma}^h = c^h_k\, d\sigma^k,\ d\bar{\sigma}^{\alpha'} = c^{\alpha'}_{\beta'}\, d\sigma^{\beta'},\ (\alpha', \beta' = m+1, \ldots, n-2),\ d\bar{\sigma}^{n-1} = d\sigma^{n-1},$$

deci avem relaţiile, în termeni finiţi

$$\bar{\gamma}^{n-1}_{\alpha' h}\, c^{\alpha'}_{\beta'} - \gamma^{n-1}_{\beta' k}\, c^{h}_{k} = 0,$$

$$\bar{\gamma}^{n-1}_{h\alpha'}\, c^{h}_{k} - \gamma^{n-1}_{k\beta'}\, c^{\alpha'}_{\beta'} = 0,$$

care nu impun nici o relaţie funcţiilor $c^h_k$ dacă avem

$$\gamma^{n-1}_{\alpha' h} = \gamma^{n-1}_{h\alpha'} = 0. \tag{42''}$$

Ţinînd seama de relaţiile (42'), (43) şi de formula (23'') în care punem $a = \alpha'$, $b = h$, $c = \beta'$ $d = h$, obţinem

$$\gamma^{\alpha'}_{h\beta' h} = -\gamma^{n-1}_{\alpha'\beta'}\, \gamma^{n-1}_{hh} = -\gamma^{n-1}_{\alpha'\beta'} A = -\gamma^{n-1}_{\alpha'\beta'} \operatorname{tg}\theta$$

dar cum avem $\gamma^{\alpha'}_{h\beta' h} = \delta^{\alpha'}_{\beta'}$, rezultă

$$\gamma^{n-1}_{\alpha'\beta'} = -\delta^{\alpha'}_{\beta'} \operatorname{cotg}\theta. \tag{43''}$$

Din relaţiile (42), (42'') şi din condiţia

$$\gamma^{\alpha'}_{h\, n-1} = -\gamma^{h}_{\alpha' n-1} = 0, \tag{44}$$

care exprimă că sistemul invariant

$$\gamma^{h}_{\alpha' n-1}\, ds^h = 0$$

este identic nul, rezultă să sistemul

$$d\sigma^{\alpha'} = 0 \ (\alpha' = m+1, \ldots, n-2) \tag{45}$$

este complet integrabil, deci putem pune

$$d\sigma^{\alpha'} = \lambda^{\alpha'}_{\beta'}\, d\xi^{\beta'}. \tag{45'}$$

Metrica (40'') o putem scrie atunci, ţinînd seamă de (43')

$$d\sigma_2^2 = g_{\alpha'\beta'}\, d\xi^{\alpha'}\, d\xi^{\beta'} + d\theta^2, \tag{46}$$

$g_{\alpha'\beta'}$ depinzînd numai de $\xi^{\alpha'}$ şi $\theta$. Din formula

$$-\frac{\partial g_{\alpha'\beta'}}{\partial\theta} = \left(w^{\lambda'}_{\mu' n-1} + w^{\mu'}_{\lambda' n-1}\right)\lambda^{\lambda'}_{\alpha'}\,\lambda^{\mu'}_{\beta'}$$

ţinînd seama de (43'') şi că $\lambda^{\lambda'}_{\alpha'}\,\lambda^{\lambda'}_{\beta'} = g_{\alpha'\beta'}$ iar

$$w^{\lambda'}_{\mu' n-1} + w^{\mu'}_{\lambda' n-1} = \gamma^{n-1}_{\lambda'\mu'} + \gamma^{n-1}_{\mu'\lambda'} \text{ deducem}$$

$$\frac{\partial g_{\alpha'\beta'}}{\partial\theta} = 2\ \operatorname{cotg}\ \theta\, g_{\alpha'\beta'}$$

deci avem

$$g_{\alpha'\beta'} = \sin^2\theta\, g^{*}_{\alpha'\beta'}, \tag{47}$$

$g^{*}_{\alpha'\beta'}$ fiind funcţii de $\xi^{m+1}, \ldots, \xi^{n-2}$.

Ţinînd seama de (45'), (42') şi (43), relaţia (23'') ne dă pentru $a=\alpha'$, $b=\beta'$, $c=\gamma'$, $d=\delta'$

$$\gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\delta'} = \Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\delta'} - \delta^{\alpha'}_{\gamma'}\,\delta^{\beta'}_{\delta'}\operatorname{cotg}^2\theta + \delta^{\alpha'}_{\delta'}\,\delta^{\beta'}_{\gamma'}\operatorname{cotg}^2\theta,$$

unde $\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\delta'}$, sînt coeficienţii lui Ricci cu patru indici ai metricii $d\bar{\sigma}^2 = (d\sigma^{\alpha'})^2$ pe congruenţele $d\sigma^{\alpha'}$, cînd presupunem $\theta = \text{const}$. Dar avem $\gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\delta'} = \delta^{\alpha'}_{\gamma'}\,\delta^{\beta'}_{\delta'}$ $(\alpha' < \beta', \gamma' < \delta')$, deci metrica $d\bar{\sigma}^2$ este cu curbură constantă $1 + \operatorname{cotg}^2\theta = 1/\sin^2\theta$, iar dacă punem

$$d\bar{\sigma}^2 = \sin^2\theta\ d\sigma_2^{*2},$$

din relaţia (47) se vede că $d\sigma_2^{*2}$ este o metrică cu curbură constantă $K=1$ în variabilele $\xi^{m+1}, \ldots, \xi^{n-2}$, şi (46) devine

$$d\sigma_2^2 = \sin^2\theta\, d\sigma_2^{*2} + d\theta^2,$$

$d\sigma^2$ din (40) este de forma (39), deci grupul $G_r$ este reductibil real. Avem deci următoarea:

T e o r e m ă. *Dacă grupul de rotaţii $G_r$ în $n$ variabile este astfel încît funcţiile independente $c^h_k$ din (39') sînt în număr de $m(m-1)/2$ şi dacă $m \geqslant n/2 > 3$, atunci grupul $G_r$ este reductibil real.*

**3. Grupurile de rotaţii maxime ireductibile real.** Folosind teorema precedentă, vom demonstra, prin inducţie în raport cu dimensiunea $n$, că *dacă* $G_r$ *este un subgrup ireductibil real al grupului complet de rotaţii* $G_{n(n-1)/2}$ *şi dacă* $n = 2p$ *sau* $n = 2p + 1$, *atunci avem* $r \leqslant p^2$.

Pentru demonstraţie, considerăm în spaţiul $V_{n-1}$, cu curbură constantă $K = 1$, un sistem de congruenţe ortogonale $d\sigma^i$ $(i = 1,2, \ldots, n-1)$ astfel ca

$$d\sigma^h = 0, \quad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

să fie sistemul invariat de transformările lui $G_r$ şi format din cele mai multe ecuaţii Pfaff. $G_r$ este atunci un grup ortogonal, separabil, de transformări de congruenţe, finit şi continuu

$$\begin{gathered} d\overline{\sigma}^h = c_k^h \, d\sigma^k, \ (h, k = 1, \ldots, m); \ d\overline{\sigma}^\alpha = c_\beta^\alpha \, d\sigma^\beta, \ (\alpha, \beta = m+1, \ldots, q) \\ d\overline{\sigma}^\lambda = c_\mu^\lambda \, d\sigma^\mu, \ (\lambda, \mu = q+1, \ldots, s); \ldots; d\overline{\sigma}^\rho = c_\tau^\rho \, d\sigma^\tau, \ (\rho, \tau = t+1, \ldots, n-1) \end{gathered} \tag{48}$$

unde numerele $q-m$, $s-q$, $\ldots$, $n-t-1$ sînt toate mai mici sau egale cu $m$, iar $c_k^h$, $c_\beta^\alpha$, $c_\mu^\lambda$, $\ldots$, $c_\tau^\rho$ sînt funcţii de cele $n-1$ variabile $\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}$ ale spaţiului $V_{n-1}$ şi de cei $r$ parametri ai grupului $G_r$.

Presupunem ştiut că dacă $N = 2P$ sau $N = 2P + 1$ şi $P < p$, atunc orice subgrup ireductibil real al grupului complet de rotaţii $G_{N(N-1)/2}$ are cel mult $P^2$ parametri. Vom arăta atunci că proprietatea se menţine pentru $P = p$, dacă $p > 3$; pentru $p = 1$, $p = 2$ şi $p = 3$, $n = 6$, proprietatea este cunoscută, iar cazul $p = 3$, $n = 7$ rezultă din faptul că grupul (4), (4′) depinde de cel mult trei funcţii independente, deci un grup $G_r$ în 7 variabile, neseparabil, are cel mult $3 + 6 = 9$ parametri.

Vom nota cu $\mathfrak{N}$ numărul funcţiilor $c_h^k$, $c_\beta^\alpha$, $c_\mu^\lambda$, $\ldots$, $c_\tau^\rho$ independente şi cu $\mathfrak{M}$ numărul maxim de parametri ce-l poate avea un grup de rotaţii neseparabil în $n$ variabile, cu $n = 2p$ sau $n = 2p + 1$ şi $\mathfrak{M} < n(n-1)/2$.

Considerînd mai întîi cazul $n = 2p$ distingem două posibilităţi:

1) $m < (n-1)/2$, deci numerele $m$, $q-m$, $s-q$, $\ldots$, $n-t-1$, care reprezintă numărul de ecuaţii din sistemele Pfaff invariate de $G_r$ în $V_{n-1}$ sînt toate inferioare lui $(n-1)/2$. În acest caz, maximul lui $\mathfrak{N}$ este

$$\mathfrak{N}_{\max} = 2 \times \frac{\dfrac{n-2}{2}\left(\dfrac{n-2}{2} - 1\right)}{2} = p^2 - 3p + 2$$

şi grupul $G_r$ are cel mult

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{\max} + 2p - 1 = p^2 - p + 1 \quad \text{parametri}$$

avem $\mathfrak{M} < p^2$ dacă $p > 1$.

2) $m > (n-1)/2$. Maximul lui $\mathfrak{N}$ este atunci

$$\mathfrak{N}_{\max} = \overline{\mathfrak{N}}_{\max} + \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2} \tag{49}$$

unde $\overline{\mathfrak{N}}_{\max}$ este numărul maxim de funcţii $c_k^h$ independente. Avem

$$\mathfrak{N}_{\max} = \frac{m^2}{4} + \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}. \tag{50}$$

Într-adevăr, să considerăm tensorii $\gamma^h_{\alpha\beta}$, $\gamma^\alpha_{hk}$, $(h, k = 1, 2, \ldots, m; \alpha, \beta = m+1, \ldots, n-1)$ ai grupului $G_r$ scris ca grup de transformări de congruenţe. Cînd aceşti tensori nu impun nici o condiţie funcţiilor $c^h_k$, după cum am arătat, $G_r$ este reductibil real; deci tensorii $\gamma^h_{\alpha\beta}$, $\gamma^\alpha_{hk}$ impun cel puţin o condiţie funcţiilor $c^h_k$. Considerăm cazurile:

1°. $\operatorname{rang} \| \gamma^h_{\gamma\beta} \| = m$, deci relaţiile

$$\gamma^h_{\alpha\beta}\, c^\alpha_\lambda\, \gamma^\beta_{\mu} = \gamma^k_{\lambda\mu}\, c^h_k$$

pot fi rezolvate în raport cu $c^h_k$; atunci avem evident

$$\mathfrak{N}_{\max} = \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}.$$

2°. $\operatorname{rang} \| \gamma^h_{\alpha\beta} \| < m$. Am arătat că cel puţin unul din tensorii

$$\gamma^{hk} = \gamma^h_{\alpha\beta}\, \gamma^k_{\alpha\beta},\ W_{hklr} = w^\alpha_{hk}\, w^\alpha_{lr},\ V_{hklr} = v^\alpha_{hk}\, v^\alpha_{lr}$$

$$\left(w^\alpha_{hk} = \gamma^\alpha_{hk} - \gamma^\alpha_{kh},\ 2v^\alpha_{hk} = \gamma^\alpha_{hk} + \gamma^\alpha_{kh}\right)$$

impune cel puţin o condiţie funcţiilor $c^h_k$. Să considerăm atunci grupul $\Gamma$ de rotaţii în $n$-1 variabile, reductibil, format din transformările

$$\overline{u}^h = a^h_k\, u^k,\ \overline{u}^\alpha = a^\alpha_\beta\, u^\beta \tag{51}$$

care satisfac condiţiilor

$$\begin{aligned} \gamma_0^{hk}\, a^h_{h'}\, a^k_{k'} &= \gamma_0^{h'k'}, \\ W^0_{hklr}\, a^h_{h'}\, a^k_{k'}\, a^l_{l'}\, a^r_{r'} &= W^0_{h'k'l'r'} \\ V^0_{hklr}\, a^h_{h'}\, a^k_{k'}\, a^l_{l'}\, a^r_{r'} &= V^0_{h'k'l'r'}, \end{aligned} \tag{52}$$

unde $\gamma_0^{hk}$, $W^0_{hklr}$, $V^0_{hklr}$ sînt valorile cantităţilor $\gamma^{hk}$, $W_{hklr}$, $V_{hklr}$ într-un punct arbitrar $P(\xi^1_0, \xi^2_0, \ldots, \xi^{n-1}_0)$ din spaţiul $V_{n-1}$. Relaţiile (52) impun cel puţin o relaţie mărimilor $a^h_k$, independentă de condiţiile de ortogonalitate

$$a^h_k\, a^{h'}_k = \delta^h_{h'}, \tag{53}$$

deoarece nu putem avea simultan relaţii de forma

$$\begin{aligned} \gamma_0^{hk} &= \rho\, \delta^h_k, \\ W^0_{hklr} &= \rho' \delta^{(hk)}_{(lr)} = \rho'\, \delta^h_l\, \delta^k_r,\ (h < k,\ l < r) \\ V^0_{hklr} &= \rho_1\, \delta^h_k\, \delta^l_r + \rho_2\, \delta^l_h\, \delta^k_r, \end{aligned}$$

în orice punct $P$ al lui $V_{n-1}$. Deci primele $m$ formule (51), în care mărimile $a^h_k$ satisfac condiţiilor (52), definesc un grup $\mathcal{G}$ în $m$ variabile, care nu poate fi grupul complet de rotaţii $\mathcal{G}_{m\,(m-1)/2}$. Presupunînd că $\mathcal{G}$ este

ireductibil real, conform ipotezei de inducție $\mathcal{G}$ are cel mult $m^2/4$ parametri, deci relațiile (52) impun mărimilor $a_k^h$ cel puțin

$$\frac{m(m-1)}{2} - \frac{m^2}{4} \tag{54}$$

relații independente de (53); aceasta înseamă că numărul polinoamelor în $a_k^h$, funcțional independente,[1]) care apar în primii membri ai condițiilor (52), este cel puțin egal cu (54).

Deoarece funcțiile $c_k^h$ satisfac în fiecare punct $P$ condițiilor (52) în care se schimbă numai membri din dreapta, numărul funcțiilor $c_k^h$ independente va fi cel mult

$$\frac{m(m-1)}{2} - \left(\frac{m(m-1)}{2} - \frac{m^2}{4}\right) = \frac{m^2}{4};$$

deci numărul funcțiilor $c_k^h$, $c_\beta^\alpha$ independente este în orice caz cel mult egal cu $\mathfrak{N}_{max}$ dat de (50), deci

$$\mathfrak{N}_{max} = \frac{3m^2 - 2(2n-3)m + 2(n-1)(n-2)}{4}. \tag{50'}$$

Dacă $m$ are valoarea minimă, deci $m = \frac{n}{2} = p$, avem

$$\mathfrak{N}_{max} = \frac{3p^2 - 6p + 4}{4}$$

și $G_r$ are cel mult $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{max} + 2p - 1 = \frac{3p^2 + 2p}{4}$ parametri, deci $r \leqslant p^2$ dacă $n = 2p \geqslant 4$.

Dacă $m$ are valoarea maximă $m = n - 2 = 2(p-1)$, avem

$$\mathfrak{N}_{max} = (p-1)^2 \text{ și } \mathfrak{M} = (p-1)^2 + 2p - 1 = p^2.$$

Teorema este deci demonstrată pentru $n = 2p$.

Considerăm acum cazul $n = 2p+1$ în care distingem două posibilități:

1) $m < (n-1)/2$, deci $m, q-m, s-q, \ldots, n-t-1 < p$. Avem deci

$$\mathfrak{N}_{max} = \frac{\frac{n-3}{2}\left(\frac{n-3}{2} - 1\right)}{2} + \frac{\frac{n-3}{2}\left(\frac{n-3}{2} - 1\right)}{2} + 1 = p^2 - 3p + 3$$

și

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{max} + 2p = p^2 - p + 3 \leqslant p^2 \text{ dacă } p \geqslant 3$$

2) $m \geqslant (n-1)/2 = p$. Atunci $\mathfrak{N}_{max}$ este dat de (50') cu $n = 2p+1$, dacă $m > p$ și de

$$\frac{p^2}{4} + \frac{(p-1)(p-2)}{2} = \frac{3p^2 - 6p + 4}{4} \tag{50''}$$

---

[1]) independente între ele și independente de $a_k^h$ $a_k^{h'}$ din (53).

dacă $m = p$. Deci:

Dacă $m=p$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{\max} + 2p = \dfrac{3p^2+2p+4}{4} < p^2$ cînd $p \geqslant 4$

Dacă $m = p+1$,

$$\mathfrak{N}_{\max} = \frac{3p^2-4p+5}{4}$$

şi $\mathfrak{M} = (3p^2+4p+5)/4 \leqq p^2$ cînd $p \geqslant 5$; dacă $p=4$, avem $\mathfrak{M} - p^2 < 2$, dar $\mathfrak{N}_{\max}$ dat de (50')), deci $\mathfrak{M}$, poate fi oricînd scăzut cu o unitate, deoarece $\gamma^h_{\alpha\beta}$, $\gamma^\alpha_{hk}$ nu pot fi toţi nuli şi deci există cel puţin o relaţie între $c^h_k$ şi $c^\alpha_\beta$.

Dacă $m = 2p-2$, avem

$$\mathfrak{N}_{\max} = (p-1)^2 + 1,$$

grupul de transformări de congruenţe fiind dat de

$$d\overline{\sigma}^h = c^h_k \, d\sigma^k, \quad (h, k = 1, 2, \ldots, 2p-2) \tag{55}$$

$$d\overline{\sigma}^\alpha = c^\alpha_\beta \, d\sigma^\beta, \quad (\alpha, \beta = 2p-1, 2p). \tag{55'}$$

Dar avem o singură funcţie $c^\alpha_\beta$ independentă, care se poate exprima în raport cu $c^h_k$ dacă folosim relaţiile

$$\overline{w}^\alpha_{hk} \, c^h_{h'} \, c^k_{k'} = w^\beta_{h'k'} \, c^\alpha_\beta \tag{55''}$$

deci putem lua

$$\mathfrak{N}_{\max} = (p-1)^2 \tag{56}$$

Dacă vom considera formele

$$\Omega^\alpha = w^\alpha_{hk} \left( d\sigma^h \, \delta\sigma^h - d\sigma^k \, \delta\sigma^h \right), \quad (\alpha = 2p-1, \; 2p) \tag{56'}$$

relaţiile (55'') ne arată că printr-o transformare (55) şi (55') avem

$$\overline{\Omega}^\alpha = c^\alpha_\beta \, \Omega^\beta \tag{56''}$$

prin urmare forma

$$\Omega = [\Omega^{2p-1}, \; \Omega^{2p}] = \frac{1}{2} \left( w^{2p-1}_{hr} \, w^{2p}_{rk} - w^{2p-1}_{kr} \, w^{2p}_{rh} \right) [d\sigma^h \, d\sigma^k] \tag{57}$$

$$([d\sigma^h \, d\sigma^k] = d\sigma^h \, \delta\sigma^k - d\sigma^k \, \delta\sigma^h)$$

se transformă după legea

$$\overline{\Omega} = [\overline{\Omega}^{2p-1}, \; \overline{\Omega}^{2p}] = \left( c^{2p-1}_{2p-1} \, c^{2p}_{2p} - c^{2p-1}_{2p} \, c^{2p}_{2p-1} \right) [\Omega^{2p-1}, \; \Omega^{2p}]$$

deci

$$\overline{\Omega} = \Omega,$$

şi forma (57) este un invariant al grupului (55).

Vrem să arătăm că dacă numărul funcţiilor $c_k^h$ independente din (55) este $(p-1)^2$, atunci grupul $G_r$ este reductibil real. Va rezulta atunci că putem scădea din $\mathfrak{N}_{\max}$ dat de (56) cel puţin o unitate, deci avem

$$\mathfrak{N} = (p-1)^2 - 1 + 2p = p^2$$

şi proprietatea enunţată mai sus va fi complet demonstrată.

Într-adevăr observăm în primul rînd că trebuie să avem, pentru ca numărul funcţiilor $c_k^h$ independente să fie $(p-1)^2$

$$\gamma_{\alpha\beta}^h = 0 \tag{58}$$

Dacă forma $\Omega$ dată de (57) este identic nulă şi aducem forma $\Omega^{2p-1}$ la următoarea formă canonică

$$\Omega^{2p-1} = w_{12}^{2p-1}[d\sigma^1 d\sigma^2] + w_{34}^{2p-1}[d\sigma^3 d\sigma^4] + \ldots + w_{2p-3,2p-2}^{2p-1}[d\sigma^{2p-3}, d\sigma^{2p-2}]$$

atunci $\Omega^{2p}$ va avea o expresie analogă

$$\Omega^{2p} = w_{12}^{2p}[d\sigma^1 d\sigma^2] + w_{34}^{2p}[d\sigma^3 d\sigma^4] + \ldots + w_{2p-3,2p-2}^{2p}[d\sigma^{2p-3}, d\sigma^{2p-2}].$$

Dacă forma $\Omega^{2p-1} + \rho\,\Omega^{2p}$ are coeficientul lui $[d\sigma^{2f-1} d\sigma^{2f}]$ nul, oricare ar fi $\rho$, relaţiile (55), (56'), (56'') ne spun că grupul (55) invariază sistemul $d\sigma^{2f-1} = d\sigma^{2f} = 0$, deci (55) este separabil, afară de cazul cînd $\Omega^{2p-1}$ şi $\Omega^{2p}$ sînt identic nule, deci cînd avem

$$w_{hk}^{\alpha} = 0. \tag{59}$$

Formele

$$v_{hk}^{\alpha} d\sigma^h d\sigma^k \quad , \quad (2v_{hk}^{\alpha} = \gamma_{hk}^{\alpha} + \gamma_{kh}^{\alpha})$$

trebuie să fie proporţionale cu $d\sigma_1^2$ unde

$$d\sigma_1^2 = (d\sigma^1)^2 + \ldots + (d\sigma^{2p-2})^2, \tag{60}$$

deci avem (formula (21)

$$2v_{hk}^{\alpha} = \gamma_{hk}^{\alpha} + \gamma_{kh}^{\alpha} = 2\xi_k^h v^{\alpha} \tag{61}$$

Dacă avem relaţiile (59), din relaţiile (58) şi (61) vedem că putem scrie

$$d\sigma_1^2 = (d\sigma^h)^2 = \sin^2 \xi^{2p}\, d\sigma^2$$

$$d\sigma_2^2 = (d\sigma^{\alpha})^2 = \cos^2 \xi^{2p} (d\xi^{2p-1})^2 + (d\xi^{2p})^2,$$

$d\sigma^2$ fiind o metrică cu curbură constantă în $2p-2$ variabile $\xi^1, \ldots, \xi^{2p-2}$ deci grupul $G_r$ este reductibil real.

Deci $\Omega^{\alpha}$ nu pot fi identic nule şi există o formă $\Omega^{2p-1} + \rho\,\Omega^{2p}$ ($\rho = \text{const.}$) pentru care toţi coeficienţii $w_{2f-1,2f}^{2p-1} + \rho\, w_{2f-1,2f}^{2p}$ sînt diferiţi de zero; presupunînd că am luat pentru această formă pe $\Omega^{2p-1}$, formele $w_{2f-1,2f}^{2p}\,\Omega^{2p-1} - w_{2f-1,2f}^{2p-1}\,\Omega^{2p}$ ($f = 1, 2, \ldots, p-1$) sînt toate invariate de grupul (55).

Pentru ca grupul (55) să nu fie separabil, trebuie să avem

$$\Omega^{\alpha} = w^{\alpha}\,\omega,$$

unde $\omega = [d\sigma^1\, d\sigma^2] + [d\sigma^3\, d\sigma^4] + \ldots + [d\sigma^{2p-3}\, d\sigma^{2p-2}]$ deci $w^\alpha$ sînt componentele unui vector al grupului (55').

Să aducem acest vector la forma canonică

$$w^{2p-1} = w,\ w^{2p} = 0 \tag{62}$$

unde $w \neq 0$, deoarece altfel am avea formulele (59). Atunci avem

$$w^{2p}_{hk} = 0,\ w^{2p-1}_{hk} = 0,\ w^{2p-1}_{2f-1,2f} = w\ \ (h, k \neq 2f-1, 2f) \tag{63}$$

şi grupul (55)') se scrie

$$d\sigma^{2p-1} = d\sigma^{2p-1},\ d\sigma^{2p} = d\sigma^{2p}.$$

Deci $\gamma^{2p-1}_{2ph} = -\gamma^{2p}_{2p-1h}$ sînt componentele unui vector al grupului (55) şi atunci trebuie să avem

$$\gamma^{2p-1}_{2p\,h} = -\gamma^{2p}_{2p-1h} = 0 \tag{64}$$

iar relaţiile (63), (64) ne spun că ecuaţia $d\sigma^{2p} = 0$ este complet integrabilă, prin urmare putem lua

$$d\sigma^{2p} = \lambda\, d\xi^{2p}. \tag{65}$$

Din (63) şi (61) rezultă

$$\gamma^{2p}_{hk} = v^{2p}\, \zeta^h_k. \tag{66}$$

Ţinînd seamă de relaţiile (58), (66), (23''), relaţia

$$\gamma^{2p}_{h\,2p\,k} = 0,\ (h \neq k),$$

devine

$$-\gamma^{2p-1}_{2p\,2p}\,\gamma^{2p-1}_{hk} - v^{2p}\gamma^k_{h\,2p} + v^{2p}\, w^h_{2p\,k} = 0,$$

sau, ţinînd seama că

$$w^h_{2p\,k} = -\gamma^{2p}_{hk} + \gamma^k_{h\,2p} = \gamma^k_{h\,2p}\ (h \neq k)$$

şi luînd $h = 1$, $k = 2$, deci $2\gamma^{2p-1}_{hk} = w^{2p-1}_{1\,2} = w \neq 0$, deoarece avem (61) şi (63), deducem

$$\gamma^{2p-1}_{2p\,2p} = 0 \tag{67}$$

Din relaţiile (58), (67) vedem că $\lambda$ din (65) nu depinde de $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{2p-2}, \xi^{2p-1}$, deci putem lua

$$d\sigma^{2p} = d\xi^{2p}. \tag{68}$$

În mod analog, condiţia $\gamma^{2p}_{2p-1\,1\,2} = 0$ ne dă

$$\gamma^{2p}_{2p-1\,2p-1} = v^{2p} \tag{69}$$

şi din $\gamma^{2p}_{h\,2p\,h} = 1$ deducem

$$-\frac{\partial v^{2p}}{\partial \xi^{2p}} - (v^{2p})^2 = 1,$$

deci

$$v^{2p} = -tg(\xi^{2p} + c), \tag{70}$$

în care $c$ este o constantă sau o funcţie de $\xi^1, \ldots, \xi^{2p-1}$

Să considerăm metrica

$$d\omega^2 = (d\sigma^1)^2 + (d\sigma^2)^2 + \ldots + (d\sigma^{2p-1})^2 \tag{71}$$

şi să calculăm componentele tensorului de curbură $\Gamma^h_{klr}$ ale metricii (71) în care presupunem $\xi^{2p} = \text{const.}$, pe corgruenţele $d\sigma^h$ ($h, k, l, r = 1, 2, \ldots, 2p-1$). Sistemul $d\sigma^h = 0$ fiind complet integrabil, putem pune

$$d\sigma^h = \lambda^h_k \, d\xi^h \tag{72}$$

şi (71) este o formă pătratică în $d\xi^k$

Găsim atunci $\Gamma^h_{klr} = 0$ pentru 3 sau 4 indici distincţi şi

$$\Gamma^h_{khk} = \gamma^h_{khk} + (v^{2p})^2 = 1 + (v^{2p})^2 \tag{72'}$$

deci metrica (71) este izotropă în fiecare punct, deci conform teoremei lui Schur [3][1]), metrica (71) este cu curbură constantă pentru fiecare valoare a lui $\xi^{2p}$.

Din (72') deducem că $v^{2p}$ nu depinde de $\xi^1, \ldots, \xi^{2p-1}$, deci putem lua în (70) $c = 0$, deci

$$v^{2p} = -tg\xi^{2p} \tag{73}$$

şi atunci metrica (71) se scrie

$$d\omega^2 = \cos^2 \xi^{2p} \, d\sigma_1^2,$$

$d\sigma_1^2$ fiind o metrică cu curbură constantă $K = 1$ în $\xi^1, \ldots, \xi^{2p-1}$. Grupul $G_r$ învariind metrica $d\omega^2$ şi pe $\xi^{2p}$ rezultă că $G_r$ este un grup de rotaţii în $2p$ variabile, deci reductibil real. Deci:

*Dacă forma* $\Omega$ *dată de (57) este identic nulă şi dacă numărul funcţiilor* $c^h_k$ *independente din (55) este* $(p-1)^2$, *atunci grupul* $G_r$ *este reductibil real, fiind un grup de rotaţii în* $2p-1$ *sau* $2p$ *variabile.*

Vom presupune acum că forma (57) nu este identic nulă şi că a fost adusă la forma canonică

$$\Omega = w_{12}[d\sigma^1 \, d\sigma^2] + [d\sigma^3 \, d\sigma^4] + \ldots + w_{2p-3,2p-2}[d\sigma^{2p-3} \, d\sigma^{2p-2}].$$

Pentru ca grupul (55) să nu fie separabil, trebuie să avem $w_{2f-1,2f} = w (f = 1, 2, \ldots, p-1)$, deci grupul (55) invariază forma

$$[d\sigma^1 \, d\sigma^2] + [d\sigma^3 \, d\sigma^4] + \ldots + [d\sigma^{2p-3} \, d\sigma^{2p-2}] \tag{74}$$

[1]) p. 271.

Vom arăta că dacă grupul (55) invariază forma (74) şi sistemul

$$\Omega^{2p-1} = 0, \quad \Omega^{2p} = 0, \tag{75}$$

cu $\Omega^\alpha$ daţi de (56'), atunci numărul funcţiilor $c_k^h$ independente nu poate fi $(p-1)^2$, decît dacă am avea $\Omega^\alpha$ proporţionali cu (74), ceea ce este imposibil deoarece atunci

$$\Omega = [\Omega^{2p-1}, \Omega^{2p}] = 0.$$

Notăm cu $(w_{hk}^\alpha)_0$ valorile pe care le iau componentele $w_{hk}^\alpha$ într-un punct oarecare $P(\xi_0^1, \ldots, \xi_0^{2p})$ din spaţiul $V_{n-1}$ $(n = 2p+1)$ cu curbură constantă $K = 1$ şi considerăm grupul de rotaţii

$$\overline{u}^h = a_k^h \, u^k \; (h, k = 1, 2, \ldots, 2p-2) \tag{76}$$

care invariază forma biliniară în $u^h$ şi $v^h$

$$\omega = [u' \, u^2] + [u^3 \, u^4] + \ldots + [u^{2p-3} \, u^{2p-2}] \quad ([u^h \, u^k] = u^h v^k - u^k v^h) \tag{77}$$

şi sistemul

$$(w_{hk}^{2p-1})_0 [u^h \, u^k] = 0, \; (w_{hk}^{2p})_0 [u^h \, u^k] = 0 \tag{78}$$

Luăm $v^h = du^h$ şi vom scrie grupul (76) ca un grup de mişcări $\Gamma$ al unui spaţiu $V_{2p-3}$ cu curbură constantă $K = 1$; grupul $\Gamma$ va invaria în $V_{2p-3}$ ecuaţia Pfaff ce rezultă din (77) şi sistemul Pfaff ce rezultă din (78), deci dacă scriem grupul $\Gamma$ ca un grup ortogonal de transformări de congruenţe

$$d\overline{\omega}^h = c_k^h \, d\omega^k \; (h, k = 1, 2, \ldots, 2p-3),$$

acest grup va fi de forma

$$d\overline{\omega}^i = c_j^i \, d\omega^j \quad (i, j = 1, 2, \ldots 2p-6)$$
$$d\overline{\omega}^\alpha = c_\beta^\alpha \, d\omega^\beta \; (\alpha, \beta = 2p-5, 2p-4)$$
$$d\overline{\omega}^{2p-3} = d\omega^{2p-3},$$

iar numărul funcţiilor $c_k^h$ independente este cel mult

$$(p-3)^2 + 1$$

şi grupul $\Gamma$ are cel mult $(p-3)^2 + 1 + 2p - 3 = p^2 - 4p + 7$ parametri; deci invarianţii (77), (78) impun cel puţin

$$\frac{(2p-2)(2p-3)}{2} - (p^2 - 4p + 7),$$

condiţii coeficienţilor $a_k^h$ din (76), deci acelaşi număr de condiţii impun invarianţii (74) şi (75) grupului (55), deci acest grup depinde de $p^2 - 4p + 7$ funcţii arbitrare şi avem $p^2 - 4p + 7 < (p-1)^2$ dacă $p > 3$.

Vom demonstra acum că un grup de rotaţii în $2p$ variabile, ireductibil real, cu $p^2$ parametri, este un grup care are o formă Pfaff invariantă, ce se poate aduce la următoarea formă canonică

$$w = x^1 \, dx^2 - x^2 \, dx^1 + x^3 \, dx^4 - x^4 \, dx^3 + \ldots + x^{2p-1} \, dx^{2p} - x^{2p} \, dx^{2p-1} \tag{79}$$

Se ştie că grupul de rotaţii care are forma invariantă (79) are $p^2$ parametri şi este generat de transformările infinitezimale [5] [1]).

$$X_{2r-1,2r};\ X_{2s-1,2r-1}+X_{2s,2r};\ X_{2s-1,2r}-X_{2s,2r-1} \qquad (80)$$

$$\left(X_{ij}=x^i\frac{\partial f}{\partial x^j}-x^j\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$$

Pe de altă parte, din analiza făcută mai sus rezultă că maximul de $p^2$ este dat numai în cazul cînd grupul de transformări de congruenţe în spaţiul cu curbură constantă $V_{2p-1}$ are o formă Pfaff invariantă, deci scriem

$$d\bar{\sigma}^h = c_k^h\, d\sigma^k \quad (h,k=1,2,\ldots,2p-2) \qquad (81)$$

$$d\bar{\sigma}^{2p-1} = d\sigma^{2p-1};$$

Să arătăm că grupul $G_{p2}$ care corespunde maximului $p^2$ este local tranzitiv în $V_{2p-1}$ [2]).

Intr-adevăr, dacă $G_{p2}$ ar fi intranzitiv în $V_{2p-1}$, el ar invaria în $V_{2p-1}$ un sistem Pfaff complet integrabil

$$d\sigma^\alpha = 0\ (\alpha=1,2,\ldots,m) \qquad (82)$$

care defineşte varietăţile de intranzitivitate. Funcţiile $c_k^h$ independente trebuie să fie în număr de (p—1), deci grupul (81) nu trebue să fie separabil, prin urmare sistemul (82) trebuie să se confunde cu unul din sistemele

$$d\sigma^h = 0 \quad sau \quad d\sigma^{2p-1}=0.$$

In primul caz, varietăţile de intranzitivitate sînt curbe, deci grupul respectiv are cel mult un parametru. Iar dacă $d\sigma^{2p-1}=0$ este complet integrabilă, putem pune

$$d\sigma^{2p-1}=\lambda d\xi^{2p-1}$$

Vectorul $\gamma^h_{2p-1\ 2p-1}$ fiind nul, $\lambda$ depinde numai de $\xi^{2p-1}$, deci putem pune

$$d\sigma^{2p-1}=d\xi^{2p-1} \qquad (83)$$

Trebuie să avem apoi $\gamma^{2p-1}_{hk}+\gamma^{2p-1}_{kh}=2\rho\,\delta^h_k$, deci dacă punem

$$d\sigma^h=\lambda^h_k\,d\xi^k,\ (h,k=1,2,\ldots,2p-2),$$

metrica $(d\sigma^h)^2$ putem scrie astfel

$$(d\sigma^h)^2 = e^{2\int\rho d\xi^{2p-1}} d\sigma_1^2,$$

$d\sigma_1^2$ fiind o metrică în variabilele $\xi^1,\ldots,\xi^{2p-2}$. Calculînd componentele tensorului de curbură al metricei $(d\sigma^h)^2$ pentru $\xi^{2p-1}=$ const., obţinem relaţii de forma (23'''), deci $d\sigma_1^2$ este cu curbură constantă şi grupul respectiv este un grup de rotaţii în $2p-1$ variabile.

---

[1]) p. 122.

[2]) Vom spune că un grup este local transitiv în $V_{2p-1}$, dacă fiind date două puncte $P$, $P'$ arbitrare în $V_{2p-1}$, $P'$ infinit vecin de $P$, există o transformare infinitezimală a grupului care să transforme unul din puncte în celălalt.

Deci $G_p^2$ este local tranzitiv în $V_{2p-1}$ și atunci rezultă că grupul de stabilitate al unui punct $P$ are

$$p^2 - (2p - 1) = (p-1)^2 \ldots \text{ parametri.}$$

Luăm pentru $P$ punctul în care axa $x^1$ taie hipersfera de rază unitate din $E_{2p}$, deci $P(1,0,\ldots,0)$. Grupul de stabilitate al lui $P$ va fi un grup de rotații în hiperplanul $x^1=0$ care va invaria în acest hiperplan spațiul liniar dat de

$$d\sigma_0^{2p-1} = 0,$$

$d\sigma_0^{2p-1}$ fiind forma Pfaff $d\sigma_0^{2p-1}$ luată în punctul $P$. Deci grupul de stabilitate al lui $P$ este un grup de rotații în $2p$-2 variabile.

Vom presupune că dacă un grup de rotații ireductibil real în $2p$-2 variabile are $(p-1)^2$ parametri, atunci el este dat de (80) cu $r,s = 1,\ldots,p-1$ și vom arăta că proprietatea se menține dacă înlocuim pe $p-1$ cu $p$.

Într-adevăr, dacă grupul de stabilitate al punctului $P$, care are $(p-1)^2$ parametri, este grupul (80) cu $r,s = 1,2,\ldots,p-1$, grupul $G_p^2$ va fi format din operatorii (80) cu $r,s = 1,2,\ldots,p-1$ și din alți $2p-1$ operatori $X_1,\ldots,X_{2p-1}$. Formînd parantezele lui Poisson cu cîte un operator $X_i$ și un operator (80), se găsește ușor că putem lua pentru $X_i$ operatorii

$$X_{2p-1,2p};\ X_{2p-1,2r-1} + X_{2p,2r};\ X_{2p-1,2r} - X_{2p,2r-1}$$
$$(r = 1,2,\ldots,p-1)$$

deci $G_p^2$ este dat de (80) cu $r,s=1,2,\ldots,p$. Un grup de rotații ireductibil real, în 4 variabile, cu 4 parametri, fiind dat de operatorii

$$X_{12},\ X_{34},\ X_{13} + X_{24},\ X_{14} - X_{23},$$

rezultă că în general:

*Dacă un grup de rotații $G_p^2$ în $2p$ variabile este ireductibil real, atunci $G_p^2$ poate fi definit prin transformările infinitezimale* (80).

Am demonstrat prin considerații analoge, *că un grup de rotații ireductibil real în $2p+1$ variabile are cel mult $p^2$-1 parametri.*

## III. Spațiile $V_n$ ireductibile cu grup maxim tranzitiv de mișcări

Am demonstrat că:

*Grupul dat de* (80) *este grupul maxim de rotații, ireductibil real, după grupul complet de rotații $G_{2p^2-p}$.*

Se știe că există spații $V_{2p}$ cu grup tranzitiv de mișcări și avînd grupul (80) ca grup de stabilitate. Aceste spații au fost considerate de G. Vrănceanu [4];[1]) [5][1]) [8] și le vom numi spații Vrănceanu $V_{2p}(\lambda)$. Avem deci următoarea:

Teoremă *Spațiile Vrănceanu $V_{2p}(\lambda)$ sînt spațiile ireductibile cu curbură variabilă și grup de stabilitate ireductibil real, care au un grup maxim de mișcări cu $p^2+2p$ parametri.*

Dacă un spațiu $V_{2p}$ are un grup cu mai mult de $p^2+2p$ parametri, și un grup tranzitiv de mișcări, atunci $V_{2p}$ este reductibil sau cu curbură

[1]) p. 45.
[2]) p. 122 și 131.

constantă. Intr-adevăr, grupul de stabilitate al unui punct oarecare din $V_{2p}$ avînd mai mult de $p^2$ parametri, va fi un grup de rotaţii reductibil real şi va conţine un grup complet de rotaţii în $m>p$ variabile. Deci dacă $m<2p$, grupul complet de mişcări al lui $V_{2p}$ va invaria în fiecare punct două spaţii liniare tangente complimentare, deci este un grup de transformări de congruenţe, orotgonal, şi separabil

$$d\bar{s}^h = c_k^h \, ds^k \, (h,k = 1,2 \ldots, m>p)$$

$$d\bar{s}^\alpha = c_\beta^\alpha \, ds^\beta \, (\alpha,\beta = m+1, \ldots, 2p)$$

Numărul $\mathfrak{N}$ al funcţiilor $c_k^h$, $c_\beta^\alpha$ independente trebuie să fie cel puţin $p^2$, deoarece grupul de mişcări al lui $V_{2p}$ are cel mult $\mathfrak{N} + 2p$ parametri; deci numărul funcţiilor $c_k^h$ independente este $m(m\text{-}1)/2$ şi atunci metrica lui $V_{2p}$ este de forma (24') şi deci dacă $V_{2p}$ are un grup tranzitiv, avem $\rho =$ const. şi $V_{2p}$ este reductibil, dacă are curbura variabilă.

Deci:

*Spaţiile Vrănceanu $V_{2p}(\lambda)$ sînt spaţiile ireductibile cu grup tranzitiv maxim, după spaţiile $V_{2p}$ cu curbură constantă.*

Ţinînd seama că un grup de rotaţii în $2p+1$ variabile, ireductibil real şi care nu este grupul cmplet $\mathcal{G}_{2p^2+p}$, are cel mult $p^2$ parametri, rezultă că:

*Un spaţiu $V_{2p+1}$ ireductibil, cu curbură variabilă şi grup tranzitiv de mişcări, are un grup cu cel mult $(p+1)^2$ parametri.*

Noi am demonstrat că maximul de $p^2$ parametri nu poate fi atins de subgrupurile ireductibile real ale lui $\mathcal{G}_{2p^2+p}$; rezultă că spaţiul $V_{2p+1}$ avînd un grup cu $(p+1)^2$ parametri este ireductibil dacă grupul de stabilitate este (80) cu $r,s=1,\ldots,p$.

Vrem să arătăm acuma că există spaţii $V_{2p+1}$ ireductibile, cu grup tranzitiv şi avînd (80) ca grup de stabilitate.

Vom considera pentru aceasta grupul $G_{(p+1)^2}$ în $2p+2$ variabile, dat de (80) cu $r,s=1,2,\ldots,p+1$ şi fie $V_{2p+1}$ hipersfera definită de

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^{2p+2})^2 = 1;$$

să alegem un sistem de coordonate $\xi^1, \ldots, \xi^{2p+1}$ în $V_{2p+1}$, astfel ca sistemele invariate de $G_{(p+1)^2}$ în $V_{2p+1}$ să fie

$$d\sigma^h = \lambda_k^h \, d\xi^k = 0 \, (h,k = 1,2,\ldots,2p) \tag{84}$$

şi

$$d\sigma^{2p+1} = \lambda_h^{2p+1} \, d\xi^h + \lambda_{2p+1}^{2p+1} \, d\xi^{2p+1} = 0 \tag{85}$$

unde $d\sigma^{2p+1}$ se deduce din $x^1 \, dx^2 - x^2 \, dx^1 + \ldots + x^{2p+1} \, dx^{2p+2} - x^{2p+2} \, dx^{2p+1}$ cînd înlocuim variabilele $x$ în funcţie de $\xi$. Printr-o transformare

$$\xi^h = \xi'^h, \; \xi^{2p+1} = \varphi(\xi'^1, \xi'^2, \ldots, \xi'^{2p}, \xi'^{2p+1})$$

putem face astfel ca $\lambda'^{2p+1}_{2p+1} = 1$, deoarece $\lambda^{2p+1}_{2p+1} \neq 0$, luăm

$$d\sigma^{2p+1} = \lambda_h^{2p+1} \, d\xi^h + d\xi^{2p+1} \tag{86}$$

unde nu toţi $\lambda_h^{2p+1}$ sînt nuli deoarece $d\sigma^{2p+1}$ este de clasă $2p+1$.

Deoarece grupul $G_{(p+1)^2}$ nu invariază nici un alt sistem Pfaff în afară de (84) şi (85), trebuie să avem

$$\gamma_{hk}^{2p+1} + \gamma_{kh}^{2p+1} = 2\rho\delta_k^h,$$

$\rho$ fiind un invariant; $d\rho = 0$ fiind o ecuaţie invariantă, rezultă $\rho = \text{const}$ şi atunci avem

$$d\sigma_0^2 = (d\sigma^h)^2 = e^{2\rho\xi^{2p+1}} d\sigma_1^2 \tag{87}$$

unde $d\sigma_1^2$, este o metrică în variabilele $\xi^1, \ldots, \xi^{2p}$.

Să arătăm că avem $\rho = 0$. Intr-adevăr, dacă $\rho \neq 0$, transformările care păstrează metrica (87) sînt de forma

$$\bar{\xi}^h = \bar{\xi}^h(\xi^1, \ldots, \xi^{2p}), \quad \bar{\xi}^{2p+1} = \xi^{2p+1} + \frac{\psi(\xi^1, \ldots, \xi^{2p})}{\rho} \tag{88}$$

forma $d\sigma_1^2$, din (87) transformîndu-se în

$$d\bar{\sigma}_1^2 = e^{-2\psi} d\sigma_1^2,$$

unde $\psi$ este o funcţie numai de $\xi^1, \ldots, \xi^{1p}$; deci transformările (88), care formează grupul $G_{(p+1)^2}$ sînt astfel încît primele $2p$ formule definesc un grup conform al metricii $d\sigma_1^2$, funcţia $\psi$ depinzînd de parametrii acestui grup. Dar metrica $d\sigma_1^2$, este metrica unui spaţiu al lui Einstein, deoarece grupul (88) nu invariază nici un sistem Pfaff în variabilele $\xi^1, \ldots, \xi^{2p}$ şi are curbura variabilă [1]) deci tensorul lui Weyl al metricii $d\sigma_1^2$, nu este nul [4] [2]) iar metrica asociată invariantă [10] [3]) are un grup cu cel mult $p^2 + 2p$ parametri, deci transformările (88) depind de cel mult $p^2 + 2p$ parametri, ceea ce este imposibil.

Deci avem în (87) $\rho = 0$.

Transformările lui $G_{(p+1)^2}$ invariind pe $d\sigma_1^2$ şi $d\sigma^{2p+1}$ dat de (86), vor fi de forma

$$\xi^h = \bar{\xi}^h(\xi^1, \ldots, \xi^{2p}), \quad \bar{\xi}^{2p+1} = \bar{\xi}^{2p+1} + \psi(\xi^1, \ldots, \xi^{2p}) + a \; (a = \text{const.})$$

unde $\psi$ depinde de parametrii grupului $G$ dat de primele $2p$ formule. Aceste transformări depinzînd de $(p+1)^2$ parametri, trebuie ca $G$ să aibă numărul maxim de parametri $p^2 + 2p$ ce-l poate avea metrica $d\sigma_1^2$, şi ca $a$ să fie un parametru independent de parametrii lui $G$. Deci metrica $d\sigma_1^2$, este metrica unui spaţiu Vrănceanu $V_{2p}(\lambda)$ Deci:

*Metrica spaţiului cu curbură constantă pozitivă $\mathcal{V}_{2p+1}$ se poate scrie*

$$d\sigma^2 = d\sigma_1^2 + (d\sigma^{2p+1})^2$$

*unde $d\sigma_1^2$ este metrica unui spaţiu Vrănceanu $V_{2p}(\lambda)$ iar $d\sigma^{2p+1}$ o formă Pfaff în $2p+1$ variabile $\xi^1, \ldots, \xi^{2p+1}; \xi^1, \ldots, \xi^{2p}$ fiind variabilele metricii $d\sigma_1^2$.*

---

[1]) Pentru a arăta aceasta, să observăm că putem alege formele $d\sigma^h$ astfel încît să avem $d\sigma^{2p+1} = d\xi^{2p+1} - ud\sigma^{2p}$, $\Delta\sigma^{2p+1} = w\,[d\sigma^1 d\sigma^2] + w\,(d\sigma^3 d\sigma^4] + \ldots + w\,[d\sigma^{2p-1} d\sigma^{2p}]$ $(w \neq 0)$, deci avem $\gamma_{11}^{2p+1} = \rho$, $\gamma_{34}^{2p+1} = w$, $\gamma_{14}^{2p+1} = 0$ şi condiţia $\gamma_{314}^1 = 0$ ne dă cu (23'') componenta tensorului de curbură a metricii (87) cu $\xi^{2p+1} = \text{const}$: $\Gamma_{314}^1 = \rho w \neq 0$ deoarece $\frac{\partial\gamma_{31}^1}{\partial S^4} = \mu_y^h \frac{\partial\gamma_{31}^1}{\partial\xi^h}$, etc.

[2]) p. 31.

[3]) p. 53

*Grupul* $G_{(p+1)^2}$ *invariază evident orice metrică de forma*

$$d\sigma^2(\mu) = d\sigma_1^2 + \mu\left(d\sigma^{2p+1}\right) \quad (\mu = \text{const.});$$

$d\sigma^2(\mu)$ *este metrica unui spațiu ireductibil* $\mathcal{V}_{2p+1}(\lambda,\mu)$ *care are un grup tranzitiv cu* $(p+1)^2$ *parametri.*

## О ГРУППАХ МАКСИМАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ $V_n$

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

*Всякая подгруппа* $G_r$ *всей группы вращений в n переменных является группой движения некоего пространства с постоянной положительной кривизной* $V_{n-1}$, *имеющего в качестве инварианта в* $V_{n-1}$ *две или несколько дополнительных систем Пфаффа.*

Пользуясь методом конгруенции, предложенным профессором Г. Врэнчану, выводят, что:

Группа вращений $G_r$ в $n$ переменных, действительно несократимая с $r < n(n-1)/2$ параметрами может иметь не более $p^2$ параметров, если $n = 2p$ или $n = 2p+1$.

Отсюда следует, что пространства Врэнчану $V_{2p}(\lambda)$ [1], [2], [8], представляют собой римановы несократимые пространства $V_{2p}$ с переменной кривизной и максимальной группой движений с $p^2 + 2p$ параметрами.

Приводятся наконец способы измерения несократимых пространств $V_{2p+1}$ с переменной кривизной, имеющих максимальную переходную группу движений с $(p+1)^2$ параметрами.

## SUR LES GROUPES MAXIMUMS DE MOUVEMENT DES ESPACES DE RIEMANN $V_n$

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on démontre le théorème suivant:

*Tout sous-groupe* $G_r$ *du groupe complet de rotations en n variables est un groupe de mouvements d'un espace à courbure constante positive* $V_{n-1}$ *qui a comme invariants dans* $V_{n-1}$ *deux ou plusieurs systèmes de Pfaff complémentaires.*

En utilisant la méthode des congruences de G. Vrănceanu, on déduit que:

*Un groupe* $G_r$ *de rotations en n variables, irréductible réel, à* $r < n(n-1)/2$ *paramètres, peut avoir au plus* $p^2$ *paramètres si* $n = 2p$ *ou* $n = 2p+1$.

Il en résulte que *les espaces de Vrănceanu* $V_{2p}(\lambda)$ [1], [2], [8] *sont les espaces de Riemann irréductibles* $V_{2p}$, *à courbure variable, ayant un groupe maximum de mouvements, à* $p^2 + 2p$ *paramètres.*

On donne enfin la métrique des espaces $V_{2p+1}$, irréductibles et à courbure variable, ayant un groupe maximum transitif de mouvement à $(p+1)^2$ paramètres.

## BIBLIOGRAFIE

1. Cartan E., Bull. de la Soc. Math. de France, 1926, vol. 54, p. 236 – 240.
2. Egorov I., Dokladî Akademii Nauk, 1949, vol. 66, p. 793.
3. Medici S., Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1908, vol. X, p. 159.
4. Vrănceanu G., Studii şi cercetări matematice, 1951, t. II, nr. 3 – 4, p. 31, 37, 45.
5. — Studii şi cercetări matematice, 1953, t. IV, nr. 1 – 2, p. 122 – 136.
6. — *Lecţii de geometrie diferenţială*. Ed. Acad. R.P.R., 1952, vol. I, p. 50 – 271.
7. — Disquisitiones Math. et Phys., 1942, t. II, fasc. 2 – 4, p. 257.
8. — Studii şi cercetări matematice, 1954, t. V, nr. 1 – 2.
9. — Bul. Soc. de Ştiinţe Cluj, 1929, t. IV, p. 443.
10. — *Lecţii de geometrie diferenţială*. Ed. Acad. R.P.R., 1951, vol. II, p. 93 şi 245.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul V, nr. 1—2, 1954

# ASUPRA UNEI CLASE DE SPAŢII RIEMANNIENE OMOGENE

DE

G. VRĂNCEANU

## Introducere

În 1949 matematicianul sovietic. I. P. Egorov, considerînd [1] problema determinării numărului maxim de parametri al grupului de mişcare al unui spaţiu al lui Riemann, care nu este cu curbura constantă, a arătat că se prezintă două cazuri, cazul spaţiilor ce nu sînt ale lui Einstein pentru care maximul $n(n-1)/2+1$ dat de I. P. Egorov este atins de spaţiile ce au metrica

$$ds^2 = (dx^1)^2 + d\sigma^2 \tag{1}$$

unde $d\sigma^2$ este metrica unui spaţiu $V_{n-1}$ cu curbură constantă şi cazul spaţiilor Einstein, pentru care I. P. Egorov dă ca maxim $n(n-1)/2+2$ fără a arăta dacă acest maxim este atins.

Într-o lucrare anterioară [7], am arătat că maximul dat de I. P. Egorov poate fi scăzut cel puţin cu $n$-4 unităţi, deci pentru $n \geqslant 4$ putem lua ca maxim

$$(n-1)(n-2)/2+5$$

şi că acest maxim este atins pentru $n=4$ şi $n=6$ şi nu poate fi atins pentru $n \geqslant 7$.

Atingerea maximului în cazurile $n=4$ şi $n=6$ este realizată de anumite spaţii simetrice ale lui E. Cartan [1], care aparţin unei clase de spaţii simetrice ce se poate defini pentru orice valoare pară a lui $n$.

Această clasă specială de spaţii $V_{2p}$ omogene (cu grup tranzitiv de mişcare), de care ne vom ocupa aici, posedă proprietatea de a avea un grup de stabilitate cu $p^2$ parametri. Dacă presupunem spaţiul raportat la coordonate normale şi notăm cu

$$X_{pq} = x^p \frac{\partial f}{\partial x^q} - x^q \frac{\partial f}{\partial x^p} \tag{2}$$

transformările infinitezimale ale grupului rotaţiilor în jurul originii, transformările infinitezimale ale grupului $G_p{}^2$ de stabilitate ale spaţiului $V_{2p}$,

pot fi considerate ca fiind date de transformările

$$X_{12}, \ldots, X_{2p-1\,2p},$$
$$U_{hk} = X_{2h-1\,2k-1} + X_{2h\,2k}, \tag{3}$$
$$V_{hk} = X_{2h-1\,2k} - X_{2h\,2k-1}.$$

Acest grup posedă transformarea distinsă

$$Z = X_{12} + X_{34} + \ldots + X_{2p-1\,2p} \tag{3'}$$

Altfel spus, această transformare este permutabilă cu toate celelalte transformări ale grupului.

Anumite considerații mă fac să cred că spațiile omogene $V_{2p}$ cu grup de stabilitate (3), constituie pentru orice valoare pară a lui $n$, spații ireductibile cu grup maxim de mișcare, evident lăsînd la o parte spațiile $V_{2p}$ cu curbură constantă.

În această lucrare vom arăta că spațiile $V_{2p}$ au proprietatea de maxim în cadrul spațiilor $V_{2p}$ al căror grup de stabilitate posedă o transformare distinsă.

## CAPITOLUL I

## SPAȚII $V_{2p}$ CU GRUP DE MIȘCARE CU $2p + p^2$ PARAMETRI

**§ 1. Spațiile $V_{2p}$ cu transformare distinsă (3') sînt simetrice.** În primul rînd vom arăta că dacă grupul de stabilitate al unui spațiu $V_{2p}$, cu grup de mișcare tranzitiv, admite transformarea distinsă (3'), spațiul $V_{2p}$ este un spațiu simetric.

Într-adevăr, fie

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \ldots \qquad (i, j, k, l, = 1, 2, \ldots, n)$$
$$X_\alpha = a^i_{j\alpha}\, x^j \frac{\partial f}{\partial x^i} + \ldots \quad (\alpha, \beta, \gamma, \rho = n+1, \ldots, n+r) \tag{3''}$$

transformările infinitezimale ale unui grup $G$ tranzitiv de mișcări cu $n+r$ parametri al unui spațiu $V_n$. În $X_i$ termenii nescriși sînt de primul ordin sau de ordin superior. Cît privește termenii neînscriși în $X_\alpha$, ei sînt de ordinul al doilea sau de ordin superior și în coordonate normale ei sînt identic nuli, iar $a^i_{j\alpha}$ sînt strîmb simetrici în $i$, $j$.

Dacă dimensiunea $n$ a spațiului $V_n$ este un număr par $2p$ și grupul de stabilitate $G_r$ definit de transformările $X_\alpha$ conține transformarea $Z$. dată de formula (3') avem parantezele

$$(X_{2s-1}, Z) = X_{2s} + W_{2s}, (X_{2s}, Z) = -X_{2s-1} + W_{2s-1}\ (s = 1,2, \ldots p)$$

în care $W_{2s}$ și $W_{2s-1}$ sînt combinații liniare ale transformărilor infinitezimale $X_\alpha$.

Considerînd ca transformări $X_{2s}$ și $X_{2s-1}$ respectiv $X_{2s}+W_{2s}$ și $X_{2s-1}-W_{2s-1}$, ceea ce este evident posibil, avem formulele

$$(X_{2s-1},\ Z) = X_{2s},\ (X_{2s},\ Z) = -X_{2s-1},$$

deoarece $Z$ este permutabilă cu toate transformările $X_\alpha$.

Dacă vom considera identitățile formate cu transformările $X_i$, $X_j$, și cu transformarea distinsă $Z$, avem formulele

$$[(X_{2s-1},\ X_{2s}),\ Z] = 0 \quad (s,\ h,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

$$[(X_{2h-1},\ X_{2k}),\ Z] = [(X_{2h},\ X_{2k-1}),\ Z] = -(X_{2h-1},\ X_{2k-1}) + (X_{2h},\ X_{2k})$$

$$[(X_{2h-1},\ X_{2k-1}),\ Z] = -[(X_{2h},\ X_{2k}),\ Z] = (X_{2h-1},\ X_{2k}) + (X_{2h},\ X_{2k-1})\ (h \neq k).$$

Prima din aceste formule ne arată că $(X_{2s-1},\ X_{2s})$ nu conține decît operatorii $X_\alpha$ ai grupului $G_p^2$. A doua formulă, aplicîndu-i operatorul $Z$ ne dă

$$[(X_{2h-1},\ X_{2k}),\ Z^2] = [(X_{2h},\ X_{2k-1}),\ Z^2] = -2(X_{2h-1},\ X_{2k}) - 2(X_{2h},\ X_{2k-1}).$$

Aplicînd încă de două ori operatorul $Z$, avem

$$[(X_{2h-1},\ X_{2k}),\ Z^4] + 4[(X_{2h-1},\ X_{2k}),\ Z^2) = 0. \qquad (3''')$$

Din această formulă se vede că $(X_{2h-1},\ X_{2k})$ nu poate conține decît transformările infinitezimale $X_\alpha$. Într-adevăr, dacă $(X_{2h-1},\ X_{2k})$ ar conține un termen de forma $aX_i$, atunci în primul membru al formulei $(3''')$ ar apare termenul $-3a\ X_i$ deci $a$ nu poate fi diferit de zero.

Aceeași proprietate are loc atît pentru $(X_{2h-1}, X_{2k-1})$ cît și pentru $(X_{2h},\ X_{2k})$ deci parantezele $(X_i,\ X_j)$ depind numai de transformările grupului de stabilitate. Avem deci formule de forma

$$(X_i,\ X_j) = c_{ij}^{\alpha}\ X_\alpha \qquad (4)$$

Dacă vom considera parantezele $(X_i,\ X_\alpha)$ avem

$$(X_i,\ X_\alpha) = a_{i\alpha}^{j}\ X_j + c_{i\alpha}^{\beta}\ X_\beta$$

în care $a_{i\alpha}^{j}$ sînt coeficienții din formulele $(3'')$.

Vom arăta că toți coeficienții $c_{ix}^{\beta}$ sînt nuli. Pentru aceasta considerăm identitățile formate cu $X_i$, $X_j$ și $X_\lambda$: avem,

$$c_{ij}^{\alpha}(X_\alpha,\ X_\lambda) + a_{j\lambda}^{s}(X_s,\ X_i) - c_{j\lambda}^{\beta}(X_i,\ X_\beta) - a_{i\lambda}^{s}(X_s,\ X_j) + c_{i\lambda}^{\beta}(X_j,\ X_\beta) = 0.$$

Din egalarea coeficienților în $X_i$ obținem

$$c_{i\lambda}^{\beta}\ a_{j\beta}^{h} - c_{j\lambda}^{\beta}\ a_{i\beta}^{h} = 0, \qquad (4')$$

astfel că prin permutarea indicilor $h,i,j$ avem de asemenea

$$c_{h\lambda}^{\beta}\ a_{i\beta}^{j} - c_{i\lambda}^{\beta}\ a_{h\beta}^{j} = 0,$$

$$c_{j\lambda}^{\beta}\ a_{h\beta}^{i} - c_{h\lambda}^{\beta}\ a_{j\beta}^{i} = 0.$$

Adunînd aceste două ecuații din care scăzînd relația $(4')$ obținem, ținînd seama de știnb simetria coeficienților $a_{j\alpha}^{i}$

$$2c_{h\lambda}^{\beta}\ a_{i\beta}^{j} = 0.$$

Aceste relaţii ne arată că $c^{\beta}_{h\lambda}$ sînt nuli, deoarece nu pot exista ecuaţii de forma

$$c^{\beta}\, a^{j}_{i\beta} = 0$$

oricare ar fi $i$, $j$, pentru că aceasta ar însemna că transformările $X_\alpha$ nu sînt independente.

Avem deci teorema următoare:

*Dacă grupul de stabilitate al unui spaţiu omogen $V_{2p}$ admite transformarea distinsă (3′), grupul de mişcare al spaţiului are structura*

$$\begin{aligned} (X_i,\ X_j) &= c^{\alpha}_{ij}\, X_\alpha\,, \\ (X_i,\ X_\alpha) &= a^{j}_{i\alpha}\, X_j\,, \\ (X_\beta,\ X_\gamma) &= c^{\alpha}_{\beta\gamma}\, X_\alpha \end{aligned} \qquad (4'')$$

Elie Cartan a arătat însă că spaţiul al cărui grup de mişcare are această structură, este simetric [1]. Altfel spus, tensorul derivat al tensorului de curbură este nul. Spaţiul $V_{2p}$ este deci simetric.

Consideraţiile de mai sus arată de asemenea că o condiţie necesară şi suficientă ca un spaţiu $V_{2p}$ să fie simetric este ca ecuaţiile (4) să fie verificate, deci să existe transformări $X_i$ aşa fel ca parantezele $(X_i,\ X_j)$ să le exprimăm numai cu ajutorul transformărilor $X_\alpha$ ale grupului de stabilitate al spaţiului.

**§ 2. Grupuri ortogonale cu transformare distinsă.** Am presupus că spaţiul $V_{2p}$ are proprietatea că grupul său de stabilitate posedă transformarea distinsă (3′). Vom arăta că, dacă grupul de stabilitate, care în coordonate normale este un grup ortogonal, are o transformare distinsă, el este reductibil, (lasă varietăţi liniare invariante), afară de cazul cînd numărul variabilelor este par $n = 2p$ şi transformarea distinsă este dată de formula (3′).

In adevăr, să presupunem că avem un grup ortogonal

$$x'^{h} = a^{h}_{k}\, x^{k};\ a^{h}_{k}\, a^{h}_{l} = \delta^{k}_{l} \left| \begin{matrix} = 1\,, & k = l \\ = 0\,, & k \neq l \end{matrix} \right| \qquad (5)$$

Dacă punem

$$a^{h}_{k} = \delta^{h}_{k} + \alpha^{h}_{k}$$

în care $\alpha^{h}_{k}$ sînt cantităţi de primul ordin, transformările infinitezimale ale grupului sînt date de formulele

$$x'^{h} = x^{h} + \alpha^{h}_{k}\, x^{k},\ (\alpha^{h}_{k} + \alpha^{k}_{h}) = 0.$$

O transformare infinitezimală carecare a grupului ortogonal se scrie

$$X = b^{h}_{k}\, x^{k}\, \frac{\partial f}{\partial x^{h}}$$

în care $b^{h}_{k}$ sînt cantităţi strîmb simetrice în $h$, $k$. Unei transformări $X$ i se poate deci asocia forma biliniară

$$\varphi = b^{h}_{k}\, x^{h}\, y^{u}$$

strîmb simetrică. Printr-o trnsformare ortogonală aplicată în acelaşi timp variabilelor $x^k$ şi variabilelor $y^h$, forma biliniară se reduce la forma canonică

$$\varphi = m_1 (x^1 y^2 - x^2 y^1) + \ldots + m_s (x^{2s-1} y^{2s} - x^{2s} y^{2s-1}), (2s \leqslant n)$$

unde $m_i$ schimbă de semn dacă schimbăm între ele variabilele $x^{2i-1}$, $x^{2i}$. O transformare infinitezimală $X$ a grupului ortogonal se poate lua deci întotdeauna sub forma

$$X = m_1 X_{12} + \ldots + m_s X_{2s-12s} \tag{5'}$$

în care numerele $m_1 \ldots, m_s$ pot fi presupuse toate pozitive. Transformările finite ale transformării infinitezimale $X$ se scriu

$$\begin{aligned} x'^{2h-1} &= x^{2h-1} \cos m_h t - x^{2h} \sin m_h t, \\ x'^{2h} &= x^{2h-1} \sin m_h t + x^{2h} \cos m_h t, \ (h = 1, 2, \ldots s) \\ x'^{l} &= x^l \quad (l = 2s+1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{5''}$$

Dacă utilizăm coordonate complexe, punînd

$$\begin{aligned} y^h &= x^{2h-1} + i x^{2h}, \ (i = \sqrt{-1}) \\ \overline{y}^h &= x^{2h-1} - i x^{2h}, \\ y^l &= x^l \end{aligned} \tag{6}$$

transformările (5'') le putem scrie

$$y'^h = y^h e^{i m_h t}, \ \overline{y}'^h = \overline{y}^h e^{-i m_h t}, \ y'^l = y^l. \tag{6'}$$

Să considerăm o transformare oarecare a grupului ortogonal (5) însă în variabilele $y$. Vom avea formule de forma

$$y'^h = c_k^h y^k + d_k^h \overline{y}^k + e_l^h y^l \tag{7}$$

şi formule, analoge pentru $\overline{y}'^h$ şi $y'^l$.

Transformarea (6') va fi permutabilă cu transformarea (7) dacă vom avea

$$c_k^h e^{i m_k t} y^k + d_k^h e^{-i m_k t} \overline{y}^k + e_l^h y^l = (c_k^h y^k + d_k^h \overline{y}^k + e_l^h y^l) e^{i m_h t}.$$

Deoarece am presupus că $m_h$ sînt toate pozitive, rezultă că avem

$$d_k^h = e_l^h = 0.$$

În ce priveşte cantităţile $c_k^h$ pentru $h \neq k$, ele sînt diferite de zero numai dacă $m_h = m_k$. Aceeaşi proprietate are loc pentru $\overline{y}^h$, deci avem

$$\overline{y}'^h = p_k^h \overline{y}^k$$

în care $p_k^h$ este deferit de zero pentru $h \neq k$ numai dacă $m_h = m_k$. Avem de altfel $p_k^h = \overline{a}_k^h$. In ce priveşte variabilele $y^l$, se transformă între ele, deci dacă $2s < n$, transformările ortogonale permutabile cu (6') conservă spaţiul variabilelor $x^i$, deci grupul ortogonal corespunzător este *reductibil*. Să presupunem $2s = 2p = n$. In acest caz grupul transformărilor permutabile cu (6') este de asemenea reductibil, deci lasă varietăţile liniare reale invariante, afară de cazul cînd toate cantităţile $m$ sînt egale, deci afară de cazul cînd transformarea $X$ este de forma (3').

Avem deci teorema următoare:

*Un grup ortogonal ireductibil nu poate avea decît cel mult o transformare distinsă şi aceasta poate avea loc numai dacă* $n = 2p$; *transformarea distinsă este dată de formula* (3′).

**§ 3. Grupul spaţiilor** $V_{2p}$ **cu transformare distinsă.** Presupunem cazul $n = 2p$ şi că grupul ortogonal are transformarea distinsă (3′).

Utilizînd coordonatele complexe

$$y^1, \ldots, y^p \; ; \; \overline{y}^1, \ldots, \overline{y}^p$$

date de primele formule (6), grupul este dat de formulele

$$y'^h = a_k^h \, y^k, \quad \overline{y}'^h = \overline{a}_k^h \, \overline{y}^k \; (h,k = 1, 2, \ldots, p). \tag{8}$$

Cum grupul este ortogonal el lasă invariantă forma lui Hermite

$$y^1 \, \overline{y}^1 + y^2 \, \overline{y}^2 + \ldots + y^p \, \overline{y}^p. \tag{9}$$

Coeficienţii $a_k^h$, $\overline{a}_k^h$ trebuie deci să satisfacă la formulele

$$a_k^h \, \overline{a}_l^h = \delta_l^k. \tag{8′}$$

Punînd

$$a_k^h = \alpha_k^h + i \, \beta_k^h$$

obţinem pentru constantele reale $\alpha_k^h$, $\beta_k^h$ condiţiile

$$\begin{aligned} \alpha_k^h \, \alpha_l^h + \beta_k^h \, \beta_l^h &= \delta_l^k, \\ \alpha_k^h \, \beta_l^h - \alpha_l^h \, \beta_k^h &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Aceste relaţii sînt în număr de

$$\frac{p\,(p+1)}{2} + \frac{p\,(p-1)}{2} = p^2$$

şi cum $\alpha_k^h$, $\beta_k^h$ sînt în număr de $2p^2$, rezultă că printre ele sînt independente $p^2$.

Avem deci următoarea teoremă:

*Grupurile ortogonale în* $2p$ *variabile, avînd o transformare distinsă* (3′) *posedă cel mult* $p^2$ *parametri şi maximul este atins de grupul* (8), (8′).

În variabile reale acest grup este dat de formulele

$$\begin{aligned} x'^{2h-1} &= \alpha_k^h \, x^{2k-1} - \beta_k^h \, x^{2k}, \\ x'^{2h} &= \beta_k^h \, x^{2k-1} + \alpha_k^h \, x^{2k}, \end{aligned} \tag{10′}$$

în care $\alpha_k^h$, $\beta_k^h$ satisfac la condiţiile (10).

Dacă punem

$$\alpha_k^h = \delta_k^h + \varepsilon_k^h$$

și considerăm $\varepsilon_k^h$ și $\beta_k^h$ drept cantități de primul ordin, formulele (10) ne dau

$$\varepsilon_k^h + \varepsilon_h^k = 0, \quad \beta_k^h - \beta_h^k = 0.$$

Rezultă deci în primul rînd că $\varepsilon_h^h$ sînt nule, în timp ce $\beta_h^h$ sînt oarecare. Pentru $\beta_h^h$ oarecare, obținem transformările infinitezimale

$$X_{12}, \ldots, X_{2p-1\,2p},$$

ale grupului abelian al grupului de stabilitate. Pentru $\alpha_k^h$ și $\beta_k^h$, $h \neq k$ obținem transformările respective $U_{hk}$ și $V_{hk}$. Avem deci următoarea teoremă:

*Grupul ortogonal maxim avînd transformarea distinsă* (3′) *este dat de grupul* $G_{p^2}$ *definit de transformările infinitezimale* (3).

De aici rezultă că spațiul omogen $V_{2p}$, avînd ca grup de stabilitate $G_{p2}$ posedă grupul de mișcare maxim. $G_{2p+p^2}$ față de toate spațiile $V_{2p}$ al căror grup de stabilitate este ireductibil și posedă o transformare distinsă. Avem deci următoarea teoremă:

*Spațiile* $V_{2p}$ *cu grup de mișcare tranzitiv și cu grup de stabilitate* $G_{p^2}$ *posedă grupul maxim de mișcare față de toate spațiile* $V_{2p}$ *al căror grup de mișcare posedă o transformare distinsă.*

Rămîne deci de văzut dacă numărul $p^2$ este un maxim și pentru grupurile de stabilitate care nu posedă o transformare distinsă.

§ 4. **Grupul** $G_{p^2}$ **este închis.** Din considerațiile de mai sus rezultă că grupul $G_{p^2}$ este un grup închis, deci că o mulțime infinită de transformări infinitezimale ale sale are ca limită o transformare aparținînd grupului. În adevăr, se știe că această proprietate aparține grupului ortogonal întreg, [2], ea nu aparține însă oricărui subgrup al grupului ortogonal. În cazul nostru demonstrația rezultă din faptul că $\alpha_k^h$, $\beta_k^h$ aparțin unei varietăți algebrice definită de formulele (10) și această varietate este închisă. În adevăr, în prima formulă (10) ne dă făcînd $k=l$ și sumînd

$$\alpha_k^h \alpha_k^h + \beta_k^h \beta_k^h = p.$$

Rezultă deci că punctele din spațiul cu $2p^2$ dimensiuni avînd drept coordonate carteziene ortogonale $\alpha_k^h$, $\beta_k^h$ care aparțin varietății algebrice (10), vor aparține de asemenea unei sfere cu raza $\sqrt{p}$.

Vom arăta acum că grupul $G_{p^2}$ este format din grupul $G_1$ definit de transformarea distinsă (3′) și dintr-un grup simplu $G_{p^2-1}$, cea ce ne va da o nouă demonstrație a faptului că grupul $G_{p^2}$ este închis, deoarece atît $G_1$ cît și $G_{p^2-1}$ sînt închise. Grupul $G_{p^2-1}$ poate fi considerat format din transformările

$$\begin{aligned} Z_{hk} &= X_{2h-1\,2h} - X_{2k-1\,2k}, \\ U_{hk} &= X_{2h-1\,2k-1} + X_{2h\,2k}, \quad (h \neq k) \\ V_{hk} &= X_{2h-1\,2k} - X_{2h\,2k-1}, \end{aligned} \tag{11}$$

schimbînd $h$ cu $k$ putem observa că atunci $Z_{hk}$ și $U_{hk}$ schimbă de semn în timp ce $V_{hk}$ rămîne cu același semn.

În ce privește formulele de structură, avem

$$\begin{aligned}
&(Z_{hq}\ ,\ U_{hk}) = V_{hk}\ ,\ (Z_{hq}\ ,\ V_{hk}) = -\ U_{hk}\\
&(Z_{hk}\ ,\ U_{hk}) = 2V_{hk}\ ,\ (Z_{hk}\ ,\ V_{hk}) = -\ 2\ U_{hk}\\
&(U_{hk}\ ,\ U_{hl}) = -\ U_{kl}\ ,\ (V_{hk}\ ,\ V_{hl}) = -\ U_{kl}\\
&(U_{hk}\ ,\ V_{hl}) = -\ V_{kl}\ ,\ (U_{hk}\ ,\ V_{hk}) = 2Z_{hk}
\end{aligned} \tag{12}$$

iar celelalte paranteze sînt nule.

Formulele de structură (12) pun în evidență două subgrupuri. Subgrupul abelian cu $p-1$ parametri format de transformările infinitezimale $Z_{hk}$ și subgrupul format de $U_{hk}$. Nici unul din aceste subgrupuri nu este subgrup invariant.

Să considerăm acum o transformare infinitezimală

$$X = a_{hk}\ U_{hk} + b_{hk}\ V_{hk} + c_{hk}\ Z_{hk}\ ,\ (h \neq k),$$

a grupului $G_{p^2-1}$ unde $a_{hk}$ și $c_{hk}$ sînt strîmb simetrice în $h,k$, în timp ce $b_{hk}$ sînt simetrice.

Presupunem că $X$ este o transformare infinitezimală a unui subgrup $H$ invariant în $G_{p^2-1}$. Rezultă atunci că oricare din parantezele formate cu $X$ și cu una din transformările lui $G_{p^2-1}$ aparține lui $H$.

Ținînd seama că $Z_{hk}$ nu formează un subgrup invariant, rezultă că unul cel puțin din coeficienții $a_{hk}$, $b_{hk}$ ai transformării $X$ este diferit de zero. Cum pe de altă parte $Z_{hk}$ și $V_{hk}$ nu formează un grup, rezultă că cel puțin una din cantitățile $a_{hk}$ este diferită de zero. Să presupunem deci că avem $a_{12} \neq 0$ și să considerăm paranteza $(Z_{12}\ ,\ X)$. Obținem

$$\begin{aligned}
(Z_{12}\ ,\ X) = {} & 2a_{12}\ V_{12} - 2b_{12}\ U_{12} + a_{1k}\ V_{1k} - b_{1k}\ U_{1k} -\\
& - a_{2k}\ V_{2k} + b_{2k}\ U_{2k} \quad (k \neq 1,2).
\end{aligned} \tag{13}$$

Această paranteză aparține și ea grupului $H$. Aplicăm încă odată operatorul $Z_{12}$, și notăm pentru simplicitate rezultatul cu $(Z_{12}^2,\ X)$. Avem

$$\begin{aligned}
(Z_{12}^2,\ X) = {} & -\ 4a_{12}\ U_{12} - 4b_{12}\ V_{12} - a_{1k}\ U_{1k} - b_{1k}\ V_{1k} -\\
& - a_{2k}\ U_{2k} - b_{2k}\ V_{2k}\ (k \neq 1,2).
\end{aligned}$$

Aplicînd din nou operatorul $Z_{12}$, avem

$$(Z_{12}^3,\ X) = -\ 8\ a_{12}\ V_{12} + 8\ b_{12}\ U_{12} - a_{1k}\ V_{1k} + b_{1k}\ U_{1k} + a_{2k}\ V_{2k} - b_{2k}\ U_{2k},$$

la care adunînd paranteza $(Z_{12}\ ,\ X)$, obținem formula

$$(Z_{12}^3,\ X) + (Z_{12}\ ,\ X) = -\ 6\ a_{12}\ V_{12} + 6\ b_{12}\ U_{12}\ ,$$

ceea ce ne spune că transformarea infinitezimală

$$U = b_{12}\ U_{12} - a_{12}\ V_{12}$$

aparține grupului $H$. Cum avem

$$(U_{12}\ ,\ U) = -\ 2\ a_{12}\ Z_{12}$$

rezultă că transformarea $Z_{12}$ aparține lui $H$. Cum avem de asemenea

$$(Z_{12}, U_{12}) = 2V_{12}, (Z_{12}, V_{12}) = -2U_{12},$$

rezultă că transformările $U_{12}$, $V_{12}$ aparțin lui $H$.

Cum din formulele (12) avem

$$(U_{12}. U_{1l}) = -U_{1l}, (U_{12}, V_{1l}) = -V_{1l},$$

rezultă că și $U_{1l}$, $V_{1l}$ aparțin lui $H$.

În mod analog se vede că $U_{2l}$, $V_{2l}$ și $U_{hk}$, $V_{hk}$, $Z_{hk}$ aparțin lui $H$, deci $H$ coincide cu $G_{p^2-1}$. Grupul $G_{p^2-1}$ nu poate deci conține nici un subgrup invariant. Grupul $G_{p^2-1}$ este deci un grup simplu.

Avem deci următoarea teoremă:

*Grupul ortogonal ireductibil $G_{p^2}$ în $2p$ variabile este format din grupul $G_1$ definit de transformarea infinitezimală* (3′) *și dintr-un grup simplu $G_{p^2-1}$ definit de transformările infinitezimale* (11).

În ce privește grupul de mișcare $G_{p^2+2p}$ al spațiului $V_{2p}$ rezultă, în baza unei teoreme a lui Cartan, că este un grup simplu și este un grup închis, deci spațiul este închis, dacă curbura spațiului este pozitivă.

**§ 5. Curbura spațiilor $V_{2p}$ cu grup maxim $G_{2p+p^2}$.** Din teoria spațiilor simetrice se știe că, dacă grupul spațiului este dat de formulele (4′). componentele tensorului de curbură sînt date de formulele

$$\gamma^i_{jhk} = a^i_{j\alpha}\, c^\alpha_{hk}. \tag{14}$$

Ținînd seama că $\gamma^i_{jkh}$ sînt coeficienții cu patru indici ai lui Ricci care nu se schimbă dacă schimbăm perechile $i, j$; $h, k$ între ele, deci avem

$$a^i_{j\alpha}\, c^\alpha_{hk} = a^h_{k\alpha}\, c^\alpha_{ij}. \tag{14′}$$

Să presupunem acum că transformările infinitezimale $X_\alpha$ ale grupului ortogonal formează o bază normală, deci că avem

$$a^i_{j\alpha}\, a^i_{j\beta} = \delta^\alpha_\beta, \ (i < j) \tag{14″}$$

unde suma se face în raport cu $i$ și $j$ de la 1 la $2p$, presupunînd însă $i < j$.

Înmulțind atunci ecuațiile (14′) cu $a^i_{j\beta}$ și sumînd obținem

$$c^\beta_{hk} = a^h_{k\alpha}\, A^{\alpha\beta}, \tag{15}$$

în care am pus

$$A^{\alpha\beta} = c^\alpha_{ij}\, a^i_{j\beta} \ (i < j).$$

Cantitățile $A^{\alpha\beta}$ constituie, față de o transformare ortogonală de bază $X_\alpha$, un tensor contravariant de al doilea ordin. Putem deci presupune că avem $A^{\alpha\beta} = 0$ pentru $\alpha \neq \beta$. Se arată de asemenea că $A^{\alpha\alpha}$ sînt toți egali, dacă $\alpha$ sînt indici ce aparțin aceluiași grup simplu. În cazul nostru, toți $A^{\alpha\alpha}$ vor fi egali să zicem cu $A_2$ dacă transformările $X_\alpha$ aparțin grupului $G_{p^2-1}$. Cît privește transformarea distinsă $Z$, îi va corespunde de asemenea o constantă $A_1$ și putem lua pentru $Z$ o bază normală punînd

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{p}}(X_{12} + \ldots + X_{2p-1\ 2p}); \left(X_{ij} = x^i \frac{\partial f}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial f}{\partial x^i}\right).$$

Putem avea o bază normală pentru grupul $G_{p^2-1}$ luînd pentru transformările grupului său abelian $G_{p-1}$

$$Z_{s+1} = \frac{1}{\sqrt{s+s^2}}(X_{12}+\ldots+X_{2s-1\,2s}) - \frac{s}{\sqrt{s+s^2}} X_{2s+1\,2s+2} (s=1,\ldots p-1), \quad (16)$$

iar pentru transformările $U_{hk}$, $V_{hk}$

$$\begin{aligned} A_{hk} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{2h-1\,2k-1} + X_{2h\,2k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{hk}, \\ B_{hk} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{2h-1\,2k} - X_{2h\,2k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{hk}. \end{aligned} \quad (16')$$

În acest caz formulele (4) şi (5) ne arată că avem

$$\begin{aligned} (X_{2h-1}, X_{2k-1}) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} A_2 A_{hk}, \\ (X_{2h-1}, X_{2k}) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} A_2 B_{hk}, \\ (X_{2h}, X_{2k-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} A_2 B_{hk}, \\ (X_{2h}, X_{2k}) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} A_2 A_{hk}. \end{aligned} \quad (17)$$

În ce priveşte parantezele $(X_{2s-1}, X_{2s})$, ele depind numai de transformările $Z_1, \ldots, Z_p$ şi avem în particular

$$(X_{2p-1}, X_{2p}) = -\frac{1}{\sqrt{p}} A_1 Z_1 + \frac{\sqrt{p-1}}{\sqrt{p}} A_2 Z_p. \quad (17')$$

Considerînd atunci identitatea formată cu $X_{2p-1}$, $X_{2p}$ şi $X_1$ obţinem relaţia

$$A_1 = A_2 (p+1). \quad (18)$$

Pe de altă parte, dacă în (14) ţinem seama de formulele (15) avem

$$\gamma^i_{jkl} = a^i_{j\alpha}\, a^k_{l\alpha}\, A^{\alpha\alpha}. \quad (19)$$

astfel că dacă facem $i = k$ şi sumăm, avem ţinînd seama de (14'')

$$\gamma_{jl} = a^i_{j\alpha}\, a^i_{l\alpha}\, A^{\alpha\alpha}.$$

Cum spaţiul este ireductibil, $\gamma_{jl}$ sînt egale cu $k\,\delta^j_l$, astfel că făcînd $j = l$ şi sumînd, obţinem

$$2pk = 2\,(A_1 + (p^2-1)\,A_2).$$

Ţinînd seama de formula (18) avem

$$A_1 = k,\ A_2 = \frac{k}{p+1}.$$

Ţinînd seama de aceste expresii ale lui $A_1$ şi $A_2$, formulele (19), în cazul cînd avem $i = k = 2p-1$, $j = l = 2p$, ne dau

$$\gamma^{2p-1}_{2p\,2p-1\,2p} = \frac{A_1}{p} + \frac{p-1}{p} A_2 = \frac{2k}{p+1}$$

aceeași valoare o au și $\gamma^{2s-1}_{2s\ 2s-1\ 2s}$ $(s = 1, \ldots, p-1)$.

Dacă indicii $i, j, k, l$, iau valorile $2s-1, 2s, 2q-1, 2q$ obținem

$$\gamma^{2s-1}_{2s\ 2q-1\ 2q} = \frac{A_1}{p} - \frac{A_2}{p} = \frac{k}{p+1}.$$

De asemenea avem

$$\gamma^{2s-1}_{2q-1\ 2s\ 2q} = \gamma^{2s-1}_{2q\ 2s-1\ 2q} = \frac{A_2}{2} = \frac{k}{2(p+1)}.$$

Dacă punem $k = 2\lambda(p+1)$ avem formulele

$$\begin{aligned} &\gamma^{h}_{h'hh'} = 4\lambda, \ \gamma^{h}_{h'kk'} = 2\lambda \\ &\gamma^{h}_{kh'k'} = \gamma^{h}_{k'hk'} = \lambda \end{aligned} \tag{20}$$

în care $h, h'$ este o pereche $2s-1$, $2s$ și $k, k'$ o altă pereche $2q-1$, $2q$. În ce privește componentele $\gamma$ care conțin indici din mai mult de două perechi, ele sînt nule.

Se regăsesc astfel în formulele (20), plecînd de la grupul de mișcare, componentele tensorului de curbură al spațiului. Aceste componente au fost obținute în [7], ca o extindere a formulelor corespunzătoare cazurilor $p = 2$ și $p = 3$, cazuri în care spațiile ireductibile $V_4$ și $V_6$ posedă grupul de mișcare cu un număr maxim de parametri.

**§ 6. Structura grupului** $G_{p^2+2p}$. Vom căuta formulele de structură a grupului $G_{p^2+2p}$ utilizînd ca transformări ale lui $G_{p^2}$ transformările infinitezimale

$$Y_s = X_{2s-1,2s}, \ U_{hk}, \ V_{hk}. \tag{20'}$$

Este ușor de văzut că formula (17'') se poate scrie

$$(X_{2p-1}, X_{2p}) = -2\lambda Z - 2\lambda Y_p, \ Z = Y_1 + \ldots + Y_p$$

și deci avem în general formulele

$$(X_{2s-1}, X_{2s}) = -2\lambda(Y_1 + \ldots + Y_p) - 2\lambda Y_s, \ (s = 1, \ldots, p). \tag{21}$$

În ce privește celelalte paranteze $(X_i, X_j)$ observăm că avem

$$(X_{2h-1}, X_{2k-1}) = c^{\alpha}_{2h-1\ 2k-1} X_\alpha = a^{2h-1}_{2k-1\alpha} A_2 A_{hk},$$

ceea ce ne conduce la formulele

$$\begin{aligned} &(X_{2h-1}, X_{2k-1}) = -\lambda U_{hk}, \ (X_{2h-1}, X_{2k}) = -\lambda V_{hk}, \\ &(X_{2h}, X_{2k-1}) = \lambda V_{hk}, \ (X_{2h}, X_{2k}) = -\lambda U_{hk}. \end{aligned} \tag{22}$$

Formulele (21), (22) ne dau astfel toate parantezele formate cu $X_i, X_j$. În ce privește parantezele formate cu o transformare $X_i$ și o transformare a grupului de stabilitate, avem

$$\begin{aligned} &(X_{2s-1}, Y_s) = X_{2s}, \ (X_{2s}, Y_s) = -X_{2s-1}, \\ &(X_{2s-1}, U_{sk}) = X_{2k-1}, \ (X_{2s}, U_{sk}) = X_{2k}, \\ &(X_{2s-1}, V_{sk}) = X_{2k}, \ (X_{2s}, V_{sk}) = -X_{2k-1}, \end{aligned} \tag{23}$$

celelalte paranteze fiind nule. În ce privește parantezele formate cu transformările (20′) ele sînt date de formulele (12). Dacă punem în evidență transformările $Y_s$ (în loc de $Z_{sq}$ și $Z$, avem

$$(Y_s\ ,\ U_{sk}) = V_{sk}\ ,\ (Y_s\ ,\ V_{sk}) = -\ U_{sk}\ ,$$
$$(U_{hk}\ ,\ U_{hl}) = -\ U_{kl}\ ,\ (V_{hk}\ ,\ V_{hl}) = -\ U_{kl}\ , \tag{24}$$
$$(U_{hk}\ ,\ V_{hl}) = -\ V_{kl}\ ,\ (U_{hk}\ ,\ V_{hk}) = 2\,(Y_h - Y_k).$$

Avem deci următoarea teoremă:

*Parantezele diferite de zero ale grupului de mișcare G definit de transformările infinitezimale*

$$X_i\ ,\ Y_h\ ,\ U_{hk}\ ,\ V_{hk}\ ,\ (h \neq k = 1, \ldots, p)$$

*sînt date de formulele* (21), (22), (23) *și* (24).

**§ 7. Subgrupuri simplu tranzitive.** Să arătăm acum că grupul $G$ posedă întotdeauna $p$ subgrupuri simplu tranzitive. Aceste subgrupuri sînt reale dacă curbura $\lambda$ este negativă și imaginare dacă $\lambda$ este pozitivă.

Într-adevăr, să considerăm transformările infinitezimale

$$Z = X_1,\ Z_2 = X_2 + 2m\ Y_1 + m Y_2 + \ldots + m Y_p\ ,$$
$$Z_{2s-1} = X_{2s-1} + m U_{1s}\ ,\ Z_{2s} = X_{2s} + m V_{1s},\ (s = 2, \ldots, p). \tag{25}$$

Avem

$$(Z_1\ ,\ Z_2) = -\ 2\lambda\,(Y_1 + \ldots + Y_p) - 2\lambda\ Y_1 + 2m\ X_2 =$$
$$2mZ_2 - 2\,(\lambda + m^2)\,(2Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_p).$$

Rezultă deci că $Z_1$, $Z_2$ formează un grup $G_2$, dacă

$$m^2 + \lambda = 0$$

deci

$$m = \pm\sqrt{-\lambda}\ . \tag{25′}$$

Este ușor de văzut că astfel ales $m$, parantezele formate cu $Z_i$ se scriu

$$(Z_{2h-1}\ ,\ Z_{2h}) = 2mZ_2\ ,\ (h = 1, \ldots, p),$$
$$(Z_1\ ,\ Z_k) = mZ_k\ ,\ (Z_2\ ,\ Z_k) = 0,\ (k = 3, \ldots, 2p) \tag{26}$$
$$(Z_{2s-1}\ ,\ Z_{2h-1}) = (Z_{2s-1}\ ,\ Z_{2h}) = (Z_{2s}\ ,\ Z_{2h}) = 0,\ (s \neq h).$$

Rezultă deci că transformările infinitezimale $Z_1, \ldots, Z_{2p}$ formează un grup simplu tranzitiv în variabilele $x^1, \ldots, x^{2p}$ ale spațiului $V_{2p}$.

Ținînd seama de ecuația (25′) rezultă că acest grup este real, dacă $\lambda$ este negativ și imaginar dacă $\lambda$ este pozitiv. Se prezintă astfel la spațiile $V_{2p}(\lambda)$ o proprietate analogă cu aceea referitoare la spațiile cu curbură constantă, care au întotdeauna un subgrup tranzitiv real dacă curbura este negativă și imaginar dacă curbura este pozitivă [9].

Cum în formulele (26) $m$ poate fi pozitiv sau negativ, rezultă că avem două subgrupuri simplu tranzitive. Se poate trece însă de la unul la altul prin schimbarea semnelor operatorilor $Z_i$.

Pe de altă parte, dacă în formulele (25) schimbăm rolul perechei $X_1$, $X_2$ cu o altă pereche $X_{2s-1}$, $X_{2s}$ se obțin alte subgrupuri simplu tranzitive, deci avem $p$ asemenea grupuri. Aceste grupuri sînt evident izomorfe, au deci aceeași structură.

În ce privește structura grupului $G_{2p}$ definit de formulele (26), se vede că grupul derivat $G'_{2p}$ este format din operatorii $Z_2, \ldots, Z_{2p}$ iar $G''_{2p}$ este format din operatorul $Z_2$,. Rezultă că grupul $G_{2p}$ este integrabil.

Considerînd formele lui Pfaff $ds^1, \ldots, ds^{2p}$ lăsate invariante de grup pentru operatorii $\Delta s^i$ avem formulele

$$\Delta s^1 = 0 \ , \ \Delta s^2 = 2m\,[ds^{2h-1}\, ds^{2h}] \ , \ (h = 1, \ldots, p)$$

$$\Delta s^k = m\,[ds^1\, ds^k] \ , \ (k = 3, 4, \ldots, 2p)$$

încît putem lua

$$ds^1 = dy^1 \ , \ ds^k = e^{-my^1}\, dy^k \ , \ (k = 3, \ldots, 2p),$$

$$ds^2 = e^{-2my^1}\,[dy^2 - m\,(y^{2s-1}\, dy^{2s} - y^{2s}\, dy^{2s-1})], \qquad (26')$$

unde suma în raport cu $s$ se face de la 2 la $p$ astfel că metrica spațiului $V_{2p}$ se scrie

$$ds^2 = (dy^1)^2 + e^{-4my^1}\,[dy^2 - m\,(y^{2s-1}\, dy^{2s} - y^{2s}\, dy^{2s-1})]^2 + e^{-2my^1}\,(dy^k)^2. \qquad (27)$$

Avem deci teoremă:

*Dacă* $\lambda$ *curbura spațiului* $V_{2p}$ *este negativă, metrica spațiului este dată de formula* (27) *unde* $m = \sqrt{-\lambda}$.

Metrica (27) este regulată în tot spațiul variabilelor $y^1, \ldots, y^{2p}$ deci spațiul $V_{2p}$ poate fi considerat ca format dintr-o singură vecinătate constituită de punctele la distanță finită a spațiului variabilelor $y^1, \ldots, y^{2p}$. Este preferabil însă de a face transformarea de variabile

$$e^{2my^1} = 2mx^1 \ , \ y^i = x^i \ , \ (i > 1). \qquad (26'')$$

În acest caz metrica ia forma

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + [dx^2 - m\,(x^{2s-1}\, dx^{2s} - x^{2s}\, dx^{2s-1})]^2}{4m^2\,(x^1)^2} + \frac{(dx^k)^2}{2mx^1} \qquad (27')$$

și pentru aceasta metrica $x^1 = 0$ este un hiperplan singular. Presupunînd $m > 0$ domeniul spațiului $V_{2p}$ $(\lambda)$ este în acest caz semi-hiperplanul $x^1 > 0$.

Se poate observa că varietățile cu două dimensiuni, obținute făcînd $x^k = \text{const.}$, au metrica dată de formula lui Beltrami

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}{4m^2\,(x^1)^2}, \ (m^2 = -\lambda), \qquad (27'')$$

deci aceste varietăți sînt cu curbură constantă negativă $4\lambda$. Se știe că geodezicele acestei metrici sînt semicercuri care taie ortogonal axa $x^2$, deci dreapta $x^1 = 0$.

## CAPITOLUL II

## GEODEZICELE SPAȚIILOR $V_{2p}$ CU CURBURĂ NEGATIVĂ

**§ 1. Ecuațiile geodezicelor în congruențe ortogonale.** Metrica (27′) a spațiilor $V_{2p}(\lambda)$ cu curbură $\lambda$ negativă este regulată pentru orice sistem de valori finite ale variabilelor $x^2, \ldots, x^{2p}$, și pentru valorile pozitive ale lui $x^1$. În ce privește geodezicele spațiului, ecuațiile lor se scriu

$$\frac{dx^i}{ds} = \mu_h^i u^h \quad , \quad \left(u^h = \frac{ds^h}{ds}\right) \quad , \quad \frac{du^h}{ds} = \gamma_{kl}^h u^k u^l$$

unde $\mu_h^i$ sînt parametrii congruențelor ortogonale definite de formele $ds^h$ în spațiul $V_{2p}$ și $\gamma_{kl}^h$ sînt coeficienții de rotație ai lui Ricci ai acestor congruențe. Datorită faptului că formele lui Pfaff au coeficienții covarianților biliniari constanți, care sînt chiar constantele $c_{kl}^h$ de structură a grupului simplu tranzitiv ce-l admite spațiul $V_{2p}$, avem formulele cunoscute

$$\gamma_{kl}^h = \frac{1}{2}\left(c_{kl}^h + c_{lh}^k + c_{kh}^l\right)$$

și deci ecuațiile care ne dau cosinusurile directoare $u^h$, formează un sistem de $n$ ecuații diferențiale cu coeficienți $\gamma_{kl}^h$ constanți.

Ținînd seama că singurii coeficienți $c_{kl}^h$ nenuli sînt

$$c_{2h-1\,2h}^2 = 2m, \quad (h = 1,2, \ldots, p)$$
$$c_{1k}^k = m, \quad (k = 3, \ldots, 2p).$$

Coeficienții $\gamma_{kl}^h$ nenuli rezultă că sînt dați de formulele

$$\frac{1}{2}\gamma_{12}^2 = \gamma_{2h-1\,2h}^2 = -\gamma_{2h\,2h-1}^2 = m, \quad (h = 2, \ldots, p),$$
$$\gamma_{2h-1\,2}^{2h} = \gamma_{1k}^k = -\gamma_{kk}^1 = m, \quad (k = 3, \ldots, 2p).$$

Ecuațiile care ne definesc cosinusurile directoare $u^h$ ale geodezicelor față de sistemul de congruențe definite de $ds^h$ le putem scrie

$$\begin{aligned}
\frac{du^1}{ds} &= -2m\,(u^2)^2 - m\,[(u^3)^2 + \ldots + (u^{2p})^2], \\
\frac{du^2}{ds} &= 2m\,u^1u^2, \\
\frac{du^{2h-1}}{ds} &= -2m\,u^2u^{2h} + m\,u^1u^{2h-1}, \\
\frac{du^{2h}}{ds} &= 2m\,u^2u^{2h-1} + m\,u^1u^{2h}.
\end{aligned} \tag{27′′′}$$

Pentru integrarea acestui sistem de ecuații vom ține seama de relația pătratică

$$(u^1)^2 + \ldots + (u^{2p})^2 = 1, \tag{28}$$

care leagă cosinusurile directoare ale unei direcții. Utilizînd această relație, primele două ecuații (27''') le putem scrie

$$\frac{du^1}{ds} = m\,[(u^1)^2 - (u^2)^2 - 1],\quad \frac{du^2}{ds} = 2m\,u^1u^2 \tag{28'}$$

și se verifică ușor că aceste ecuații posedă integrala primă

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 - 2\operatorname{tg}\alpha\, u^2 - 1 = 0 \tag{28''}$$

unde $tg\alpha$ este o constantă arbitrară, deci se poate presupune că unghiul constant $\alpha$ are o valoare oarecare între $-\pi/2$ și $\pi/2$.

**§ 2. Integrarea ecuațiilor cosinusurilor.** Dacă în ecuația (28''') presupunem $\alpha = \pm\,\pi/2$ atunci $\operatorname{tg}\alpha$ este $\pm\,\infty$ și prin urmare ecuația (28'') devine ecuația $u^2 = 0$, în care caz a doua ecuație (28') este identic satisfăcută și sistemul (27''') se scrie

$$\frac{du^1}{ds} = m\,[(u^1)^2 - 1],\quad u^2 = 0,$$

$$\frac{du^k}{ds} = m\,u^1u^k,\quad (k = 3, \ldots, 2p).$$

Prin integrare obținem

$$u^1 = \frac{1 - c^2\,e^{2ms}}{1 + c^2\,e^{2ms}},\quad u^k = \frac{2a^k\,c\,e^{ms}}{1 + c^2\,e^{2ms}} \tag{29}$$

$a^k$ și $c$ sînt constante, $c$ este o constantă pozitivă. Ținînd seama de relația pătratică (28'), găsim că aceste constante sînt legate de relația

$$(a^k)^2 + \ldots + (a^{2p})^2 = 1. \tag{28'''}$$

Presupunînd $m$ pozitiv, din formulele (29), se vede că, atunci cînd $s$ crește de la $-\infty$ la $+\infty$, cosinusul $u^1$, descrește de la $+1$ la $-1$.

Dacă punem

$$u^1 = \frac{1 - c^2\,e^{2ms}}{1 + c^2\,e^{2ms}} = -\,u,\quad c^2\,e^{2ms} = \frac{1+u}{1-u}, \tag{28^{IV}}$$

variabila $u$ crește de la $-1$ la $+1$ cînd $s$ crește de la $-\infty$ la $+\infty$. Luînd $u$ ca variabilă, avem formulele

$$u^1 = -\,u,\quad u^2 = 0,\quad u^k = a^k\sqrt{1-u^2} \tag{29'}$$

deci $u^k$ are semnul lui $a^k$ și variază între $a^k$ și 0 cînd $u$ variază între $-1$ și $+1$.

Dacă $\alpha \neq \pi/2$, din ecuația (28'') se vede că $u^1$, $u^2$ sînt, pentru un $\alpha$ dat, coordonatele punctelor unui cerc, astfel că putem lua

$$u' = \frac{\cos\varphi}{\cos\alpha},\quad u^2 = \frac{\sin\alpha - \sin\varphi}{\cos\alpha}, \tag{29''}$$

în care $\varphi$ este un unghi variabil. Dacă ținem seama de faptul că $u^1$, $u^2$ sînt cosinusuri, deci avem

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 \leqslant 1,$$

obținem inegalitatea

$$\sin\alpha\,(\sin\varphi - \sin\alpha) \geqslant 0 \tag{29'''}$$

Din această inegalitate cînd $\alpha \neq 0$, se vede că $u^2$ este negativ dacă $\alpha$ este cuprins între 0 şi $\pi/2$ şi pozitiv dacă $\alpha$ este cuprins între $-\pi/2$ şi 0 extremităţile fiind excluse. În cazul cînd $\alpha = 0$, toate cosinusurile $u^k$ $(k \geqslant 3)$ sînt nule şi geodezica corespunzătoare este situată într-una din varietăţile geodezice $x^k = c^k$ unde $c^k$ sînt constante. Geodezica considerată este atunci o geodezică a varietăţii $V_2$ cu curbură constantă negativă, definită de formula (27'').

Ţinînd seama de formulele (29'') în ecuaţiile (29), obţinem

$$\frac{d\varphi}{ds} = 2m \frac{\sin\varphi - \sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{30}$$

Presupunînd $m > 0$, rezultă că unghiul $\varphi$, dacă $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ este o funcţie crescătoare de $s$. Unghiul pentru $s = 0$ are valoarea $\varphi_0$ iar cînd $s$ creşte de la $-\infty$ la $+\infty$, unghiul creşte de la $\alpha$ la $\pi - \alpha$. Dacă $-\pi/2 < \alpha < 0$, $\varphi$ descreşte de la $\alpha$ la $-\pi - \alpha$.

De altfel, prin integrarea ecuaţiei (30) obţinem

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\beta \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + (1 + \cos\alpha)\, e^{2ms}}{\beta + \sin\alpha\, e^{2ms}}, \tag{30'}$$

constanta $\beta$ este definită în funcţie de $\varphi_0$ şi $\alpha$ de condiţia

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2} = \frac{\beta \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\beta + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Vom considera în cele ce urmează ca variabilă independentă, în loc de arcul $s$ unghiul $\varphi$, care în condiţiile de mai sus variază de la $\alpha$ la $\pi - \alpha$ sau de la $\alpha$ la $-\pi - \alpha$ după cum $\alpha$ este pozitiv sau negativ şi mai mic în valoare absolută decît $\pi/2$.

Ne vom ocupa acum de cosinusurile $u^{2h-1}$, $u^{2h}$ $(h = 2, \ldots, p)$.

Dacă punem

$$u^{2h-1} = \rho_h \cos\varphi_h\,, \quad u^{2h} = \rho_h \sin\varphi_h\,, \tag{31}$$

ultimele ecuaţii (27''') ne dau

$$\frac{d\rho_h}{ds} = m u^1 \rho_h\,, \quad \frac{d\varphi_h}{ds} = 2m\, u^2$$

iar aceste ecuaţii, ţinînd seama de ecuaţia (30), se scriu astfel

$$2\frac{d\rho_h}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi - \sin\alpha}\rho_h\,, \quad \frac{d\varphi_h}{d\varphi} = -1.$$

Prin integrare, ţinînd seama că $\sin\varphi - \sin\alpha$ este întotdeauna pozitiv sau întotdeauna negativ pentru o geodezică dată, obţinem

$$\rho_h^2 = \alpha_h\,[\sin\varphi - \sin\alpha]\,, \quad \varphi_h = -\varphi + \beta_h, \tag{32}$$

în care $\alpha_h$ și $\beta_h$ sînt $2p-2$ constante arbitrare iar constantele $\alpha_h$ sînt toate pozitive dacă $\alpha$ este pozitiv și negative dacă $\alpha$ este negativ. Ținînd seama de ecuațiile (29''), (31) și (32) în ecuația (28), găsim următoarea relație între $\alpha_h$ și $\alpha$

$$\alpha_2 + \ldots + \alpha_p - \frac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0. \tag{32'}$$

Rezultă deci că formulele care ne definesc consinusurile $u^1 \ldots, u^{2p}$ sînt date în funcție de $\varphi$, de formulele

$$u^1 = \frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}, \quad u^2 = \frac{\sin\alpha - \sin\varphi}{\cos\alpha},$$

$$u^{2h-1} = \sqrt{\alpha_h(\sin\varphi - \sin\alpha)}\,\cos(\beta_h - \varphi), \tag{33}$$

$$u^{2h} = \sqrt{\alpha_h(\sin\varphi - \sin\alpha)}\,\sin(\beta_h - \varphi),$$

$\alpha_h$ și $\alpha$ sînt legate de relația (32'). În formulele (33) intervin deci $2p-1$ constante arbitrare legate de o relație, deci avem $2p-2$ constante arbitrare. Dacă $\varphi$ este înlocuit cu valoarea dată de (30'), se adaugă o nouă constantă arbitrară, ceea ce corespunde faptului că în soluția generală a sistemului (27''') cu relația pătratică (28) trebuie să conțină $2p-1$ constante arbitrare. Observăm că soluția generală (33) are proprietatea că pentru $s$ tinzînd la $-\infty$ toate cosinusurile $u$ tind la zero afară de $u^1$ care tinde la $\mp 1$, deci curba la infinit are aceeași direcție ca axa $x^1$ ($x^k = c^k$, $k > 1$).

**§ 3. Integrarea ecuațiilor geodezicelor.** Dacă în ecuațiile (26') ținem seama de transformarea (26''), obținem

$$ds^1 = \frac{dx^1}{2mx^1}, \quad ds^k = \frac{dx^k}{\sqrt{2mx^1}}, \quad (k = 3, \ldots, 2p)$$

$$ds^2 = \frac{dx^2 - m(x^{2h-1}\,dx^{2h} - x^{2h}\,dx^{2h-1})}{2mx^1}$$

unde în ultima formulă se sumează în raport cu indicele $h$ de la 2 la $p$. Împărțind cu $ds$, punînd $u^i$ în loc de $\frac{ds^i}{ds}$, și rezolvînd în raport cu $\frac{dx^i}{ds}$ avem

$$\frac{dx^1}{ds} = 2mx^1u^1, \frac{dx^k}{ds} = \sqrt{2mx^1}\,u^k,$$

$$\frac{dx^2}{ds} = 2mx^1u^2 + m\sqrt{2mx^1}\,(x^{2h-1}u^{2h} - x^{2h}u^{2h-1}). \tag{33'}$$

Pentru a integra ecuațiile (33') vom considera în primul rînd cazul cînd $u^2 = 0$, deci cazul în care geodezicele sînt soluții ale ecuației lui Pfaff

$$dx^2 - m(x^{2h-1}\,dx^{2h} - x^{2h}\,dx^{2h-1}) = 0 \tag{33''}$$

suma în raport cu $h$ făcîndu-se de la 2 la $p$.

În acest caz, cosinusurile $u^1, u^3, \ldots, u^{2p}$ sînt date de formulele (29′) unde variabila $u$ este definită de ecuaţiile ($28^{IV}$).

Utilizînd variabila $u$, ţinînd seama că avem $du = mds\ (1 - u^2)$ sistemul (33′) se scrie

$$\frac{dx^1}{du} = -\frac{2x^1 u du}{1-u^2}\ , \quad \frac{dx^k}{du} = a^k \sqrt{\frac{2x^1}{m(1-u^2)}}$$

$$\frac{dx^2}{du} = (x^{2h-1} a^{2h} - x^{2h} a^{2h-1}) \sqrt{\frac{2x^1 m}{1-u^2}}\ .$$

Prin integrarea acestor ecuaţii obţinem

$$x^1 = a^2 (1 - u^2)\ , \quad x^k = aa^k \sqrt{\frac{2}{m}}\, u + b^k$$
$$x^2 = a\sqrt{2m}\ (b^{2h-1} a^{2h} - b^{2h} a^{2h-1})\, u + b, \tag{34}$$

din care se vede că geodezicele sînt curbe de gradul al doilea, deci curbe plane. Ţinînd seamă că $a^k$ satisfac la relaţia pătratică (28″) rezultă că aceste geodezice constituie o familie cu $4p-3$ parametri:

Constantele $a, b, b^3 \ldots b^{2p}$ şi constantele $a^3, \ldots a^{2p}$ sînt legate de relaţia (28‴)

Se vede că atunci cînd $u$ variază de la $-1$ la $+1$, coordonata $x^1$ creşte de la 0 la $a^2$ — care este un maximum pentru $x^1$ — şi apoi descreşte la zero. Curba începe deci dintr-un punct al planului $x' = 0$ şi se întoarce într-un punct al aceluiaşi plan. Cum planul $x^1 = 0$ este infinitul metricei spaţiului şi cum $u^1 = \pm 1$ pentru $x^1 = 0$, rezultă că geodezica vine de la infinit şi se întoarce la infinit în direcţie ortogonală planului $x^1 = 0$. Se menţine deci o proprietate cunoscută în cazul spaţiilor $V_2$ cu metrica (27″) cînd geodezicele sînt cercuri ortogonale dreptei $x^1 = 0$ (deci axei $x^2$).

Putem observa de asemenea că în cazul spaţiilor $V_2$ geodezicele care satisfac ecuaţia (33″) sînt formate de dreptele $x^2$ egal cu o constantă deci de drepte perpendiculare liniei singulare $x^1 = 0$.

Presupunem că $u^2 \neq 0$. În acest caz prima din ecuaţiile (33′) se scrie ţinînd seama de ecuaţia (30) şi de prima ecuaţie (33)

$$\frac{dx^1}{d\varphi} = x^1 \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi - \sin\alpha}\ , \quad \left(|\alpha| < \frac{\pi}{2}\right)$$

care prin integrare ne dă

$$x^1 = \gamma \frac{\sin\varphi - \sin\alpha}{\varepsilon - \sin\alpha}\ , \tag{34′}$$

în care $\gamma$ este o constantă pozitivă dacă $\alpha$ este pozitiv $\varepsilon = 1$ iar dacă $\alpha$ este negativ $\varepsilon = -1$. Se vede că $\gamma$ este valoarea cea mai mare a variabilei $x^1$ şi corespunde pentru $\varphi = \frac{\pi}{2}$ sau $-\frac{\pi}{2}$.

Ecuațiile (33′) ne dau de asemenea, ținînd seama de 30 și de ultimele ecuații (33)

$$\frac{dx^{2h-1}}{d\varphi} = \sqrt{\frac{\gamma\alpha_h}{2m(\varepsilon-\sin\alpha)}}\cos\alpha\cos(\beta_h-\varphi),$$

$$\frac{dx^{2h}}{d\varphi} = \sqrt{\frac{\gamma\alpha_h}{2m(\varepsilon-\sin\alpha)}}\cos\alpha\sin(\beta_h-\varphi),$$

care se integrează prin formulele

$$x^{2h-1} = \sqrt{\frac{\gamma\alpha_h}{2m(\varepsilon-\sin\alpha)}}\cos\alpha\sin(\varphi-\beta_h)+a^{2h-1}, \tag{35}$$

$$x^{2h} = \sqrt{\frac{\gamma\alpha_h}{2m(\varepsilon-\sin\alpha)}}\cos\alpha\cos(\varphi-\beta_h)+a^{2h},$$

în care $a^{2h-1}$, $a^{2h}$ $(h=2,\ldots,p)$ sînt $2p-2$ constante arbitrare.

În ce privește ultima ecuație (34), ea se scrie ținînd seama de valorile lui $u^k$ și $x^k$ date de (33) și (35)

$$\frac{dx^2}{d\varphi} = -\frac{\gamma\sin\varphi}{\varepsilon-\sin\alpha}+\sqrt{\frac{m\alpha_h\gamma}{2(\varepsilon-\sin\alpha)}}\cos\alpha\left[a^{2h-1}\sin(\beta_h-\varphi)-a^{2h}\cos(\beta_h-\varphi)\right] \tag{35′}$$

Prin integrare ținînd seama de formula (32) obținem

$$x^2 = \frac{\gamma\cos\varphi}{\varepsilon-\sin\alpha}+\frac{\sqrt{m\alpha_h\gamma}}{\sqrt{2(\varepsilon-\sin\alpha)}}\cos\alpha\left[a^{2h-1}\cos(\varphi-\beta_h)-a^{2h}\sin(\varphi-\beta_h)\right]+\delta \tag{36}$$

în care $\delta$ este o constantă arbitrară.

Rezultă deci că valorile coordonatelor $x^1,\ldots,x^{2p}$ ale punctelor geodezicelor pentru care $u^2\neq 0$ sînt date de formulele (34′), (35) și (36) și sînt polinoame trigonometrice în $\sin\varphi$ și $\cos\varphi$ de primul grad. Rezultă deci că geodezicele sînt invariabilele $x^i$ curbe de gradul doi. Prin faptul că $x^i$ nu pot lua decît valori finite, cînd $\varphi$ variază între 0 și $2\pi$, rezultă că geodezicele sînt arce de elipsă, deoarece în cazul nostru $\varphi$ poate varia între $\alpha$ și $\pi-\alpha$ dacă $\alpha$ este pozitiv și $\alpha$ și $-\pi-\alpha$ dacă $\alpha$ este negativ.

Ne vom ocupa în primul rînd de ecuațiile (35). Din ele se vede că proiecția geodezicei pe planul $x^{2h-1}$, $x^{2h}$ este o parte dintr-un cerc care are ecuația

$$(x^{2h-1}-a^{2h-1})^2+(x^{2h}-a^{2h})^2 = \frac{\gamma\alpha_h\cos\alpha}{2m(\varepsilon-\sin\alpha)}$$

și anume partea care se obține variind unghiul $\varphi$ în formulele (35) între $\alpha$ și $\pi-\alpha$, sau $\alpha$ și $-\pi-\alpha$, după cum $\alpha$ este pozitiv sau negativ.

Din formula (34′) se vede că $x^1$ crește de la 0 la $\gamma$, cînd $\varphi$ crește de la $\alpha$ la $\pi/2$ și descrește de la $\gamma$ la 0 cînd $\varphi$ crește de la $\pi/2$ la $\pi-\alpha$, în cazul cînd $\alpha$ este pozitiv. Dacă $\alpha$ este negativ, $x^1$ crește de la 0 la $\gamma$ cînd $\alpha$ descrește de la $\alpha$ la $-\pi/2$ și descrește de la $\gamma$ la 0 cînd $\varphi$ descrește de la $-\pi/2$ la $-\pi-\alpha$. Rezultă deci că geodezica începe dintr-un punct al planului $x^1=0$ și se termină într-un alt punct al acestui plan. Pe de altă parte, ținînd seama de proprietatea demonstrată mai sus că pentru $s=\pm\infty$ cosinusul $u^1$

este $\mp 1$, rezultă că geodezica începe şi se întoarce în direcţie ortogonală planului $x^1=0$, deci se menţine şi în acest caz proprietatea cunoscută în cazul metricii (27''). cînd geodezicele sînt semicercuri ortogonale axei $x^2$ ($x'=0$).

Rezultă de asemenea că, dacă un hiperplan $x^1=$ const. taie o geodezică într-un punct $P_0$ şi dacă $\varphi_0$ este unghiul $\varphi$ corespunzător lui $P_0$ atunci $\varphi_1=\pi-\varphi_0$ corespunde la un punct $P_1$ de pe geodezică situat în acelaşi hiperplan.

Avem deci teorema:

*Un plan $x^1=c$, unde $c$ este o constantă pozitivă, intersectează o geodezică a spaţiului $V_{2p}$ ($\lambda$) cu curbură negativă, în două puncte reale dacă $c<\gamma$, o intersectează într-un punct dacă $c=\gamma$ şi nu o intersectează dacă $c<\gamma$.*

Observăm acum că, punînd pentru simplificare

$$A_h=\sqrt{\frac{\gamma\alpha_h}{2m(\varepsilon-\sin\alpha)}}\cos\alpha\cos\beta_h\,,\quad B_h=\sqrt{\frac{\gamma\alpha_h}{2m(\varepsilon-\sin\alpha)}}\cos\alpha\sin\beta_h \tag{36'}$$

avem ţinînd seama de formula (32')

$$A_h^2+B_h^2=\frac{\gamma\sin\alpha}{m(\varepsilon-\sin\alpha)}$$

unde în primul membru se face suma în raport cu $h$ de la 2 la $p$. În acest caz ecuaţiile cu termeni finiţi ale geodezicelor se scriu

$$\begin{aligned}
x^1&=\gamma\frac{\sin\varphi-\sin\alpha}{\varepsilon-\sin\alpha},\quad\left(\varepsilon=\pm1,\ |\alpha|<\frac{\pi}{2},\ \varepsilon\alpha>0\right)\\
x^{2h-1}&=A_h\sin\varphi-B_h\cos\varphi+a^{2h-1}\\
x^{2h}&=A_h\cos\varphi+B_h\sin\varphi+a^{2h}\\
x^2&=\frac{\gamma\cos\varphi}{\varepsilon-\sin\alpha}+m\cos\varphi\,(a^{2h-1}A_h+a^{2h}B_h)\\
&\quad+m\sin\varphi\,(a^{2h-1}B_h-a^{2h}A_h)+\delta
\end{aligned}\tag{37}$$

şi se vede că ele depind de $4p-2$ constante arbitrare şi anume $2p+1$ constante $\alpha,\gamma,\delta,a^k$ şi $2p-3$ constante $A_h$, $B_h$.

**§ 4. Determinarea geodezicelor care trec prin două puncte.** Fie acum un punct $P_0$ $(x_0^1\ldots,x_0^{2p})$ al geodezicei, ce corespunde valorii $\varphi_0$ a variabilei $\varphi$ şi un punct $P_1$ $(x_1^1,\ldots,x_1^{2p})$ ce corespunde valorii $\varphi_1$. Avem evident formulele

$$\begin{aligned}
x_1^{2h-1}-x_0^{2h-1}&=A_h(\sin\varphi_1-\sin\varphi_0)-B_h(\cos\varphi_1-\cos\varphi_0)\\
x_1^{2h}-x_1^{2h}&=A_h(\cos\varphi_1-\cos\varphi_0)+B_h(\sin\varphi_1-\sin\varphi_0)\\
x_1^2-x_0^2&=\frac{\gamma(\cos\varphi_1-\cos\varphi_0)}{\varepsilon-\sin\alpha}+m\,(a^{2h-1}A_h+a^{2h}B_h)(\cos\varphi_1-\cos\varphi_0)\\
&\quad+m\,(a^{2h-1}B_h-a^{2h}A_h)\,(\sin\varphi_1-\sin\varphi_0)
\end{aligned}\tag{37'}$$

$$a^{2h-1}=\frac{x_1^{2h-1}+x_0^{2h-1}}{2}-\frac{A_h}{2}(\sin\varphi_1+\sin\varphi_0)+\frac{B_h}{2}(\cos\varphi_1+\cos\varphi_0)$$

$$a^{2h}=\frac{x_1^{2h}+x_0^{2h}}{2}-\frac{A_h}{2}(\cos\varphi_1+\cos\varphi_0)-\frac{B_h}{2}(\sin\varphi_1+\sin\varphi_0)$$

Dacă ridicăm la pătrat primele formule și sumăm, obținem

$$(x_1^k - x_0^k)^2 = 2(A_h^2 + B_h^2)[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_0)] \tag{37''}$$

în primul membru suma după $k$ făcîndu-se de la 3 la $2p$ în timp ce în al doilea membru suma după $h$ făcîndu-se de la 2 la $p$. Ținînd seama de formulele (36'') și punînd

$$S = \frac{m}{2}(x_1^k - x_0^k)^2 \tag{37'''}$$

formula (37'') se scrie

$$S = \frac{\gamma \sin \alpha}{\varepsilon - \sin \alpha}[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_0)] \tag{38}$$

din care se vede că $1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_0) \neq 0$, dacă $S \neq 0$, deci dacă punctele $P_1$, $P_0$ nu sînt situate pe aceeași varietate total geodezică $x^k = c^k$, ceia ce noi presupunem,

Primele formule (37') se pot deci rezolva în raport cu $A_h$, $B_h$ și avem

$$\begin{aligned} A_h &= \frac{(x_1^{2h-1} - x_0^{2h-1})(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0) + (x_1^{2h} - x_0^{2h})(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_0)}{2[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_0)]}, \\ B_h &= \frac{-(x_1^{2h-1} - x_0^{2h-1})(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_0) + (x_1^{2h} - x_0^{2h})(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0)}{2[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_0)]} \end{aligned} \tag{39}$$

astfel determinăm constantele $A_h$, $B_h$ în funcție de coordonatele punctelor $P_0$, $P_1$ și unghiurile $\varphi_0$, $\varphi_1$. Aceste unghiuri pot fi determinate de prima ecuație (37) calculată în punctele $P_0$ și $P_1$, deci în funcție de $x_0^1$ și $x_1^1$ și de constantele $\alpha$ și $\gamma$; iar ultimele formule (37') ne dau $a^h$ în funcție de $P_0$, $P_1$ și de $\alpha$, $\gamma$. De asemenea se poate calcula $\delta$ făcînd suma $x_1^2 + x_0^2$.

Deci rămîn de calculat constantele $\alpha$, $\gamma$. Să presupunem în primul rînd că unul din punctele $P_0$ și $P_1$, de exemplu $P_0$, este un punct de maxim. Atunci avem $\varphi_0 = \pm \pi/2$ și deci

$$x_0^1 - \gamma,\ 1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_0) = 1 - \varepsilon \sin\varphi_1,$$

astfel că ținînd seamă de prima formulă din (37), avem

$$1 - \varepsilon \sin\varphi_1 = \varepsilon(\varepsilon - \sin\alpha)\left(1 - \frac{x_1^1}{\gamma}\right)$$

și formula (38) se scrie

$$S = \varepsilon \sin\alpha\,(x_0^1 - x_1^1)$$

ceea ce ne definește $\sin\alpha$. Pentru ca această determinare să fie posibilă, trebuie să avem

$$S < (x_0^1 - x_1^1). \tag{38'}$$

Rezultă deci că prin două puncte $P_0$, $P_1$ din care $P_0$ este punct de maxim, deci $x_1^1 < x_0^1$, poate trece o geodezică numai dacă ecuația (38') este verificată.

Presupunînd că punctele $P_0$, $P_1$ sînt oarecare, ecuaţia (38) se mai poate încă scrie

$$1 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_0 - \frac{S(\varepsilon - \sin\alpha)}{\gamma \sin\alpha} = \cos\varphi_1 \cos\varphi_0 \tag{39'}$$

Ridicînd la pătrat, avem

$$(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0)^2 - \frac{2(1 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_0) S(\varepsilon - \sin\alpha)}{\gamma \sin\alpha} + \frac{S^2(\varepsilon - \sin\alpha)^2}{\gamma^2 \sin^2\alpha} = 0 \tag{39''}$$

Pentru a elimina din această formulă $\sin\varphi_0$ şi $\sin\varphi_1$, să considerăm prima formulă (37) calculată în punctele $P_0$ şi $P_1$. Notînd pentru simplificare

$$x_0^1 = u,\ x_1^1 = v$$

avem formulele

$$u = \gamma \frac{\sin\varphi_0 - \sin\alpha}{\varepsilon - \sin\alpha}, \qquad v = \frac{\sin\varphi_1 - \sin\alpha}{\varepsilon - \sin\alpha} \tag{40}$$

Aceste formule ne dau

$$\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0 = \frac{(v-u)(\varepsilon - \sin\alpha)}{\gamma},$$

$$1 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_0 = (\varepsilon - \sin\alpha)\left[\varepsilon\left(1 - \frac{uv}{\gamma^2}\right) + \left(1 - \frac{u}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{v}{\gamma}\right)\sin\alpha\right] \tag{40'}$$

Introducînd relaţia 40′ în (39″) şi simplificînd cu $(\varepsilon - \sin\alpha)^2$ obţinem ecuaţia

$$\sin^2\alpha\left[(v-u)^2 - 2S\gamma\left(1 - \frac{u}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{v}{\gamma}\right)\right] - 2\sin\alpha\,\varepsilon S\left(1 - \frac{uv}{\gamma^2}\right) + S^2 = 0,$$

care ordonată după puterile lui $\gamma$, devine

$$2\gamma^2 \sin\alpha\, S(\varepsilon + \sin\alpha) - [(v-u)^2 \sin^2\alpha + 2S(u+v)\sin^2\alpha + S^2]\gamma - 2\sin\alpha\, S(\varepsilon - \sin\alpha)\, uv = 0. \tag{41}$$

După cum vedem, aceasta reprezintă o ecuaţie în $\gamma$ şi $\alpha$ care este de al doilea grad în $\gamma$.

Vom observa că a treia formulă (37′) se scrie în virtutea primelor formule (37′), astfel

$$x_1^2 - x_0^2 = \gamma \frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_0}{\varepsilon - \sin\alpha} + m\left[a^{2h-1}\left(x_1^{2h} - x_0^{2h}\right) - a^{2h}\left(x_1^{2h-1} - x_0^{2h-1}\right)\right]$$

Ţinînd seama de ultimele formule (37′) şi din nou de primele formule (37′) şi de formula (32′) obţinem

$$\Sigma = \gamma \frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_0}{\varepsilon - \sin\alpha} + \sin(\varphi_1 - \varphi_0) \frac{\gamma \sin\alpha}{\varepsilon - \sin\alpha}, \tag{42}$$

unde am pus

$$\sum = x_1^2 - x_0^2 + \frac{m}{2}\left(x_1^{2h-1}\, x_0^{2h} - x_1^{2h}\, x_0^{2h-1}\right), \tag{42'}$$

în membrul al doilea suma făcîndu-se în raport cu $h$ de la 2 la $p$.

Formula (42) se poate încă scrie

$$\sum = \frac{\gamma}{\varepsilon - \sin\alpha}\left[\cos\varphi_1\,(1 - \sin\alpha\sin\varphi_0) - \cos\varphi_0\,(1 - \sin\alpha\sin\varphi_0)\right]$$

și ținînd seama că avem în virtutea formulelor (40)

$$1 - \sin\alpha\sin\varphi_0 = (\varepsilon - \sin\alpha)\left[\varepsilon + \left(1 - \frac{u}{\gamma}\right)\sin\alpha\right]$$

și o formulă analogă pentru $1 - \sin\alpha\sin\varphi_1$ obținem

$$\sum = \gamma\cot\varphi_1\left[\varepsilon + \left(1 - \frac{u}{\gamma}\right)\sin\alpha\right] - \gamma\cos\varphi_0\left[\varepsilon + \left(1 - \frac{v}{\gamma}\right)\sin\alpha\right]. \tag{42''}$$

Ridicînd la pătrat, obținem formula

$$\sum^2 = \cos^2\varphi_1\,[\varepsilon\gamma + (\gamma - u)\sin\alpha]^2 + \cos^2\varphi_0\,[\gamma\varepsilon + (\gamma - v)\sin\alpha]^2 -$$
$$- 2\cos\varphi\cos\varphi_0\,[\gamma\,\varepsilon + (\gamma - u)\sin\alpha]\,[\gamma\varepsilon + (\gamma - v)\sin\alpha] \tag{43}$$

Ținînd seamă că ecuația (39') în virtutea ultimei ecuații (40') se scrie

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_0 = (\varepsilon - \sin\alpha)\left[\varepsilon\left(1 - \frac{uv}{\gamma^2}\right) + \left(1 - \frac{u}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{v}{\gamma}\right)\sin\alpha - \frac{S}{2\gamma\sin\alpha}\right]$$

ecuația (43') o putem scrie utilizînd formula

$$\cos^2\varphi_0 = \left(1 - \frac{u}{\gamma}\right)(\varepsilon - \sin\alpha)\left[\varepsilon\left(1 + \frac{u}{\gamma}\right) + \left(1 - \frac{u}{\gamma}\right)\sin\alpha\right] \tag{44}$$

și formula analogă pentru $\cos^2\varphi_1$

$$\sum^2 = -(v - u)^2\,[1 - \sin^2\alpha] + 2\gamma\,\frac{S(\varepsilon - \sin\alpha)}{\sin\alpha}\left[1 + \varepsilon\left(2 - \frac{u + v}{\gamma}\right)\sin\alpha + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{u}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{v}{\gamma}\right)\sin^2\alpha\right].$$

Această relație consituie deci o nouă ecuație în $\gamma$ și $\alpha$, care împreună cu (41) permit să găsim constantele $\alpha$ și $\gamma$ în funcție de coordonatele punctelor $P_0$ și $P_1$. Înmulțind ecuația (44) cu $\gamma\sin\alpha$, se vede că ea constituie o ecuație de gradul al doilea în $\gamma$.

Ecuația (44) se mai poate scrie astfel

$$\gamma\sin\alpha\sum^2 + \gamma\sin\alpha\,[1 - \sin^2\alpha]\,(v - u)^2 = 2S(\varepsilon - \sin\alpha)\,[\gamma^2(\varepsilon + \sin\alpha)^2 -$$
$$- \gamma\sin\alpha\,(u + v)(\varepsilon + \sin\alpha) + uv\sin^2\alpha]$$

pe care dacă o ordonăm după puterile lui $\gamma$, devine

$$2\gamma^2 S(1-\sin^2\alpha)(\varepsilon+\sin\alpha)-\gamma\sin\alpha[1-1\sin^2\alpha][(v-u)^2+2S(u+v)]$$
$$-\gamma\sin\alpha\sum^2+2Suv(\varepsilon-\sin\alpha)\sin^2\alpha=0 \qquad (45)$$

Înmulţind ecuaţia (41) cu $1-\sin^2\alpha$, iar ecuaţia (45) cu $\sin\alpha$ şi făcînd diferenţa lor obţinem

$$[S^2-\sin^2\alpha(S^2+\Sigma^2)]\gamma+2\sin\alpha S(\varepsilon-\sin\alpha)uv=0,$$

$\gamma$ este definit prin formula

$$\gamma=\frac{2\sin\alpha S(\varepsilon-\sin\alpha)uv}{\sin^2\alpha(S^2+\Sigma^2)-S^2} \qquad (45')$$

Inlocuind în ecuaţia (41) obţinem după simplificare cu coeficientul $2\sin\alpha S(\varepsilon-\sin\alpha)$

$$2Suv\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)-[(S^2+\Sigma^2)\sin^2\alpha-S^2]^2$$
$$-[\sin^2\alpha(S^2+\Sigma^2)\sin^2\alpha-S^2][(u-v)^2\sin^2\alpha+2S(u+v)]$$

Această ecuaţie, după simplificare cu $sin^2\alpha$ rămîne

$$\sin^2\alpha=\frac{2Suv+S^2(S^2+\Sigma^2)+S^2[(u-v)^2+2S(u+v)]}{2Suv+(S^2+\Sigma^2)+(S^2+\Sigma^2)[(u-v)^2+2S(u+v)]} \qquad (46)$$

Membrul al doilea al acestei relaţii este evident pozitiv şi mai mic ca unitatea, afară de cazul cînd $\Sigma=0$, cînd este egal cu unitatea.

Presupunînd $\Sigma\neq 0$ ecuaţia (46) ne dă pentru $\alpha$ două valori $\alpha_1$ şi $\alpha_2=-\alpha_1$, unde $\alpha_1$ este pozitiv şi mai mic ca $\pi/2$ de unde este uşor de văzut că avem

$$\sin^2\alpha_1-\sin^2\alpha_2>\frac{S^2}{S^2+\Sigma^2}$$

deci $\gamma$ dat de formula (45') este întotdeauna o cantitate pozitivă, aceeaşi atît pentru $\alpha_1$ cît şi pentru $\alpha_2$.

Avem deci, pentru $\alpha$, $\gamma$ două soluţii ale ecuaţiilor (41) şi (45) şi anume $\alpha_1$, $\gamma_1$ şi $-\alpha_1$, $\gamma_1$ unde $\gamma_1$ este valoarea dată de (45') pentru $\alpha=\alpha_1$.

În ce priveşte determinarea constantelor $A_h$, $B_h$ cu ajutorul formulelor (39), ea depinde nu numai de coordonatele punctelor $P_0$ şi $P_1$ ci şi de arcele $\varphi_0$, $\varphi_1$ care sînt legate de coordonatele $u$, $v$ şi de constantele, $\alpha\gamma$ prin formulele (40).

Rezultă deci că $\sin\varphi_0$ şi $\sin\varphi_1$ sînt complet determinate pentru soluţiile $\alpha_1$ şi $\gamma_1$ şi schimbă de semn pentru soluţia $-\alpha_1$, $\gamma_1$. În ce priveşte $\cos\varphi_0$ şi $\cos\varphi_1$ ei sînt determinaţi abstracţie făcînd de semn. În virtutea ecuaţiei (39') rezultă însă că $\cos\varphi_0$ şi $\cos\varphi_1$, trebuie să schimbe în acelaşi timp de semn, în timp ce din ecuaţia (42'') se vede că în cazul $\Sigma\neq 0$ $\cos\varphi_0$ şi $\cos\varphi_1$ nu pot să schimbe de semn decît dacă $\alpha$ schimbă de semn. Rezultă deci că pentru soluţiile $-\alpha_1$, $\gamma_1$ atît $\sin\varphi_0$ şi $\sin\varphi_1$ cît şi $\cos\varphi_0$ şi $\cos\varphi_1$ schimbă de semn, deci $A_h$ şi $B_h$ schimbă de semn. Aşa fiind ultimele din formulele (37'), se vede că $a^{2h-1}$ şi $a^{2h}$ rămîn invarianţi la schimbarea semnului lui $\alpha$. De asemenea ţinînd seama că $\delta$, din ultimele ecuaţii (37) poate fi definit de formula

$$2\delta=x_1^2+x_0^2+m(\cos\varphi_0+\cos\varphi_1)(a^{2h-1}A_h+a^{2h}B_h)$$
$$+m(\sin\varphi_0+\sin\varphi_1)(a^{2h-1}B_h-a^{2h}A_h),$$

rezultă că $\delta$ rămîne de asemenea invariant la schimbarea lui $\alpha_1$ în $-\alpha_1$.

Avem deci două soluții pentru constantele care sînt în formulele (37) și anume

$$\alpha_1, \gamma_1, A_h^1, B_h^1, a_1^{2h-1}, a_1^{2h}, \delta_1$$
$$-\alpha_1, \gamma_1 - A_h^1, -B_h^1, a_1^{2h-1}, a_1^{2h}, \delta_1.$$

Geodezicele (37) corespunzătoare acestor soluții nu sînt însă distincte. În adevăr, pentru prima soluție $\alpha = \alpha_1$, ținînd seama că $\alpha_1$ este pozitiv și deci $\varepsilon = 1$ avem

$$x^1 = \gamma_1 \frac{\sin\varphi - \sin\alpha_1}{1 - \sin\alpha_1},$$
$$x^{2h-1} = A_h^1 \sin\varphi - B_h^1 \cos\varphi + a_1^{2h-1},$$
$$x^{2h} = A_h^1 \cos\varphi + B_h^1 \sin\varphi + a_1^{2h}, \tag{47}$$

$$x^2 = \frac{\gamma_1 \cos\varphi}{1-\sin\alpha_1} + m\cos\varphi\left(a_1^{2h-1} A_h^1 - a_1^{2h} B_h^1\right) + m\sin\varphi\left(a_1^{2h-1} B_h^1 - a_1^{2h} A_h^1\right) + \delta_1$$

în care $\varphi$ variază între $\alpha_1$ și $\pi - \alpha_1$. A doua soluție $\alpha = -\alpha_1$, $\varepsilon = -1$ se scrie

$$y^1 = \gamma_1 \frac{\sin t + \sin\alpha_1}{-1 + \sin\alpha_1},$$
$$y^{2h-1} = -A_h^1 \sin t + B_h^1 \cos t + a_1^{2h-1},$$
$$y^{2h} = -A_h^1 \cos t - B_h^1 \sin t + a_1^{2h}, \tag{48}$$
$$y^2 = \frac{\gamma_1 \cos t}{-1 + \sin\alpha,} - m\cos t\left(a_1^{2h-1} A_h^1 + a_1^{2h} B_h^1\right)$$
$$- m\sin t\left(a_1^{2h-1} B_h^1 - a_1^{2h} A_h^1\right) + \delta_1,$$

în care $t$ variază între $-\pi + \alpha$, și $-\alpha_1$. Se vede că, dacă punem $t = \varphi - \pi$ $y^i$ din formulele (48) devin respectiv egali cu $x^i$ din formulele (47)

Avem deci teorema:

*Prin două puncte $P_0$ $P_1$ pentru care $\Sigma \neq 0$, ale unui spațiu $V_{2p}(\lambda)$ cu curbură $\lambda$ negativă, trece întotdeauna o geodezică și numai una.*

**§ 5. Determinarea geodezicelor în cazul $\Sigma = 0$.** *Vom considera cazul în care punctele $P_0$ și $P_1$ verifică condiția*

$$\sum = x_1^2 - x_0^2 + \frac{m}{2}\left(x_1^{2h-1} x_0^{2h} - x_1^{2h} x_0^{2h-1}\right) = 0 \tag{49}$$

În primul rînd observăm că $P_0$ fiind dat, punctul $P_1$ se găsește pe un hiperplan care trece prin $P_0$. Punctele $P_0$ și $P_1$ sînt deci conjugate într-o polaritate nulă în spațiul variabilelor $x^1, \ldots, x^{2p}$.

Vom arăta că prin cele două puncte $P_0$ și $P_1$ trece o geodezică ce satisface la condiția neolonomă (33''), deci geodezice ale căror ecuații finite sînt date de formulele (34). Într-adevăr fie $u_0$ și $u_1$ valorile lui $u$ pentru $P_0$ și $P_1$. Avem atunci formulele

$$x_1^k - x_0^k = aa^k \sqrt{\frac{2}{m}}(u_1 - u_0), \quad (k = 3, \ldots, 2p),$$
$$b^k = \frac{x_1^k + x_0^k}{2} - \frac{a^k a}{\sqrt{2m}}(u_1 + u_0). \tag{50}$$

Dacă ridicăm prima din aceste formule la pătrat şi sumăm în raport cu $k$, obţinem, ţinînd seamă de formula (28″)

$$S = a^2(u_1 - u_0)^2 \tag{50'}$$

şi deci prima formulă (50) se scrie

$$a^k = \pm (x_1^k - x_0^k) \sqrt{\frac{m}{2S}} \tag{50''}$$

în membrul al doilea trebuie să luăm semnul + dacă $u_1 > u_0$ şi semnul minus în caz contrar. De asemenea, calculînd ultima formulă (34) în $P_0$ şi $P_1$ şi făcînd diferenţa, obţinem

$$x_1^2 - x_0^2 = a \sqrt{2m}\, (b^{2h-1}\, a^{2h} - b^{2h}\, a^{2h-1})\, (u_1 - u_0).$$

Ţinînd seamă de ultima formulă (50), avem

$$x_1^2 - x_0^2 = a \sqrt{\frac{m}{2}} \left[ (x_1^{2h-1} + x_0^{2h-1})\, a^{2h} - (x_1^{2h} + x_0^{2h})\, a^{2h-1} \right] (u_1 - u_0) \tag{51}$$

care ne conduce la ecuaţia (49′), dacă ţinem seama de primele formule (50), rezolvate în raport cu $a^k$.

Avem deci teorema:

*Dacă punctele $P_0$ şi $P_1$ satisfac condiţiei $\Sigma = 0$, geodezicele care trec prin $P_0$ şi $P_1$ satisfac ecuaţia lui Pfaff* (33″) *şi reciproc.*

Ne putem întreba şi în acest caz, cîte geodezice trec prin punctele $P_0$ şi $P_1$. Notînd pentru simplificare cu $\alpha$ şi $\beta$ valorile variabilei $x^1$ corespunzătoare punctelor $P_0$ şi $P_1$ avem

$$\alpha = a^2(1 - u_0^2),\ \beta = a^2(1 - u_1^2) \tag{52}$$

şi ecuaţia (50′) o scriem

$$S = a^2(u_1^2 + u_0^2 - 2u_1\, u_0) = 2a^2 - \alpha - \beta - 2a^2\, u_1\, u_0$$

ceea ce ne dă

$$u_1\, u_0 = 1 - \frac{\alpha + \beta + S}{2a^2} \tag{52'}$$

Eliminînd $u_1$, $u_0$ între ecuaţiile (52) şi (52′), obţinem ecuaţia

$$a^2 = \frac{N}{4S}, \tag{53}$$

în care am pus

$$N = (\alpha - \beta)^2 + 2S(\alpha + \beta) + S^2.$$

Ţinînd seamă de valoarea lui $a$ dat de ecuaţia (53), ecuaţia (52′) se scrie

$$u_1\, u_0 = \frac{(\alpha - \beta)^2 - S^2}{N}. \tag{54}$$

De asemenea ecuațiile (52) se scriu

$$u_0^2 = \frac{(\beta - \alpha + S)^2}{N}, \qquad u_1^2 = \frac{(\alpha - \beta + S)^2}{N}, \tag{54'}$$

ceea ce ne arată că $u_1$ și $u_0$ sînt determinate în funcție de coordonatele punctelor $P_0$, $P_1$ abstracție făcînd de o schimbare simultană de semn și că $u_1 u_0$ sînt sau nu de același semn, după cum $(\alpha-\beta)^2-S^2$ este mai mare sau mai mic ca zero. Dacă $(\alpha-\beta)^2-S^2=0$, atunci unul din punctele $P_0, P_1$ este un punct de maxim.

Pentru determinarea constantelor $a^k$ avem formulele (50'') unde în membrul al doilea avem semnul + sau — după cum $u_1 > u_0$ sau $u_1 < u_0$.

Fiind dat însă punctul $P_0$, rezultă evident două valori pentru $u_0$, să zicem $u_0'$ și $u_0''$ egale și de semn contrar, iar din ecuația (54) se vede că $u_1$ are o valoare bine determinată dacă se dă $u_0$. Avem deci două valori corespunzătoare $u_1'$ și $u_1''$ pentru $u_1$ de asemenea egale și de semne contrarii Rezultă deci că dacă avem $u_1' > u_0'$, atunci $u_1'' < u_0''$ și invers.

Prin urmare, soluțiile corespunzătoare $a'^k$, $a''^k$ pentru $a^k$ sînt și ele în virtutea primelor formule (50), egale și de semn contrar.

Cît privește constantele $b^k$ formulele (50) ne arată că ele sînt aceleași pentru ambele soluții și aceeași proprietate are loc pentru constanta $b$.

Avem deci două soluții (34), pentru care constantele $a$, $b^k$, $b$, sînt egale și constantele $a^k$ sînt egale și de semn contrar. Aceste soluții devin însă identice prin schimbarea lui $u$ în $-u$, deci prin punctele $P_0$, $P_1$ care satisfac condiției $\Sigma=0$ trece de asemenea numai o singură geodezică. Avem deci teorema:

*Prin punctele $P_0$ și $P_1$ ale unui spațiu $V_{2p}(\lambda)$ cu curbură $\lambda$ negativă, trece întotdeauna o geodezică și numai una.*

**§ 6. Proprietăți geometrice ale geodezicelor.** Am văzut mai sus că atît geodezicele (34), cît și geodezicele (37) sînt curbe plane de gradul doi. Se vede ușor că geodezicele (34) sînt parabole, în timp ce geodezicele (37) sînt elipse.

Vom căuta planele în care se găsesc aceste curbe. În primul caz, considerînd hiperplanul

$$c_1 x^1 + c_2 x^2 + \ldots + c_{2p} x^{2p} + c_0 = 0, \tag{55}$$

acest hiperplan conține curba (34) dacă avem

$$c_1 = 0 \quad , \quad c_2 m (b^{2h-1} a^{2h} - b^{2h} a^{2h-1}) + a^k c_k = 0 \quad , \quad c_2 b + b^k c_k = 0$$

Prima din aceste condiții ne spune că planul geodezicelor este paralel cu axa $x^1$, deci perpendicular pe planele $x^1=$const. și în particular pe planul singular $x^1=0$.

Geodezicele (34) sînt deci parabole situate în plane (varietăți liniare cu două dimensiuni) perpendiculare pe hiperplanul $x^1=0$. Ecuația acestor parabole se scrie

$$P^2 = 1 - \frac{x^1}{a^2},$$

în care $P$ este un polinom liniar în $x^2, \ldots, x^{2p}$ deci axele parabolelor sînt de asemenea ortogonale planului $x^1=0$. Punctul de maxim $x^1=a^2$ este deci vîrful parabolei.

Avem astfel teorema:

*Geodezicele* (34) *sînt parabole avînd axa perpendiculară pe planul* $x^1=0$, *iar concavitatea îndreptată spre acest plan.*

Utilizînd de asemenea o transformare de variabile de forma

$$y^1 = x^1, \quad y^k = x^k + \alpha^k,$$
$$y^2 = x^2 - m\,\alpha^{2h} x^{2h-1} + m\,\alpha^{2h-1} x^{2h} + \beta. \tag{55'}$$

unde $\alpha^k$ şi $\beta$ sînt constante, transformare care păstrează forma canonică (27') a metricei spaţiului, putem pentru o geodezică (34) dată, să reducem la zero cantităţile $b^k$, $b$. Geodezica este situată atunci în planul $x^2=0$ şi are ecuaţiile

$$x^1 = a^2 (1-u^2), \quad x^k = a^k a \sqrt{\frac{2}{m}}\, u, \quad x^2 = 0$$

Putem de asemenea face, printr-o transformare ortogonală a variabilelor $x^k$, ca vectorul unitar $a^k$ să fie îndreptat pe una din axe, de exemplu axa $x^3$. În acest caz, geodezica este definită de ecuaţiile

$$x^1 = a^2 (1-u^2), \; x^3 = a \sqrt{\frac{2}{m}}\, u, \; x^2 = x^4 = \ldots = x^{2p} = 0$$

şi prin urmare avem ecuaţia parabolei în planul $x^1$, $x^3$ dată de formula

$$(x^3)^2 = -\frac{2x^1}{m} + \frac{2a^2}{m},$$

ceea ce ne arată că parametrul parabolei este $1/m$ şi depinde numai de $m$, deci de curbura $\lambda$ a spaţiului $V_{2p}$. Cît priveşte focarul parabolei, el este sau nu deasupra hiperplanului $x^1=0$, după cum este sau nu $a^2 > 1/2m$.

Rezultă deci că geodezicele (34) al căror vîrf este în originea coordonatelor $x^k (k \geqslant 3)$, deci pentru care avem $b^k = 0$, sînt parabole al căror parametru este $1/m$.

Cît priveşte geodezicele (37), după cum am observat mai sus ele sînt elipse.

Ţinînd seamă de faptul că centrul unei elipse este centrul de simetrie al curbei, rezultă că centrul unei asemenea elipse are coordonatele

$$\overline{x}^1 = -\frac{\sin\alpha}{\varepsilon \sin\alpha}, \quad \overline{x}^k = a^k, \; \overline{x}^2 = \delta$$

La prima din aceste formule dacă ţinem seamă de formula (45') putem să scriem

$$\overline{x}^1 = -\frac{2 \sin^2\alpha\, uv}{\sin^2\alpha\,(S^2 + \Sigma^2) - S^2}.$$

Ţinînd seama de formula (46), obţinem

$$\overline{x}^1 = -\frac{2uv + S\,[S^2 + \Sigma^2 + (u-v)^2 + 2\,Suv]}{\Sigma^2} \tag{56}$$

Această formulă ne definește deci coordonata $\overline{x}^1$ a centrului elipsei care trece prin două puncte $P_0$ și $P_1$ și ne arată că centrele elipsei se găsesc în regiunea negativă a variabilei $x^1$, deci în afara domeniului geometriei spațiului $V_{2p}$ deci geodezicele (37) sînt arce de elipse inferioare unei semi-elipse. Presupunem că printr-o transformare liniară de variabile de forma (55′) am redus la zero constantele $a^k$ ale unei geodezice date. În acest caz, geodezica este definită de ecuațiile

$$x^1 - \overline{x}^1 = \frac{\gamma \sin \varphi}{\varepsilon - \sin \alpha}, \quad x^2 = \frac{\gamma \cos \varphi}{\varepsilon - \sin \alpha},$$
$$x^{2h-1} = A_h \sin \varphi - B_h \cos \varphi, \tag{56′}$$
$$x^{2h} = A_h \cos \varphi + B_h \sin \varphi.$$

Avem deci formula

$$(x^1 - \overline{x}^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^{2p})^2 = R^2 \tag{56″}$$

unde am pus, ținînd seama de formulele (36′) și (32′),

$$R^2 = \frac{\gamma^2}{(\varepsilon - \sin \alpha)^2} + \frac{\gamma \sin \alpha}{m(\varepsilon - \sin \alpha)}$$

Formula (56′) ne arată că geodezica considerată este un cerc, și anume un cerc mare al sferei (56″). Rezultă deci că printr-o transformare de variabile de forma (55′), o geodezică dată poate fi transformată într-un cerc.

Rezultă de asemenea că geodezicele al căror centru este în originea coordonatelor $x^k$ $(k>2)$, deci pentru care avem în formulele (37), $a^k = 0$ sînt cercuri.

*O nouă cale pentru a obține geodezicele.* Putem de asemenea obține geodezicele metricei (27′) plecînd dela ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = 0 \left(\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}\right), \tag{57}$$

în care forța vie $T$, este dată de formula

$$T = \frac{1}{2} \frac{(\dot{x}^1)^2 + [\dot{x}^2 + m(\dot{x}^{2h-1} x^{2h} - \dot{x}^{2h} x^{2h-1})]^2}{4 m^2 (x^1)^2} + \frac{(\dot{x}^k)^2}{2m x^1}$$

Ecuația lui Lagrange corespunzătoare lui $i=2$ ne dă integrala primă

$$\dot{x}^2 + m(\dot{x}^{2h-1} x^{2h} - \dot{x}^{2h} x^{2h-1}) = 4 c m^2 (x^1)^2, \tag{57′}$$

în care $c$ este o constantă arbitrară. Ținînd seamă de această integrală primă, ecuațiile (57) pentru $i=2h-1, 2h$ $(h=2, \ldots, p)$ le putem scrie

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{x}^{2h-1}}{2m x^1} + m x^{2h} c\right) = - m \dot{x}^{2h} c$$
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{x}^{2h}}{2m x^1} - m \dot{x}^{2h-1} c\right) = m \dot{x}^{2h-1} c \tag{57″}$$

Vom presupune în primul rînd că $c \neq 0$. În acest caz, punînd

$$du = 4\, m^2 x^1 c\, ds$$

ecuaţiile (57'') le putem scrie

$$\frac{dx^{2h-1}}{du} = -\, x^{2h} + a^{2h} \quad , \quad \frac{dx^{2h}}{du} = x^{2h-1} - a^{2h-1},$$

în care $a^{2h-1}$, $a^{2h}$ sînt $2p-2$ constante de integrare. Avem deci pentru $x^{2h-1}$, $x^{2h}$ formule de forma

$$x^{2h-1} = a^{2h-1} + A^{2h-1} \cos u + A^{2h} \sin u,$$

$$x^{2h} = a^{2h} + A^{2h-1} \sin u - A^{2h} \cos u \tag{58}$$

în care $A^k$ sînt de asemenea $2p-2$ constante de integrare.

Pentru a determina variabila $x^2$, putem utiliza integrala forţelor vii $2T=1$, ce se scrie ţinînd seamă de (57') şi (58)

$$\left(\frac{dx^1}{du}\right)^2 + (x^1)^2 + 2m\, x^1 M = \frac{1}{4m^2 c^2} \quad [M = (A^h)^2 + \ldots + (A^{2h})^2]$$

ceea ce ne dă

$$x^1 = \alpha \sin u - mM \quad , \quad (\alpha = \frac{\sqrt{1 + 4c^2 m^4 M^2}}{2mc} \tag{58'}$$

Ţinînd seama de această formulă şi de formulele (58), ecuaţia (57') ne dă

$$x^2 = -\, \alpha \cos u + m\,(a^{2h-1} A^{2h-1} - a^{2h} A^{2h}) \sin u -$$
$$- m\,(a^{2h-1} A^{2h} + a^{2h} A^{2h-1}) \cos u + c^1, \tag{58''}$$

în care $c^1$ este o altă constantă de integrare.

Formulele (58), (58'), (58'') ne dau deci în cazul $c \neq 0$, variabilele $x^i$ în funcţie de parametrul $u$ şi de $4p-2$ constante.

$$c,\ k',\ a^k,\ A^k\ [k = 3, \ldots, 2p] \tag{58'''}$$

Dacă $c = 0$ formulele (57'') ne dau

$$\frac{dx^k}{du} = a^k \quad (du = 2m\, x^1\, ds)$$

Avem deci

$$x^k = a^k u + b^k \quad (k = 3, \ldots, 2p) \tag{59}$$

Cît priveşte integrala forţei vii ea se scrie

$$\left(\frac{dx^1}{du}\right)^2 + 2m\, x^1 a = 1 \quad [a = (a^3)^2 + \ldots + (a^{2h})^2]$$

şi ne dă

$$x^1 = -\frac{ma}{2} u^2 + \frac{1}{2ma} \tag{59'}$$

De asemenea ecuaţia (57') ne dă, ţinînd seama de formulele (59)

$$x^2 = m\,(a^{2h} b^{2h-1} - a^{2h} b^{2h}) u + c^1 \tag{59''}$$

Formulele (59), (59′), (59″), ne dau deci valorile lui $x^i$ în funcție de parametrul $u$ în cazul $c = 0$.

*Spațiile (27′) sînt spații Kagan de $n-2$ ori proiective.* Faptul că atît curbele definite de formulele (58), (58′), (58″) cît și acele definite de formulele (59), (59′) (59″) sînt curbe plane, ne arată că spațiul $V_{2p}(\lambda)$ cu curbură negativă este un spațiu a lui Kagan de $n-2$ ori proiectiv. Spațiile $V_{2p}(\lambda)$ nu sînt însă spații subproiective [11]. În adevăr, să presupunem că $M$ este diferit de zero. În acest caz, există cel puțin o valoare a lui $h$, pentru care ecuațiile corespunzătoare (58) să se poată rezolva în raport cu $x^{2h-1}$, $x^{2h}$. Fie $h=2$ această valoare, ceea ce revine la a presupune

$$(A^3)^2 + (A^4)^2 \neq 0.$$

Avem atunci formulele

$$\cos u = \frac{A^3(x^3 - a^3) - A^4(x^4 - a^4)}{(A^3)^2 + (A^4)^2}$$
$$\sin u = \frac{A^4(x^4 - a)^4 + A^3(x^4 - a^4)}{(A^3)^2 + (A^4)^2} \tag{60}$$

Înlocuind în formulele (58) pentru $h=3, \ldots, p$ și în formulele (58′), (58″) obținem ecuațiile a $2p-2$ hiperplane în care se găsesc geodezicele. Aceste hiperplane nu trec printr-un punct fix, deci spațiul $V_{2p}(\lambda)$ nu este subproiectiv.

Pe de altă parte, hiperplanele în care se găsesc geodezicele depind efectiv de toate constantele (58‴). În adevăr să presupunem pentru simplificare că $p=2$,. În acest caz, geodezicele pentru

$$c \neq 0, \quad M = (A^3)^2 + (A^4)^2 \neq 0$$

sînt date de formulele (60) și de ecuațiile (58′), (58″) care se scriu ținînd seama de (60)

$$x^1 = \frac{\alpha}{M}(A^4 x^3 + A^3 x^4 - A^4 a^3 - A^3 a^4) - mM$$
$$x^2 = \frac{\alpha}{M}(A^4 x^4 - A^3 x^3 - A^4 a^4 + A^3 a^3) + m(a^3 x^4 - a^4 x^3) + c^1 \tag{60′}$$

Deci geodezicele sînt situate în hiperplanele (60′) ce se pot scrie

$$x^1 = px^3 + qx^4 + r, \quad x^2 = \lambda x^3 + \mu x^4 + v \tag{60″}$$

și se poate ușor verifica că $p, q, r, \lambda, \mu, v$ sînt funcții independente de constantele $c$, $c^1$, $a^3$, $a^4$, $A^3$, $A^4$ de care depind geodezicele spațiului $V_4(\lambda)$ și aceeași proprietate se verifică pentru spațiile $V_{2p}(\lambda)$ cu metrica dată de formula (27′). Nu are loc deci pentru spațiile $V_{2p}(\lambda)$ proprietatea: *Hiperplanele unui spațiu parțial proiectiv (spațiu Kagan) conțin numai cîte două constante arbitrare de fiecare hiperplan*, proprietate pe care eu am presupus-o în alte lucrări 11] ca fiind întotdeauna valabilă.

Datoresc lui V. F. Kagan observația că această proprietate nu are totdeauna loc [12] și spațiile (27′) sînt astfel un exemplu de spații care confirmă observația lui Kagan.

## CAPITOLUL III

## METRICA SPAȚIILOR $V_{2p}(\lambda)$ CU CURBURĂ POZITIVĂ

**§ 1. Spațiile $V_{2p}(\lambda)$ ca varietăți neolonome.** Pentru determinarea metricei spațiilor $V_{2p}(\lambda)$ cu curbură pozitivă, vom pleca de la un rezultat stabilit de C. Teleman [6], că o varietate $V_{2p}(\lambda)$ poate fi considerată ca o subvarietate definită de o ecuație a lui Pfaff pe o sferă în spațiul euclidian $E_{2p+2}$ cu $2p+2$ dimensiuni. Vom arăta cum se realizează efectiv scufundarea varietății $V_{2p}$ în spațiul $E_{2p+2}$.

În adevăr, fie $y^1, \ldots, y^{2p+2}$ coordonate carteziene ortogonale în spațiul euclidian $E_{2p+2}$ și fie $\rho_1, \theta_1; \rho_2, \theta_2; \ldots; \rho_{p+1}, \theta_{p+1}$ coordonate polare în spațiile liniar $y^1, y^2; y^3 y^4; \ldots; y^{2p+1}, y^{2p+2}$.

Avem deci formulele de transformare

$$y^{2k-1} = \rho_k \cos \theta_k$$

$$(k = 1, \ldots, p+1) \tag{61}$$

$$y^{2k} = \rho_k \sin \theta_k$$

și vom presupune că $\rho_k$ pot lua orice valori pozitive, în timp ce $\theta_k$ sînt determinate abstracție făcînd de un multiplu de $2\pi$.

Este evident că în coordonatele $\rho_k$, $\theta_k$ metrica spațiului $E_{2p+2}$ se scrie

$$ds^2 = d\rho_1^2 + \rho_1^2 d\theta_1^2 + \ldots + d\rho_{p-1}^2 + \rho_{p+1}^2 d\theta_{p+1}^2 . \tag{62}$$

De asemenea avem formula cunoscută

$$y^{2k-1}\, dy^{2k} - y^{2k}\, dy^{2k-1} = \rho_k^2\, d\theta_k$$

deci forma simplectică

$$w = y^1 dy^2 - y^2 dy^1 + \ldots + y^{2p+1} dy^{2p+2} - y^{2p+2} dy^{2p+1} \tag{63}$$

se scrie în coordonate polare

$$w = \rho_1^2 d\theta_1 + \ldots + \rho_{p+1}^2 d\theta_{p+1} \tag{63'}$$

Știm pe de altă parte că rotațiile din spațiul euclidian care lasă invariantă forma $w$ constituie un grup cu $(p+1)^2$ parametri, și anume grupul de stabilitate al unui spațiu $V_{2p+2}(\lambda)$. Grupul $G_{(p+1)^2}$ fiind de rotații, lasă invariantă ecuația

$$(y^1)^2 + \ldots + (y^{2p+2})^2 = R^2 \tag{64}$$

Grupul $G_{(p+1)^2}$ este deci un subgrup al grupului de mișcări al sferei de rază $R$ în spațiul $E_{2p+2}$, sferă care în coordonate polare (61) are ecuația

$$\rho_1^2 + \ldots + \rho_{p+1}^2 = R^2. \tag{65}$$

Acest grup este caracterizat de faptul că el lasă în același timp invariantă forma $w$.

Ținînd seamă de relația (65), forma pătratică (62) definește metrica sferei de rază $R$ în spațiul $E_{2p+2}$, deci constituie metrica spațiului $V_{2p+1}$ cu curbură constantă $K = 1/R^2$. Asociind metricei acestui spațiu ecuația $w = 0$, se defi-

neşte o varietate neolonomă $V_{2p+1}^{2p}$ ale cărei proprietăţi semiintrinseci sînt invariante la modificarea metricei (62) printr-un termen de forma $\lambda w^2$, unde factorul $\lambda$ este o funcţie oarecare de coordonatele spaţiului $V_{2p+1}$. Luăm acest factor $\lambda$ egal cu $-K$, unde $K$ este curbura spaţiului, deci să considerăm ca metrică a spaţiului neolonom următoarea formă pătratică

$$\psi = ds^2 - Kw^2 \tag{66}$$

şi să arătăm că această metrică constituie o formă pătratică numai în $2p$ variabile, ceea ce nu are loc în general pentru metrica unei varietăţi neolonome.

Pentru aceasta să facem următoarea transformare de variabile

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \theta_k - \theta_{p+1}, \ (k = 1, \ldots, p) \\ \varphi_{p+1} &= \theta_{p+1} \end{aligned} \tag{67}$$

Ţinînd de asemenea seamă de formula (65), forma $w$ se scrie

$$w = R^2 d\varphi_{p+1} + \rho_1^2 d\varphi_1 + \ldots + \rho_p^2 d\varphi_p . \tag{67'}$$

Pe de altă parte, ţinînd seamă de formulele (67), metrica (62) se scrie

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & d\rho_1^2 + \ldots + d\rho_{p+1}^2 + \rho_1^2 d\varphi_1^2 + \ldots + \rho_p d\varphi_p^2 \\ & + 2d\varphi_{p+1}(\rho_1^2 d\varphi_1 + \ldots + \rho_p^2 d\varphi_p) + R^2 d\varphi_{p+1}^2 \end{aligned}$$

Introducînd-o în formula (66) şi ţinînd seamă că avem $K = 1/R^2$ obţinem

$$\begin{aligned} \psi = {} & d\rho_1^2 + \ldots + d\rho_{p+1}^2 + \rho_1^2 d\varphi_1^2 + \ldots + \rho_p^2 d\varphi_p^2 \\ & - K(\rho_1^2 d\varphi_1 + \ldots + \rho_p^2 d\varphi_p)^2 \end{aligned} \tag{68}$$

Metrica $\psi$ depinde deci de variabilele $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ şi de variabilele $\rho_1, \ldots, \rho_{p+1}$ legate de relaţia (65), deci $\psi$ depinde de $2p$ variabile. Ea poate fi considerată deci ca metrica unui spaţiu $V_{2p}$. Să arătăm că acest spaţiu posedă un grup de mişcări cu $p^2 + 2p$ parametri. În adevăr, atît $ds^2$ în care se ţine seama de (65), cît şi $w$, admit grupul simplectic $G_{(p+1)}$. Deci forma $\psi$ admite şi ea acest grup. Trebuie să observăm însă că există o rotaţie

$$\varphi'_{p+1} = \varphi_{p+1} + c \tag{69}$$

în unghiul $\varphi_{p+1}$, care lasă invariante formele $ds^2$ şi $w$, dar care nu poate fi socotită ca o transformare a formei $\psi$, deoarece $\psi$ nu conţine unghiul $\varphi_{p+1}$.

Rezultă deci că $\psi$ posedă un grup cu $(p+1)^2 - 1 = p^2 + 2p$ parametri. Avem deci teorema

*Spaţiul $V_{2p}$ în variabilele $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ şi variabilele $\rho_1, \ldots, \rho_{p+1}$ legate prin relaţia* (65), *avînd metrica dată de formula* (68), *posedă un grup de mişcări cu $p^2 + 2p$ parametri.*

Formula (68) a fost obţinută cu restricţia că $\theta_k$, sînt determinate de punctele spaţiului, abstracţie făcînd de un multiplu de $2\pi$. Formulele (67) ne arată că $\varphi_k$ sînt determinate deasemenea, abstracţie făcînd de un multiplu de $2\pi$.

Dacă renunţăm la restricţia impusă variabilelor $\varphi_k$, aceasta revine la a considera pentru varietatea $V_{2p}$ o varietate universală de acoperire, care este evident o varietate deschisă.

Din punct de vedere topologic, faptul că $\varphi_k$ sînt determinaţi, abstracţie făcînd de un multiplu de $2\pi$, revine a spune că aceste coordonate pot fi considerate ca unghiuri la centru a $p$ cercuri $c_k$.

Vom arăta acum că grupul de mişcări ale spaţiului $V_{2p}$ este un grup simplu. Pentru aceasta să ţinem seamă de faptul că grupul ortogonal $G_{(p+1)^2}$ care păstrează forma $w$ este dat de transformările infinitezimale

$$X_{12}, \ldots, X_{2p-1\,2p}, \; X_{2p+1\,2p+2},$$

$$U_{hk} = X_{2h-1\,2k-1} + X_{2h\,2k}, \qquad (70)$$

$$(h, k = 1, 2, \ldots, p+1)$$

$$V_{hk} = X_{2h-1\,2k} - X_{2h\,2k-1}.$$

Primele transformări (70) formează un subgrup abelian, care în variabilele $\rho$ şi $\theta$ este dat de formulele

$$X_{12} = \frac{\partial f}{\partial \theta_1}, \ldots, X_{2p+1\,2p+2} = \frac{\partial f}{\partial \theta_{p+1}},$$

deci este dat de rotaţiile de unghiuri $\theta_k$.

În variabilele (67) avem

$$X_{12} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}, \ldots, X_{2p-1\,2p} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_p},$$

$$X_{2p+1\,2p+2} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_{p+1}} - \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} - \ldots - \frac{\partial f}{\partial \varphi} \qquad (70')$$

Rezultă deci că transformarea infinitezimală a rotaţiei (69), este dată de formula

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_{p+1}} = X_{12} + \ldots + X_{2p+1\,2p+2}, \qquad (70'')$$

deci reprezintă transformarea distinsă a grupului (70).

Am demonstrat însă în capitolul II pentru grupul $G_{p^2}$, că este format dintr-o transformare distinsă şi dintr-un grup simplu închis. În cazul considerat aici, grupul simplu poate fi definit de transformările infinitezimale

$$Z_{hp+1} = X_{2h-1\,2h} - X_{2p+1\,2p+2},$$

$$U_{hk}, \; V_{hk}, \; U_{hp+1}, \; V_{k\,p+1}, \; (h,k = 1, \ldots, p), \qquad (70''')$$

parantezele nenule fiind date de formulele (12).

Prin transformarea de variabile (61) avem

$$Z_{h\,p+1} = \frac{\partial f}{\partial \theta_h} - \frac{\partial f}{\partial \theta_{h+1}},$$

$$U_{hl} = \cos(\theta_h - \theta_l)\left(\frac{\partial f}{\partial \rho_l}\rho_h - \frac{\partial f}{\partial \rho_h}\rho_l\right) + \sin(\theta_h - \theta_l)\left(\frac{\rho_h}{\rho_l}\frac{\partial f}{\partial \theta_l} + \frac{\rho_l}{\rho_h}\frac{\partial f}{\partial \theta_h}\right),$$

$$V_{hl} = -\sin(\theta_h - \theta_l)\left(\frac{\partial f}{\partial \rho_l}\rho_h - \frac{\partial f}{\partial \rho_h}\rho_l\right) + \cos(\theta_h - \theta_l)\left(\frac{\rho_h}{\rho_l}\frac{\partial f}{\partial \theta_l} + \frac{\rho_l}{\rho_h}\frac{\partial f}{\partial \theta_h}\right),$$

$$(h = 1, \ldots, p, \; l = 1, \ldots, p+1)$$

Dacă utilizăm acum transformarea de variabile (67) avem

$$Z_{h\,p+1} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_h} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_p} - \frac{\partial f}{\partial \varphi_{p+1}},$$

$$U_{hk} = \cos(\varphi_h - \varphi_k)\left(\frac{\partial f}{\partial \rho_k}\rho_h - \frac{\partial f}{\partial \rho_h}\rho_k\right) + \sin(\varphi_h - \varphi_k)\left(\frac{\rho_h}{\rho_k}\frac{\partial f}{\partial \rho_k} + \frac{\rho_k}{\rho_h}\frac{\partial f}{\partial \rho_h}\right),$$

$$U_{h\,p+1} = \cos\varphi_h\left(\frac{\partial f}{\partial \rho_{p+1}}\rho_h - \frac{\partial f}{\partial \rho_h}\rho_{p+1}\right) + \sin\varphi_h\frac{\rho_h}{\rho_{p+1}} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_{p+1}} \qquad (70^{IV})$$

$$+\sin\varphi_h\left[\frac{\rho_{p+1}}{\rho_h}\frac{\partial f}{\partial \varphi_h} - \frac{\rho_h}{\rho_{p+1}}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} + \ldots\frac{\partial f}{\partial \varphi_p}\right)\right]$$

$$(h, k = 1, \ldots, p)$$

și formule analoge pentru $V_{hk}$, $V_{h\,p+1}$.

Se vede că transformările grupului nu depind explicit de variabila $\varphi_{p+1}$. Transformările finite ale grupului relativ la variabilele $\rho_h$, $\rho_{p+1}$, $\varphi_h$ nu depind deci de $\varphi_{p+1}$, deci grupul $\overline{G}$ cu $p^2 + 2p$ parametri definit de transformările ($70^{IV}$) și $V_{hk}$, $V_{h\,p+1}$, în care se neglijează termenii în $\frac{\partial f}{\partial \varphi_{p+1}}$, este grupul de mișcare al spațiului $V_{2p}$, deoarece grupul $\overline{G}$ conține numai variabilele $\varphi_h$ și $\rho_1, \ldots, \rho_{p+1}$ legate prin relația (65).

Grupul $\overline{G}$ este un grup tranzitiv în variabilele $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ și pe sfera (65). Într-adevăr, el este evident tranzitiv în variabilele $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ deoarece conține subgrupul abelian dat de primele $p$ transformări infinitezimale ($70^{IV}$). El este de asemenea tranzitiv pe sfera (62), deoarece posedă această proprietate cînd presupunem $\varphi_h$ constante. Grupul de mișcare fiind simplu și tranzitiv, după o teoremă a lui Elie Cartan rezultă că spațiul $V_{2p}$ este un spațiu simetric.

De asemenea grupul de mișcare fiind închis, rezultă că spațiul $V_{2p}$ este cu curbură pozitivă.

Avem deci teorema

*Fiind dată sfera* (64) *în spațiul euclidian* $E_{2p+2}(y^1, \ldots, y^{2p+2})$, *varietatea neolonomă definită pe această sferă de ecuația lui Pfaff*

$$y^1 dy^2 - y^2 dy^1 + \ldots + y^{2p+1} dy^{2p+2} - y^{2p+2} dy^{2p+1} = 0$$

*constituie un spațiu* $V_{2p}$ *simetric cu curbură pozitivă având un grup de mișcări cu* $2p + p^2$ *parametri.*

**§ 2. Metrica spațiilor $V_{2p}(\lambda)$ cu curbură pozitivă.** Cît privește metrica spațiului $V_{2p}$, ea este dată de formula (68) în care trebuie să ținem seama de formula (65), deci de faptul că $\rho_1, \ldots, \rho_{p+1}$ sînt coordonatele unui punct al unei sfere $S_p$ de rază $R$ în spațiul $E_{p+1}$, iar $\varphi_k$ sînt determinate abstracție făcînd de un multiplu de $2\pi$. Rezultă deci că varietățile

$$\varphi_i = c_i, (i = 1, \ldots, p)$$

sînt în spaţiul $V_{2p}$ sfere, deci varietăţi $V_p$ cu curbură constantă şi este uşor de văzut că ele sînt varietăţi total geodezice. Cum aceste varietăţi $V_p$ au curbura $K = 1/R^2$, spaţiul $V_{2p}(\lambda)$ are $\lambda$ dat de formula

$$4\lambda = K, \tag{71}$$

deoarece, cum am arătat în capitolul II, pentru un spaţiu $V_{2p}(\lambda)$, curbura unei faţete plane este $4\lambda$.

Să considerăm ca reprezentare parametrică a sferei (65), proiecţia stereografică din punctul $(0, \ldots, 0, R)$ pe planul tangent în punctul diametral opus $(0, \ldots, 0, -R)$. Notînd cu $x^1, \ldots, x^p$ coordonate carteziene în planul tangent, avem formulele

$$\rho_i = \frac{x^i}{1+\lambda\rho^2} \quad , \quad (i = 1, \ldots, p),$$
$$\rho_{p+1} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \frac{1-\lambda\rho^2}{1+\lambda\rho^2} \qquad [\rho^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2] \tag{71'}$$

unde am ţinut seamă de formula (71), astfel că avem

$$d\rho_1^2 + \ldots + d\rho_{p+1}^2 = \frac{(dx^1)^2 + \ldots + (dx^p)^2}{(1+\lambda\rho^2)^2} \tag{71''}$$

Membrul al doilea al egalităţii reprezintă ceea ce se numeşte forma canonică a lui Riemann, a metricei unui spaţiu cu curbură constantă.

Rezultă deci că metrica $\psi$ a spaţiului $V_{2\rho}(\lambda)$ cu $p$ variabile este dată de formula

$$ds^2 = \frac{(dx^i)^2 + (x^i)^2 (d\varphi^i)^2}{(1+\lambda\rho^2)^2} - \frac{4\lambda [(x^i)^2 d\varphi^i]^2}{(1+\lambda\rho^2)^4}, \tag{72}$$

în care pentru uniformitate am scris $\varphi^i$ în loc de $\varphi_i$.

Putem observa că formula (72) generalizează forma canonică a lui Riemann pentru metrica unei suprafeţe cu curbură constantă. Ea se aplică şi pentru suprafeţele cu curbură constantă $k = 4\lambda$ negativă, în care sfera (65) este o sferă cu rază imaginară pură.

Dacă facem schimbarea de variabile

$$z^{2i-1} = x^i \cos\varphi^i, \; z^{2i} = x^i \sin\varphi^i$$

metrica (72) se scrie

$$ds^2 = \frac{(dz^h)^2}{(1+\lambda\rho^2)^2} - \frac{4\lambda w^2}{(1+\lambda\rho^2)^4} \tag{72'}$$

unde avem

$$\rho^2 = (z^1)^2 + \ldots + (z^{2p})^2 \quad , \quad w = z^1 dz^2 - z^2 dz^2 + \ldots + z^{2p-1} dz^{2p} - z^{2p} dz^{2p-2}$$

Să considerăm de asemenea o altă reprezentare parametrică importantă a sferei (65) şi anume proiecţia centrală pe un plan tangent la sferă, de exemplu planul $\rho_{p+1} = -R$. Această proiecţie ne dă reprezentarea unei semisfere pe plan. Putem de asemenea, după cum se ştie, considera această

proiecție ca reprezentarea sferei întregi, în care însă două puncte diametral opuse sînt considerate identice și atunci planul corespunzător constituie planul geometriei neeuclidiene eliptice. Dacă notăm cu $u^1 \ldots, u^p$, coordonate carteziene ortogonale în planul $\rho_{p+1} = -R$, atunci putem lua

$$\rho_i = \frac{u^i}{\sqrt{u}}, \ (i = 1,2, \ldots, p), \ \rho_{p+1} = \frac{1}{\sqrt{ku}}, \tag{73}$$

$$u = 1 + k\,[(u^1)^2 + \ldots + (u^p)^2]\ k = \frac{1}{R^2}$$

și trebue să presupunem că $u^i$ sunt toate pozitive și metrica sferei se scrie

$$d\rho_1^2 + \ldots + d\rho_{p+1}^2 = \frac{(du^i)^2}{u} - \frac{du^2}{4ku^2} \tag{74}$$

Formula (68) se scrie deci în coordonatele $u^1, \ldots, u^p$, $v^i = \varphi_i$,

$$ds^2 = \frac{(du^i)^2}{u} - \frac{du^2}{4\,ku^2} + \frac{(u^i)^2\,(dv^i)^2}{u} - \frac{k\,[(u^i)^2\,dv^i]^2}{u^2}. \tag{75}$$

Varietățile $v^i = c^i$ sînt varietăți total geodezice, iar geodezicele lor sînt în variabilele $u^i$, după cum se știe, linii drepte în cazul $k > 0$, iar în cazul $k < 0$ ele sînt segmente de drepte situate în interiorul sferei

$$(u^1)^2 + \ldots + (u^p)^2 = -\frac{1}{k}.$$

**§ 3. Ecuațiile geodezicelor.** Să căutăm geodezicele metricei (75) în cazul general în care coordonatele $v^i$ nu sînt toate constante. Împărțind (75) cu $ds^2$ și notînd $\frac{du^i}{ds}, \frac{dv^i}{ds}, \frac{du}{ds}$ cu $u'^i, v'^i, u'$, interpretînd arcul $s$ ca timp, forța vie a sistemului mecanic asociat spațiului $V_{2p}$ este dată de formula

$$T = \frac{1}{2}\frac{(u'^i)^2 + (u^i)^2\,(v'^i)^2}{u} - \frac{u'^2}{8\,ku^2} - \frac{k}{2u^2}[(u^i)^2\,v'^i]^2 \tag{76}$$

astfel că geodezicele sînt date de ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial T}{\partial u'^h} = \frac{\partial T}{\partial u^h}, \quad \frac{d}{ds}\frac{\partial T}{\partial v'^h} = \frac{\partial T}{\partial v^h}, \ (h = 1, \ldots, p). \tag{77}$$

Ținînd seama că $T$ nu depinde de $v^h$, ultimele ecuații din (77) ne dau $p$ integrale prime

$$\frac{\partial T}{\partial v'^h} = \frac{(u^h)^2\,v'^h}{u} - \frac{k\,(u^i)^2\,v'^i\,(u^h)^2}{u^2} = c_h$$

unde $c_h$ sînt constante. Dacă în aceste integrale prime facem suma în raport cu $h$ obținem, ținînd seama de valoarea lui $u$ dată în formulele (73)

$$(u^i)^2\,v'^i = c\,u^2, \quad (c = c_1 + \ldots + c_p) \tag{77'}$$

astfel că formulele (77′) ne dau

$$v'^h = u\left[c\,k + \frac{c_h}{(u^h)^2}\right] \tag{78}$$

Cît privește primele formule (77) le scriem

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{u'^h}{u} - \frac{u'u^h}{2u^2}\right) = \frac{u^h\,(v'^h)^2}{u} - \frac{u'u'^h}{2u^2} - \frac{2k}{u^2}(u^i)^2\,v'^i\,u^h\,v'^h -$$

$$- \frac{ku^h}{u^2}[(u'^i)^2 + (u^i)^2\,(v'^i)^2] + \frac{u'^2\,u^h}{2u^3} + \frac{2k^2}{u^3}[(u^i)^2\,v'^i]^2\,u^h \tag{78′}$$

$i$ fiind un indice de sumare.

Derivînd în raport cu $s$, primul membru al acestei ecuații se scrie

$$\frac{u''^h}{u} - \frac{u''u^h}{2u^2} - \frac{3}{2}\frac{u'^h u'}{u^2} + \frac{u'^2 u^h}{u^3}$$

astfel că formulele (78′) iau forma

$$\frac{u''^h}{u} - \frac{u''u^h}{2u^2} - \frac{u'u'^h}{u^2} + \frac{u'^2u^h}{2u^3} + \frac{ku^h}{u^2}(u^i)^2 = \frac{u^h(v'^h)^2}{u} -$$

$$- \frac{2ku^hv'^h}{u^2}(u^i)^2\,v'^i - \frac{ku^h}{u^2}(u^i)^2\,(v'^i)^2 + \frac{2k^2}{u^3}[(u^i)^2\,v'^i]^2\,u^h \tag{78″}$$

Ținînd seama de formulele (78), membrul al doilea de scrie

$$uu^h\left[c^2\,k^2 + \frac{2cc_h\,k}{(u^h)^2} + \frac{c_h^2}{(u^h)^4}\right] - 2k\,c\,u^h u\left[ck + \frac{c_h}{(u^h)^2}\right]$$

$$- ku^h\left[c^2\,k^2\,(u^i)^2 + 2c^2\,k + \frac{c_i^2}{(u^i)^2}\right] + 2k^2c^2\,uu^h$$

și formulele (78″) devin

$$\frac{u''^h}{u} - \frac{u''u^h}{2u^2} - \frac{u'u'^h}{u^2} + \frac{u'^2u^h}{2u^3} + \frac{ku^h}{u^2}(u'^i)^2 = u^h\left[u\frac{c_h^2}{(u^h)^4} - c^2k^2\right] - ku^h\frac{c_i^2}{(u^i)^2} \tag{79}$$

Înmulțim aceste ecuații cu $u^h$ și sumăm în raport cu $h$; avem

$$\frac{u^i\,u''^i}{u} - \frac{u''(u^i)^2}{2u^2} - \frac{u'u'^iu^i}{u^2} + \frac{u'^2(u^i)^2}{2u^3} + k\,\frac{(u^i)^2\,(u'^j)^2}{u^2} = k\,\frac{c_i^2}{(u^i)^2} -$$

$$- c^2k^2\,(u^i)^2 - k(u^i)^2\frac{c_i^2}{(u^i)^2} \tag{79′}$$

Ținînd seama că avem

$$u = 1 + k\,(u^i)^2,\; u' = 2ku^i u'^i,\; u'' = 2ku^i u''^i + 2k\,(u'^i)^2$$

(79′) devine

$$\frac{u''}{2ku^2} - \frac{(u'^i)^2}{u^2} - \frac{u'^2}{2ku^3} = \frac{(c_i)^2}{(u^i)^2} - c^2\,k\,(u-1) \tag{80}$$

Introducînd valoarea lui $u''$ dată de această formulă în ecuațiile (79), obținem

$$\frac{u''^h}{u} + \frac{u'^2}{2ku^3} + \frac{c_i^2}{(u^i)^2} + c^2k(1-u) - \frac{u'u'^h}{u^2} + \frac{u'^2u^h}{2u^3} =$$

$$= u^h\left[u\frac{c_h^2}{(u^h)^4} - c^2k^2\right] - ku^h\frac{c_i^2}{(u^i)^2},$$

astfel că reducînd termenii asemenea avem

$$u''^h = \frac{u'u'^h}{u^2} - c^2k^2u^2 + u^2\frac{c_h^2}{(u^h)^3} \tag{81}$$

Aceste ecuații reprezintă un sistem de ecuații diferențiale de al doilea ordin în $u^h$ și posedă evident integrala primă $T = \text{const.}$, pe care o putem lua $T = 1/2$, astfel că avem relația

$$\frac{(u'^i)^2 + (u^i)^2(v'^i)^2}{u} - \frac{u'^2}{4ku^2} - \frac{k}{u^2}[(u^i)^2v'^i]^2 = 1.$$

Ținînd seamă de ecuațiile (78) avem

$$\frac{(u'^i)^2}{u} + u\left[c^2k^2(u^i)^2 + 2c^2k + \frac{c_i^2}{(u^i)^2}\right] - \frac{u'^2}{4ku^2} - kc^2u^2 = 1$$

Eliminînd $(u'^i)^2$ între această ecuație și ecuația (80), obținem

$$u'' = \frac{3}{2}\frac{u'^2}{u} + 2ku - 2c^2k^2u^3 \tag{82}$$

care constituie o ecuație diferențială în o singură funcție $u$ de variabila $s$.

**§ 4. Integrarea ecuațiilor geodezicelor.** Considerăm acum o variabilă auxiliară t definită de relația

$$dt = uds \tag{82'}$$

Ecuațiile (81) se scriu

$$\frac{d^2u^h}{dt^2} = -c^2k^2u^h + \frac{c_h^2}{(u^h)^3} \tag{83}$$

și constituie ecuații separate, deoarece conțin cîte o singură variabilă. Vom presupune în primul rînd că $c_h$ sunt toate diferite de zero. Înmulțind cu $\frac{du^h}{dt}$ și integrînd, avem.

$$\left(\frac{du^h}{dt}\right)^2 = n_h - c^2k^2(u^h)^2 - \frac{c_h^2}{(u^h)^2},$$

în care $n_h$ sînt constante pozitive, altfel $u^h$ ar fi imaginare.

Punînd $(u^h)^2 = 2z^h$ avem în $z^h$ ecuația

$$\left(\frac{dz^h}{dt}\right)^2 = -4c^2k^2(z^h)^2 + 2n_hz^h - c_h^2 \tag{84}$$

Presupunînd, ceea ce este cazul general, că

$$c = c_1 + \ldots + c_p \neq 0,$$

putem să considerăm pentru o geodezică dată că $c$ este pozitiv. Scriem acum ecuaţia (84) sub forma

$$\left(\frac{dz^h}{dt}\right)^2 = 4c^2k^2\left(z^h - z_0^h\right)\left(z_1^h - z^h\right) \tag{84'}$$

în care $z_0^h$, $z_1^h$ sînt rădăcinile pozitive ale ecuaţiei

$$4c^2k^2(z^h)^2 - 2n_h z^h + c_h^2 = 0$$

şi putem presupune $z_0^h < z_1^h$. Menţionăm că rădăcinile $z_0^h$ şi $z_1^h$ nu pot fi egale şi nici imaginare, deoarece astfel partea a doua a ecuaţiei (84) ar fi negativă şi deci $z^h$ imaginar. Avem deci

$$n_h^2 - 4c^2\,k^2\,c_h^2 > 0.$$

De asemenea observăm că $z_0^h$ nu poate fi zero deoarece $c_h \neq 0$, deci $u_h$ nu se pot anula.

Din proprietăţi cunoscute ale ecuaţiilor de forma (84) rezultă că $z^h$ este o funcţie periodică de $t$ şi oscilează între $z_0^h$ şi $z_1^h$. Pentru a găsi valoarea explicită a lui $z^h$ să facem transformarea de variabilă

$$z^h = \frac{z_0^h + z_1^h\,\theta_h^2}{1 + \theta_h^2}.$$

Obţinem atunci prin integrarea ecuaţiei (84')

$$\theta_h = \operatorname{tg}(ckt + \beta_h)$$

în care $\beta_h$ sînt constante, şi prin urmare avem

$$z^h = \frac{z_0^h + z_1^h \operatorname{tg}^2(ckt + \beta_h)}{1 + \operatorname{tg}^2(ckt + \beta_h)}$$

care se mai poate scrie şi sub forma

$$z^h = \frac{z_0^h + z_1^h}{2} - \frac{z_1^h - z_0^h}{2}\cos(2ckt + 2\beta_h) \tag{85}$$

şi prin urmare $z^h$ este funcţie periodică de $t$ de perioadă $\pi/ck$

Rezultă deci că $u^h$ sînt definite de formulele

$$(u^h)^2 = z_0^h + z_1^h - \left(z_1^h - z_0^h\right)\cos(2ckt + 2\beta_h), \tag{85'}$$

ceea ce ne arată că $u^h$ sînt funcţii periodice de $t$ de perioada $\pi/ck$ şi aceste funcţii nu pot lua valoarea zero, deoarece am presupus $c_h \neq 0$.

Avem deci teorema:

*Dacă constantele $c_1, \ldots, c_h$, $c$ sînt diferite de zero, proiecţia geodezicei pe sfera* (65) *este închisă şi situată în primul cadran.*

Odată determinate $u^h$ în funcţie de parametrul $t$, ecuaţiile (78) ne determină $v^h$ prin ecuaţiile diferenţiale

$$\frac{dv^h}{dt} = ck + \frac{c_h}{(u^h)^2}, \tag{86}$$

care ne dau prin integrare

$$v^h = v_0^h + ckt + \int_0^t \frac{c_h}{(u^h)^2}\,dt$$

Dacă $c^h \neq 0$, ținînd seama de formula (25), un calcul simplu ne duce la formula următoare

$$v^h = v_0^h + ckt + \varepsilon\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{z_1^k}{z_0^h}}\operatorname{tg}(ckt+\beta_h) - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{z_1^h}{z_0^h}}\operatorname{tg}\beta_h\right] \qquad (86')$$

în care. dacă $c_h$ este pozitiv $\varepsilon = 1$ iar dacă $c_h$ este negativ $\varepsilon = -1$.

Ținînd seama de faptul că coeficientul lui $\varepsilon$ crește cu $\pi$, cînd $t$ crește de la 0 la $\pi/ck$, deci parcurge o perioadă a funcțiilor $u_h$, funcțiunile $v_h$ cresc de la $v_0^h$ la $v_0^h + \pi + \varepsilon\pi$ deci funcțiile $v^h$ pentru care $c_h$ sînt negative, deci $\varepsilon = -1$ sînt și ele periodice de perioadă $\pi/ck$. Constantele $c_h$ nu pot fi însă toate negative, deoarece am presupus că $c$, suma acestor constante este pozitivă.

Avem deci teorema:

*În cazul $c \neq 0$ există cel puțin una din coordonatele $v^h$ ale unei geodezice care nu este periodică în parametrul $t$.*

O coordonată $v^h$ care nu este periodică, are o valoare finită pentru orice valoare finită a lui $t$ și tinde la infinit cînd $t$ tinde la infinit.

Presupunem acum că $c = 0$, deci că geodezica satisface, în virtutea ecuației (77''), la ecuația lui Pfaff

$$(u^i)^2\,dv^i = 0$$

În acest caz din ecuația (84) obținem

$$(u^h)^2 = 2z^h = \frac{c_h^2 + (n_h t + \beta_h)^2}{n_h} \qquad (87)$$

iar din formulele (86) obținem, dacă $c^h \neq 0$

$$v^h = v_0^h + \operatorname{arctg}\frac{n_h t + \beta_h}{c_h} - \operatorname{arctg}\frac{\beta_h}{c_h} \qquad (87')$$

Din formulele (84) se vede că $z^h$ au un minim pentru $t = -\beta_h/n_h$ și tind la $+\infty$, cînd $t$ tinde la $\pm\infty$. Funcțiile $u^h$ au deci un minim sau maxim dat de $\pm c_h/\sqrt{n_h}$ după cum sînt pozitive sau negative.

Dacă toate constantele $c_h$ sînt nule avem

$$\bar{u}^h = \pm\frac{n_h t + \beta_h}{\sqrt{n_h}},\quad v^h = v_0^h \qquad (87'')$$

care sînt geodezicele spațiilor total geodezice $V_p$. Aceste geodezice sînt, după cum se vede, drepte pentru care $t$ este parametrul afin.

Ținînd seama de formulele (87''), formulele (87) se scriu

$$(u^h)^2 = \frac{c_h^2}{n_h} + (\bar{u}^h)^2$$

și cum cel puțin pentru una din cantitățile $c^h$, ecuația este diferită de zero, rezultă că curba (87) nu poate întîlni curba (87'').

Altfel spus, dacă am fi făcut o proiecție stereografică în care dreapta (87′′) să fie dreapta de la infinit, deci ecuatorul, atunci curba (27) nu ar fi tăiat ecuatorul, deci ar fi fost din categoria geodezicelor cu $c \neq 0$.

**§ 5. Proprietăți globale ale geodezicelor.** Pentru a urmări geodezicele în toată întinderea lor, să vedem ce legătură există între parametrul auxiliar și arcul curbei, deci să integrăm ecuația (82). Ținînd seama că această ecuație nu ne ține $s$ explicit, să considerăm $s$ ca o funcție de $u$. Avem atunci

$$u' = \frac{1}{s'}, \quad u'' = -\frac{s''}{s'^2}, \quad \left( s' = \frac{ds}{du}, \quad s'' = \frac{d^2 s}{du^2} \right),$$

ec ecuația (82) devine

$$-\frac{s''}{s'^2} = \frac{3}{2}\frac{1}{s'^2 u} + 2ku - 2c^2 k^2 u^3.$$

Punînd $p = 1/s'^2$ avem

$$p' = \frac{3p}{u} + 4ku - 4c^2 k^2 u^3,$$

astfel că avem

$$p = 4au^3 - 4c^2 k^2 u^4 - 4k u^2,$$

în care $a$ este o constantă. Ținînd seamă că $s'^2 = 1/p$ avem

$$\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 4u^2 (-c^2 k^2 u^2 + au - k) \tag{88}$$

și prin urmare $s$ se obține în funcție de $u$ printr-o cuadratură.

Pentru a găsi funcția $u(s)$ să observăm că dacă $c \neq 0$ putem scrie

$$\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = -4c^2 k^2 u^2 (u - u_0)(u - u_1), \tag{89}$$

în care $u_0$ și $u_1$ sînt rădăcinile ecuației

$$c^2 k^2 u^2 - au + k = 0 \tag{89'}$$

Dacă curbura $k$ este pozitivă, rădăcinile $u_0$ și $u_1$ sînt de același semn, ele sînt pozitive, dacă constanta $a$ este pozitivă. Observăm de asemenea că $u_0$ și $u_1$ nu pot fi egale și nici una din ele nulă. Din proprietățile cunoscute ale ecuațiilor de forma (89) și din faptul că $u_0$ și $u_1$ sînt rădăcini simple consecutive ale polinomului din membrul al doilea și $u$ trebuie să se găsească inițial între aceste rădăcini, rezultă că $u$ este o funcție periodică de $s$, care atunci cînd $s$ crește de la $-\infty$ la $+\infty$ oscilează între $u_0$ și $u_1$. Rezultă deci că parametrul $t$ dat de formula (82′) crește de la $-\infty$ la $+\infty$ cînd $s$ crește de la $-\infty$ la $+\infty$, altfel spus parametrul $t$ poate lua ca și $s$ orice valoare o singură dată.

Avem deci teorema:

*Dacă curbura $k = 4\lambda$ a spațiului $V_{2p}(\lambda)$ este pozitivă și constanta $c$ este diferită de zero, coordonatele $u^h$ ale unui punct al unei geodezice sînt funcții periodice, deci proiecția geodezicei pe sfera $S_p$ din $E_{p+1}$ este o curbă închisă ce nu întîlnește ecuatorul $\rho_{p+1} = 0$.*

Cît privește coordonatele $v^h$ ele sînt pentru $cc_h>0$, funcții crescătoare sau descrescătoare tinzînd la infinit pentru $t$ tinzînd la $\pm\infty$. Ele sînt funcții periodice dacă $cc_h<0$.

Rezultă deci că pe varietatea universală de acoperire $V_{2p}(\lambda)$ geodezicele sînt pentru $c\neq 0$ curbe asemănătoare elicelor, rolul cercului la elice fiind luat aici de proiecția geodezicei în spațiul variabilelor $u^h$ și al variabilelor $v^h$ pentru care $cc_h<0$.

În varietatea $V_{2p}(\lambda)$ geodezica pentru care $c_1,\ldots c_h$, $c$ sînt diferite de zero, este o curbă închisă, pentru că $u_h$ sînt funcții periodice, iar $v^h$ sînt periodice sau cresc sau descresc cu un multiplu de $2\pi$. Dacă $c=0$, am văzut că ne putem reduce la cazul $c\neq 0$ printr-o schimbare de proiecție stereografică.

Dacă una din constantele $c_1,\ldots,c_h$ este nulă, de exemplu $c_1$, atunci $v^1$ este o funcție liniară de $t$,

$$v^1 = v_0^1 + ckt$$

iar $u^1$ este dat de formula

$$u^1 = a\ \sin\ (ckt-b)$$

unde $a$, $b$ sînt constante.

Considerînd în metrica (75) transformarea de variabile

$$x^{2i-1} = u^i \cos v^i,\quad x^{2i} = u^i \sin v^i$$

obținem

$$ds^2 = \frac{(dx^h)^2}{u} - k\frac{(x^h dx^h)^2 + w^2}{u^2} \tag{89''}$$

unde $w$ este forma simplectică în variabilele $x^h$. Rezultă deci că coordonatele $x^h$ ale geodezicelor sunt funcții periodice de variabila $t$, deci geodezicele sunt curbe închise.

Avem deci teorema:

*Geodezicele spațiului $V_{2p}(\lambda)$ cu $\lambda$ pozitiv, și $c_1,\ldots,c_p$, $c$ diferite de zero sînt curbe închise, una cel puțin din variabilele $v^h$ făcînd înconjurul cercului $C_h$ corespunzător.*

Presupunem acum că curba $k$ este negativă și că $c$ este diferit de zero. În acest caz rădăcinile $u_0$ și $u_1$ sînt de semne contrarii. Putem presupune deci că avem $u_0<0$ și $u_1>0$. Din ecuația (89) se vede că $u$ poate să varieze de la 0 la $u_1$ și înapoi, o singură dată, deoarece $u=0$ este o rădăcină dublă a polinomului din membrul al doilea a ecuației (86).

Observăm acum că, ținînd seama de relația (82'), formula (89) o scriem

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 4c^2k^2\,(u-u_0)\,(u_1-u). \tag{90}$$

Avem deci

$$t = \frac{1}{2ck}\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(u-u_0)\,(u_1-u)}} = \frac{1}{ck}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{u-u_0}{u_1-u}}\right)_0^u,$$

dacă presupunem că pentru $t=0$, avem $u=0$. Deci cînd $u$ variază de la 0 la $u_1$ și înapoi la zero, $t$ variază de la 0 la $T$, unde $T$ este dat de formula

$$T = \frac{1}{ck}\left[\pi - 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{-u_0}{u_1}}\right],$$

din care se vede că $T$ este mai mic ca o perioadă $\pi/ck$, iar dacă $-u_0<u_1$, constanta $a$ este pozitivă, $T$ este mai mic ca o jumătate de perioadă.

Rezultă deci că în cazul $k<0$ şi $c\neq 0$, în formulele (85′) $t$ variază numai între 0 şi $T$.

Proiecţia curbei în spaţiul variabilelor $u^i$ pleacă deci de la un punct al absolutului

$$u = 1 + k\left[(u^1)^2 + \ldots + (u^p)^2\right] = 0$$

şi revine într-un punct al aceluiaşi absolut. Consideraţii analoge se pot face pentru $k<0$ şi $c=0$ şi se regăsesc sub o altă formă rezultatele din capitolul II.

**§ 6. Polinomul lui Poincaré al spaţiului** $V_{2p}(\lambda.)$ Se ştie că, fiind dat un spaţiu închis omogen $V_n$, se numeşte după Elie Cartan, polinom al lui Poincaré, un polinom de grad $n$, al cărui coeficient de grad $n-p$ este egal cu numărul integralelor de diferenţiale totale exacte independente de grad $p$, integrale ce sînt în acelaşi timp invarianţi integrali [5].

Se ştie de asemenea că numărul acestor integrale independente este dat de numărul lui Betti de ordinul $p$.

În cazul spaţiului $V_{2p}(\lambda)$ cu curbură pozitivă, polinomul lui Poincaré este dat de formula

$$t^{2p} + t^{2p-2} + \ldots + t^2 + 1. \tag{91}$$

Într-adevăr, spaţiul $V_{2p}(\lambda)$ posedă un tensor strîmb simetric de ordinul al doilea, este tensorul covariantului biliniar al formei $w$ dat de formula (67′), covariant care se scrie

$$\Delta w = 2\rho_h\left(d\varphi_h\,\delta\rho_h - d\rho_h\,\delta\varphi_h\right).$$

Or, cum forma $w$ este un invariant al grupului (70‴), $\Delta w$ este de asemenea un invariant al acestui grup şi cum $\Delta w$ nu depinde de variabila $\varphi_{p+1}$, rezultă că $\Delta w$ este un invariant al grupului $G$ de mişcare al spaţiului $V_{2p}(\lambda)$. Cu ajutorul lui $\Delta w$ putem deci forma un invariant integral de grad 2 al spaţiului $V_{2p}(\lambda)$ cu curbură pozitivă. Prin înmulţire exterioară (strîmb simetrică) putem forma din $\Delta w$ alţi invarianţi de ordinul al patrulea, al şaselea etc. Din faptul că grupul $G$ este caracterizat prin aceea că lasă forma $w$ invariantă, rezultă că spaţiul $V_{2p}(\lambda)$ nu poate avea alţi invarianţi integrali, deci polinomul lui Poincaré este dat de formula (91).

## О КЛАССЕ ГОМОГЕННЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

### (КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Отыскание неприводимых римановых пространств, обладающих максимальной группой пресбразований на себя, приводит к классу симметрических пространств с четным числом $n = 2p$ измерений, обозначаемых через $V_{2p}$, обладающих транзитивной группой движения с $2p + p^2$ параметрами [2]. В настоящей работе покажем, что группа $G_{p2}$ стабильности пространства $V_{2p}$ обладает особым преобразованием и является наибольшей ортогональной группой, обладающей этим свойством. Отсюда вытекает, что в числе пространств, группа стабильности которых обладает явным преобразованием, пространство $V_{2p}$ обладает

максимальной группой движения. Далее покажем, что группа $G_{p^2}$ замкнута и состоит из особого преобразования и простой группы $G_{p^2-1}$ откуда согласно теореме Картана [3] вытекает, что группа движения $G_{2p+p^2}$ пространства $V_{2p}$ есть простая группа. Также вытекает замкнутость этой группы [4], следовательно, пространство $V_{2p}$ замкнуто, если кривая пространства положительна.

Далее рассматриваем нормальную базу особого преобразования и группу $G_{p^2-1}$ и, исходя из группы движения, находим составляющие тензора кривизны пространства $V_{2p}$, указанного выше [2].

Обозначая через

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \ldots, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$Y_s = X^{2s-1}\frac{\partial f}{\partial x^{2s}} - x^{2s}\frac{\partial f}{\partial x^{2s-1}}, \quad (s = 1, \ldots, p)$$

$$U_{hk} = x^{2h-1}\frac{\partial f}{\partial x^{2k-1}} - x^{2k-1}\frac{\partial f}{\partial x^{2h-1}} + x^{2h}\frac{\partial f}{\partial x^{2k}} - x^{2k}\frac{\partial f}{\partial x^{2h}},$$

$$V_{hk} = x^{2h-1}\frac{\partial f}{\partial x^{2k}} - x^{2k}\frac{\partial f}{\partial x^{2h-1}} + x^{2k-1}\frac{\partial f}{\partial x^{2h}} - x^{2h}\frac{\partial f}{\partial x^{2k-1}}$$

инфинитезимальные преобразования группы движения пространства $2p+p^2$, находим что образованные $X_i$ коммутаторы даны формулами

$$(X_{2s-1}, X_{2s}) = -2\lambda(Y_1 + \ldots Y_p) - 2\lambda Y_s; \tag{21}$$

$$(X_{2h-1}, X_{2k-1}) = (X_{2h}, X_{2k}) = -\lambda U_{hk}; \tag{22}$$

$$(X_{2h-1}, X_{2k}) = -(X_{2h}, X_{2h-1}) = -\lambda V_{hk}$$

В отношении ненулевых коммутаторов, образованных $X_i$, и преобразований группы стабильности $G_{p^2}$ получаем формулы

$$\begin{aligned}
&(X_{2s-1}, Y_s) = X_{2s}, \ (X_{2s}, Y_s) = -X_{2s-1},\\
&(X_{2s-1}, U_{sk}) = X_{2k-1}, \ (X_{2s}, U_{sk}) = X_{2k},\\
&(X_{2s-1}, V_{sk}) = X_{2k}, \ (X_{2s}, V_{sk}) = -X_{2k-1}
\end{aligned} \tag{23}$$

Структура $G_{p2}$ дана формулами (24). Если положить $m = \sqrt{-\lambda}$, то можно также показать, что преобразования

$$\begin{aligned}
&Z_1 = X_1, Z_2 = X_2 + 2mY_1 + mY_2 + \ldots + mY_p,\\
&Z_{2h-1} = X_{2h-1} + mU_{1h}, Z_{2h} = X_{2h} + mV_{1h} \ (h = 2, \ldots, p
\end{aligned} \tag{25}$$

составляют просто транзитивную группу пространства $V_{2p}$. Следовательно, пространство $V_{2p}$ обладает просто транзитивной группой движений и эта группа действительна, если кривизна $\lambda$ пространства отрицательна. Применяя такую просто транзитивную группу, покажем,

что метрику пространств $V_{2p}$ с отрицательной кривизной можно записать в канонической форме

$$ds = \frac{(dx^1)^2 + [dx^2 - m\,(x^{2h-1}\,dx^{2h} - x^{2h}\,dx^{2h-1})]^2}{4\,m^2\,(x^1)^2} + \frac{(dx^k)^2}{2mx^1}, \qquad (27')$$

где $4m^2$ есть кривизна плоской грани. Эта каноническая форма, в которой $x^1$ следует рассматривать положительным, причем гиперплоскость $x^1 = 0$, бесконечная для метрики (27′), совпадает в случае двух переменных $x^1$, $x^2$ с канонической формой поверхности с отрицательной постоянной кривизной Бельтрами.

Во второй части показывается, что дифференциальные уравнения геодезических метрики (27′) могут быть явно интегрируемы и тогда два случая будут подлежать рассмотрению в зависимости от того, являются или не являются геодезические решениями уравнения Пфаффа

$$dx^2 - m\,(x^{2h-1}\,dx^{2h} - x^{2h}\,dx^{2h-1}) = 0. \qquad (33'')$$

В первом случае конечные уравнения геодезических даны формулами

$$x^1 = a^2\,(1 - u^2),\ x^k = aa^k\sqrt{\frac{2}{m}}\,u + b^k\ (h = 3, \ldots, 2p),$$

$$x^2 = a\sqrt{2m}\,(b^{2h-1}\,a^{2h} - b^{2h}\,a^{2h-1})\,u + b, \qquad (34)$$

где в последней формуле находим сумму относительно $h$ 2 к $p$ и где $a$, $a^k$, $b^k$ $b$ суть константы, сумма квадратов $a^k$ которых равна единице.

Во втором случае, следовательно в общем случае, геодезические даны уравнениями

$$x^1 = \gamma\,\frac{\sin\varphi - \sin\alpha}{E - \sin\alpha} \qquad \left(\varepsilon = \pm 1, \gamma > 0, |\alpha| < \frac{\pi}{2},\ \varepsilon\alpha > 0\right),$$

$$x^{2h-1} = A_h \sin\varphi - B_h \cos\varphi + a^{2h}, \qquad (37)$$

$$x^{2h} = A_h \cos\varphi + B_h \sin\varphi + a^{2h}$$

$$x = \frac{\gamma\cos\varphi}{\varepsilon\sin\alpha} + m\cos\varphi\,(a^{2h-1}\,A_h + a^{2h}\,B_h)\,m\sin\varphi\,(\alpha^{2h-1}\,\beta_h - a^{2h}\,A_h) + \delta,$$

где $\gamma, \alpha, A_h, B_h, a^k, \delta$ суть константы, удовлетворяющие условию

$$A_2^2 + B_2^2 + A_3^2 + \ldots + B_p^2 = \frac{\gamma\sin\alpha}{m\,(\varepsilon - \sin\alpha)}.$$

Геодезические (34) и (37) сохраняют некоторые свойства геодезических поверхностей с постоянной кривизной, которые, как известно, являются для канонической формы Бельтрами ортогональными окружностями с прямой $x^1 = 0$.

Таким образом показываем, что каждая геодезическая пространства с отрицательной кривизной $\lambda$ исходит из точки гиперплоскости $x^1 = 0$ и возвращается к точке этой плоскости ортогонально этой гиперплоскости и что каждая гиперплоскость $x^1 = C$, где $C$ есть положительная константа, встречает геодезическую не больше чем в двух точках. Показываем также, что геодезические суть кривые с конечным расстоя-

нием в евклидовом пространстве $x^i$ и что через две точки $P_0(x_0^i)$, $P_1(x_1^i)$ проходит одна и только одна геодезическая.

Геодезическая дана формулами (34) или (37), согласно тому удовлетворяет или не удовлетворяет $P_0$, $P_1$ уравнению

$$x_1^2 - x_0^2 + \frac{m}{2}\left[x_1^{2h-1}\, x_0^{2h} - x_1^{2h}\, x_0^{2h-1}\right] = 0, \tag{49}$$

следовательно, согласно тому, являются или не являются они сопряженными в нулевой полярности, определенной уравнением (49).

В случае (34) геодезические являются дугами парабол с ортогональной осью в гиперплоскости $x^1 = 0$. В случае (37) геодезические являются эллиптическими дугами с центром под гиперплоскостью $x^1 = 0$, иначе говоря в области $x < 0$ евклидова пространства $x^i$; это означает, что геодезические (37) суть элиптические дуги меньше полуэллипса. В случае, если центр находится у начала координат $x^k$ $(k \geqslant 3)$, геодезические суть дуги окружности.

В третьем случае, исходя из факта [7], выявленного К. Телеманом, что $V_{2p}(x)$ может быть рассматриваемо неголономным многообразием на сферах $S_{2p+1}$ пространства $E_{2p+2}$, $2p + 2$ измерений, можно точно показать каким путем можно осуществить эту иммерсию и найти, применяя стереографическую проекцию сферы $S_p$ в $E_{p+1}$ метрику пространства $V_{2p}(\lambda)$, представленную в виде

$$ds^2 = \frac{(dz^1)^2 + \ldots + (dz^{2p})^2}{(1 + \lambda\rho^2)^2} - \frac{4\lambda\, w^2}{(1 + \lambda\rho^2)^4} \tag{72'}$$

обобщающую каноническую форму Римана для пространства с постоянной кривизной $k = 4\lambda$.

Применяя центральную проекцию сферы $S_p$ от $E_{p+1}$, рассматриваем эллиптические и гиперболические пространства $V_{2p}(\lambda)$, как полные многообразия с метрикой

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \ldots + (dx^{2p})^2}{u} - k\,\frac{(x^h\, dx^h)^2 + w^2}{u^2} \tag{89''}$$

где

$$u = 1 + k\left[(x^1)^2 + - (x^{2p})^2\right],$$

$$w = x^1\, dx^2 - x^2\, dx^1 + \ldots + x^{2p-1}\, dx^{2p} - x^{2p}\, dx^{2p-1}.$$

Рассматривая уравнения геодезических метрики (75), показываем, что они могут быть явно интегрируемы формулами (85') и (86') или формулами (87) и (87'), причем параметр $t$ связан с дугой $s$ формулой (82').

В случае, в котором $k$ есть положительное, покажем, что геодезические являются для замкнутого пространства $V_{2b}(\lambda)$ замкнутыми кривыми, причем по меньшей мере одна из координат $2v^i$ делает оборот соответствующего круга $C_i$. Для пространства покрытия $V_{2p}(\lambda)$ геодезические являются кривыми, аналогичными спиральным линиям.

Для геодезических пространств $V_{2p}(\lambda)$ с отрицательной кривизной находим представленные в другой форме результаты второго случая.

# SUR UNE CLASSE D'ESPACES RIEMANNIENS HOMOGÈNES

(RÉSUMÉ)

La recherche des espaces de Riemann irréductibles, qui possèdent un groupe maximum de transformations en eux-mêmes conduit à une classe d'espaces symétriques à nombre pair $n = 2p$ de dimensions qu'on désigne par $V_{2p}$, qui possèdent un groupe transitif de mouvement à $2 + p^2$ paramètres [2], Dans ce mémoire, on montre que le groupe $G_{p2}$ de stabilité de l'espace $V_{2p}$ possède une transformation distinguée et est le plus grand groupe orthogonal qui posséde cette propriété. Il en résulte que l'espace $V_{2p}$ possède le groupe de mouvement maximum, parmi les espaces dont le groupe de stabilité possède une transformation distinguée. On montre ensuite que le groupe $Gp^2$ est fermé et qu'il se compose de la transformation distinguée et d'un groupe $G_{p2-1}$ simple. Il en résulte, d'après un théorème de Cartan [3], que le groupe de mouvement $G_{2p+p2}$ de l'espace $V_{2p}$ est un groupe simple. Il en résulte aussi que ce groupe est fermé [4], donc l'espace $V_{2p}$ est fermé si la courbure de l'espace est positive.

On considère ensuite une base normale pour la transformation distinguée et le groupe $G_{p2-1}$, et l'on retrouve, en partant du groupe de mouvement, les composantes du tenseur de courbure de l'espace $V_{2p}$, que l'Auteur a données précédemment [2].

En désignant les $2p + p^2$ transformations infinitésimales du groupe de mouvement de l'espace par

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \ldots \; (i = 1, \ldots, n)$$

$$Y_s = x^{2s-1}\frac{\partial f}{\partial x^{2s}} - x^{2s}\frac{\partial f}{\partial x^{2s-1}} \; (s = 1, \ldots, p)$$

$$U_{hk} = x^{2h-1}\frac{\partial f}{\partial x^{2k-1}} - x^{2k-1}\frac{\partial f}{\partial x^{2h-1}} + x^{2h}\frac{\partial f}{\partial x^{2k}} - x^{2k}\frac{\partial f}{\partial x^{2h}}$$

$$V_{hk} = x^{2h-1}\frac{\partial f}{\partial x^{2k}} - x^{2k}\frac{\partial f}{\partial x^{2h-1}} + x^{2k-1}\frac{\partial f}{\partial x^{2h}} - x^{2h}\frac{\partial f}{\partial x^{2k-1}}$$

où les termes non écrits dans $X_i$ sont au moins du premier ordre dans les variables $x^i$, on trouve que les crochets formés par les $X_i$ sont donnés par les formules

$$(X_{2s-1}, X_{2s}) = 2\lambda (Y_1 + \ldots + Y_p) - 2\lambda Y_s \qquad (21)$$

$$(X_{2h-1}, X_{2k-1}) = (X_{2h}, X_{2k}) = -\lambda U_{hk} \qquad (22)$$

$$(X_{2h-1}, X_{2k}) = -(X_{2h}, X_{2k-1}) = -\lambda V_{hk}$$

En ce qui concerne les crochets non nuls formés par les $X_i$ et les transformations du groupe de stabilité $G_{p2}$, on a les formules

$$(X_{2s-1}, Y_s) = X_{2s}, (X_{2s}, Y_s) = -X_{2s-1}$$

$$(X_{2s-1}, U_{sk}) = X_{2k-1}, (X_{2s}, U_{sk}) = X_{2k} \qquad (23)$$

$$(X_{2s-1}, V_{sk}) = X_{2k}, (X_{2s}, V_{sk}) = -X_{2k-1}$$

En ce qui concerne la structure de $G_{p^2}$, elle est donnée par les formules (24). On montre aussi que les transformations

$$\begin{aligned} &Z_1 = X_1, Z_2 = X_2 + 2m\ Y_1 + mY_2 + \ldots + mY_p \\ &Z_{2h-1} = X_{2h-1} + m\ U_{1h}, Z_{2h} = X_{2h} + m\ V_{1h} \quad (h=2, \ldots, p) \end{aligned} \tag{25}$$

consituent un groupe simplement transitif de l'espace $V_{2p}$ si l'on pose $m=\sqrt{-\lambda}$. Donc l'espace $V_{2p}$ possède un groupe simplement transitif de mouvements et ce groupe est réel si la courbure $\lambda$ de l'espace est négative. En utilisant ce groupe simplement transitif, on montre que la métrique des espaces $V_{2p}$ à courbure négative s'écrit sous la forme canonique

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + [dx^2 - m\,(x^{2h-1}\,dx^{2h} - x^{2h}\,dx^{2h-1})]^2}{4m^2\,(x^1)^2} + \frac{(dx^k)^2}{2\,mx^1} \tag{27'}$$

$$(m = \sqrt{-\lambda})$$

où $4\lambda$ est la courbure d'une facette plane. Cette forme canonique, où l'on doit considérer $x^1$ comme positive, l'hyperplan $x^1 = 0$ étant l'infini pour la métrique (27'), coïncide dans le cas à deux variables $x^1$, $x^2$ avec la forme canonique d'une surface à courbure constante négative de Beltrami.

Dans la seconde partie du mémoire, on montre que les équations différentielles des géodésiques de la métrique (27') peuvent être intégrées explicitement, et l'on a deux cas à considérer suivant que les géodésiques sont solutions de l'équation de Pfaff ou non

$$dx^2 - m\,(x^{2h-1}\,dx^{2h} - x^{2h}\,dx^{2h-1}) = 0. \tag{33''}$$

Dans le premier cas, les équations finies des géodésiques sont données par les formules

$$\begin{aligned} &x^1 = a^2\,(1-u^2)\ ,\ x^k = aa^k\sqrt{\frac{2}{m}}\,u + b^k \quad (k=3, \ldots, 2p) \\ &x^2 = a\sqrt{2m}\,(b^{2h-1}\,a^{2h} - b^{2h}\,a^{2h-1})\,u + b \end{aligned} \tag{34}$$

où, dans la dernière formule, on fait la somme, par rapport à $h$, de 2 à $p$ et où $a$, $a^k$, $b^k$, $b$ sont des constantes, la somme des carrés des $a^k$ étant égale à l'unité.

Dans le second cas, donc le cas général, les géodésiques sont données par les équations

$$x^1 = \gamma\frac{\sin\varphi - \sin\alpha}{\varepsilon - \sin\alpha} \qquad \left(\varepsilon = \pm 1, \gamma > 0, |\alpha| < \frac{\pi}{2}, \varepsilon\alpha > 0\right) \tag{37}$$

$$x^{2h-1} = A_h \sin\varphi - B_h\cos\varphi + a^{2h-1}$$

$$x^{2h} = A_h\cos\varphi + B_h\sin\varphi + a^{2h}$$

$$x^2 = \frac{\gamma\cos\varphi}{\varepsilon - \sin\alpha} + m\cos\varphi\,(a^{2h-1}\,A_h + a^{2h}\,B_h) + m\sin\varphi\,(a^{2h-1}\,B_h - a^{2h}A_h) + \delta$$

où $\gamma, \alpha, A_h, B_h, a^k, \delta$ sont des constantes, les dernières satisfaisant à la condition

$$A_2^2 + B_2^2 + A_3^2 + \ldots + B_p^2 = \frac{\gamma \sin \alpha}{m(\varepsilon - \sin \alpha)} \tag{36''}$$

Les géodésiques (34) et (37) conservent certaines des propriétés des géodésiques des surfaces à courbure constante qui, pour la forme canonique de Beltrami, sont, comme on le sait, des cercles orthogonaux à la droite $x^1 = 0$.

On montre ainsi que chaque géodésique de l'espace à courbure négative $\lambda$ part d'un point de l'hyperplan $x^1 = 0$ et revient à un point de ce plan, orthogonalement à cet hyperplan, et que chaque hyperplan $x^1 = C$, où $C$ est une constante positive, rencontre la géodésique au plus en deux points. On montre aussi que les géodésiques sont des courbes à distance finie dans l'espace euclidien des $x^i$ et que par deux points $P_0(x_0^i)$, $P_1(x_1^i)$ passe une géodésique et une seule.

La géodésique est donnée par les formules (34) ou (37) suivant que $P_0, P_1$ satisfont ou non à l'équation

$$x_1^2 - x_0^2 + \frac{m}{2}\left[x_1^{2h-1} x_0^{2h} - x_1^{2h} x_0^{2h-1}\right] = 0 \tag{49}$$

donc suivant qu'ils sont ou non conjugués dans la polarité nulle, définie par l'équation (49).

Dans le cas (34), les géodésiques sont des arcs de paraboles ayant l'axe orthogonale à l'hyperplan $x^1 = 0$. Dans le cas (37), les géodésiques sont les arcs des ellipses dont le centre se trouve au-dessous de l'hyperplan $x^1 = 0$, autrement dit dans la région $x^1 < 0$, de l'espace euclidien des $x^i$, ce qui signifie que les géodésiques (37) sont des arcs d'ellipse inférieurs à une semi-ellipse. Dans le cas où le centre est à l'origine des coordonnées $x^k (k \geqslant 3)$, les géodésiques sont des arcs de cercle.

Dans le troisième chapitre, en partant du fait mis en évidence par C. Teleman [7] qu'une $V_{2p}(\lambda)$ peut être considérée comme une variété non holonome sur les sphères $S_{2p+1}$ de l'espace $E_{2p+2}$ à $2p+2$ dimensions, on montre explicitement comment on peut réaliser cette immersion et l'on trouve, en utilisant une projection stéréographique d'une sphère $S_p$ dans $E_{p+1}$, la métrique de l'espace $V_{2p}(\lambda)$ sous la forme

$$ds^2 \frac{(dz^1)^2 + \ldots + (dz^{2p})^2}{(1 + \lambda \rho^2)^2} - \frac{4\lambda [(w^2]^2}{(1 + \lambda \rho^2)^4} \tag{72'}$$

où $\rho^2 = (z^1)^2 + \ldots + (z^{2p})^2$, $w = z^1 dz^2 - z^2 dz^1 + \ldots + z^{2p-1} dz^{2p} - z^{2p} dz^{2p-2}$

qui généralise la forme canonique de Riemann pour les espaces à courbure constante $k = 4\lambda$.

En utilisant une projection centrale de la sphère $S_p$ de $E_{p+1}$, on considère les espaces $V_{2p}(\lambda)$, comme des variétés complètes à métrique

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \ldots + (dx^{2p})^2}{u} - k \frac{(x^h dx^h)^2 + w^2}{u^2} \tag{75}$$

où $u = 1 + k[(x^1)^1 + \ldots + (x^{2p})^2]$, $w = x^1 dx^2 - x^2 dx^1 + \ldots + x^{2p-1} dx^{2p} - x^{2p} dx^{2p-1}$

En considérent les équations des géodésiques de la métrique (75), on montre qu'elles peuvent être intégrées explicitement par les formules (85′) et (86′) ou les formules (87) et (87′), le paramètre $t$ étant lié à l'arc $s$ par la formule (82′).

Dans le cas où $k$ est positif, on montre que les géodésiques sont, pour l'espace $V_{2p}(\lambda)$ fermé, des courbes fermées, dont au moins l'une des coordonnées $v^i$ fait le tour du cercle correspondant $C_i$. Pour l'espace $V_{2p}(\lambda)$ de recouvrement, les géodésiques sont des courbes analogues aux hélices.

Pour les géodésiques des espaces $V_{2p}(\lambda)$ à courbure négative, on trouve, sous une autre forme, les résultats du deuxième chapitre.

## BIBLIOGRAFIE

1. Cartan E., Bull. de la Soc. Math. de France, 1926, t. 54. p. 214; 1927, t. 55, p. 114.
2. — Journal de Math., 1929, vol. 8, p. 4 — 5.
3. — Annali di Mat., 1927, t. IV, p. 211.
4. — Annales de la Soc. Pol., 1929, vol. 8, p. 181.
5. Egorov T. P., Dokladî Akademy Nauk, 1949, vol. 66, p. 793.
6. Teleman C., Studii și Cercetări Matematice, 1954, vol. V,
7. Vrănceanu G., Studii și Cercetări Matematice, 1953, vol. II, p. 63.
8. — Studii și Cercetări Matematice, 1953, t. IV, p. 122.
9. — Bul. Soc. de Științe, Cluj, 1932, t. VI, p. 429 — 445.
10. — Mémorial des Sci. Math., 1936, fasc. 76, p. 21 — 29.
11. — Lecții de geometrie diferențială, 1951, vol. II, p. 8, 15.
12. — Analele Romîno-Sovietice, Seria Mat.- Fiz., 1953, vol. 4 și 7, octombrie-decembrie, An. VI, seria III, p. 28 — 29.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul V, nr. 1—2, 1954

# ASUPRA UNUI INVARIANT PROIECTIV

DE

ALEXANDRU NICOLESCU

## Introducere

Lucrarea de faţă cuprinde trei părţi. In prima parte, se fac cîteva consideraţii asupra invariantului proiectiv al planului, $I_a$

$$I_a = \frac{MT_1^3}{r_1} : \frac{MT_2^3}{r_2}$$

în care $r_1$ şi $r_2$ sînt razele de curbură în punctele $T_1$ şi $T_2$ ale curbelor $C_1$, respectiv $C_2$, iar $M$ intersecţia tangentelor la cele două curbe în punctele $T_1$ şi $T_2$.

Vom arăta în primul rînd că expresia

$$J_a = I_a + \frac{1}{I_a}$$

este un invariant al grupului general proiectiv al planului, adică este neschimbată atît de omografiile, cît şi de corelaţiile din plan.

In al doilea rînd, vom arăta că transformarea lui Legendre [1])

$$L: \quad \begin{matrix} \overline{X} = y' & \overline{y}' = x \\ \overline{y} = xy' - y & \overline{y}'' = 1/y'' \end{matrix}$$

se dovedeşte a fi un instrument puternic în geometria diferenţială proiectivă a planului.

Consideraţiile făcute în jurul acestor două puncte de vedere impun studiul a două probleme, care joacă de altfel, în generalitatea lor, un rol important în geometria diferenţială: construcţia invarianţilor şi studiul grupului de transformări care lasă neschimbată o mulţime de varietăţi. Rezultatele sînt însă interesante prin faptul că cele două probleme sînt localizate asupra transformării lui Legendre, care n-a fost încă studiată suficient, deşi se bucură de proprietăţi deosebite şi asupra ecuaţiilor diferenţiale de ordinul II, unde se permite să se dea un suport geometric unei teoreme a lui Sophus Lie, privind echivalenţa a două ecuaţii diferenţiale de ordinul II.

---

[1]) După N. Teodorescu, *Ecuaţii diferenţiale* (curs litografiat, 1949—1950), p. 61.

Studiul intim al celor două probleme astfel localizate formează obiectul ultimelor două părţi ale lucrării de faţă.

## I. Invarianţii $I_a$ şi $J_a$

**1.** Considerăm invariantul proiectiv [1]

$$I_a = \frac{MT_1^3}{\gamma_1} : \frac{MT_2^3}{\gamma_2}, \tag{1}$$

în care $T_1$ şi $T_2$ sînt două puncte arbitrare pe curbele plane $C_1$ şi $C_2$, $\gamma_1$ şi $\gamma_2$ razele de curbură ale acestor curbe în punctele $T_1$ şi $T_2$, iar $M$ intersecţia tangentelor respective.

Un caz interesant al acestui invariant este atunci cînd curbele $C_1$ şi $C_2$ sînt tangente în punctul $T = T_1 = T_2$, iar punctul $M$ este luat pe tangenta comună: regăsim atunci teorema lui Memkhe-Schmidt:

*Raportul razelor de curbură din punctul de contact a două curbe plane tangente este un invariant proiectiv*

**2.** Se ştie [1] că expresia analitică a acestui invariant este

$$I_a = \frac{[(x_1 - x_2)\, y_2' - (y_1 - y_2)]^3\, y_1''}{[(x_1 - x_2)\, y_1'' - (y_1 - y_2)]^3\, y_2''} = \frac{[(x_1\, y_2' - y_1) - (x_2\, y_2' - y_2)]^2 \cdot y_1''}{[(x_1\, y_1' - y_1) - (x_2\, y_1' - y_2)]^3,\, y_2''}$$

Aplicînd invariantului $I_a$ astfel scris transformarea lui Legendre obţinem

$$\bar{I}_a = L(I_a) = \frac{[y_1'\, x_2 - (x_1\, y_1' - y_1) - y_2]^3 \cdot \dfrac{A}{y_1''}}{[y_1 - y_2'\, x_1 + (x_2\, y_2' - y_2)]^3 \cdot \dfrac{1}{y_2''}} = \frac{[(x_1 - x_2)\, y_1' - (y_1 - y_2)]^3\, y_2''}{[(x_1 - x_2)\, y_2' - (y_1 - y_2)]^3\, y_1''},$$

deci

$$\bar{I}_a = \frac{1}{I_a}$$

Din această egalitate se deduce că expresia

$$J_a = I_a + \frac{1}{I_a},$$

*este invariată de corelaţiile şi omografiile planului.* Intr-adevăr, invariaţia lui $J_a$ faţă de grupul omografiilor este o consecinţă a invarianţei lui $I_a$: iar dacă $C$ este o corelaţie oarecare, există o omografie $H$, astfel ca

$$C = HL,$$

$L$ fiind transformarea lui Legendre, vom avea atunci

$$C(J_a) = HL(J_a) = H[L(J_a)] = H(J_a) = J_a.$$

De altfel, am fi obţinut acelaşi rezultat dacă pentru $J_a$ am fi luat orice funcţie simetrică în $I_a$ şi $1/I_a$

$$F\left(I_a, \frac{1}{I_a}\right).$$

In particular, pentru două curbe plane tangente, cu razele de curbură $\gamma_1$ şi $\gamma_2$ în punctul lor de contact, obţinem invariantul grupului proiectiv general, corespunzînd invariantului proiectiv al lui Memkhe-Schmidt.,

$$I_a = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \cdot \gamma_2}.$$

**3.** Să considerăm acum invariantul $I_a$ în cazul cînd $T_1$ şi $T_2$ sînt două puncte pe o aceeaşi conică $C$. Cum există totdeauna o omografie care, păstrînd conica $C$, să schimbe punctele $T_1$ şi $T_2$ între ele, avem

$$\frac{MT_1^3}{\gamma_1} : \frac{MT_2^3}{\gamma_2} = \frac{MT_2^3}{\gamma_2} : \frac{MT_1^3}{\gamma_1} \qquad \text{sau} \qquad I_a = \frac{1}{I_a}$$

deci $I_a = 1$. De altfel, rezultatul era de aşteptat, deoarece conica este proiectiv echivalentă cu cercul la care avem, evident, $I_a = 1$. S-a obţinut astfel o relaţie clasică, datorită lui Demoulin, relativă la conice

$$\frac{MT_1^3}{\gamma_1} : \frac{MT_2^3}{\gamma_2} = 1.$$

Presupunînd conica raportată la tangenta şi normala din punctul $T_2$, în care raza de curbură o presupunem egală cu unitatea, deci

$$x_2 = 0,\ y_2 = 0,\ y_2' = 0,\ y_2'' = 1,$$

relaţia lui Demoulin ne dă ecuaţia diferenţială a conicelor osculatoare în origine, tangenta comună fiind axa $Ox$, iar curbura unitatea

$$\frac{y^3 y''}{(xy' - y)^3} = 1. \tag{2}$$

*Reciproc,* curbele care satisfac relaţiei lui Demoulin, redusă la forma canonică (2) sînt conice osculatoare în origine. Demonstrăm propoziţia integrînd ecuaţia diferenţială (2). Pentru integrare, aplicăm coordonatelor $x, y$ omologia exprimată prin formulele de transformare

$$\bar{x} = \frac{x}{y}, \quad \bar{y} = \frac{1}{y}, \quad \bar{y}' = \frac{y'}{xy' - y}, \quad \bar{y}'' = \frac{y^3 y''}{(xy' - y)^3};$$

ecuaţia (2) devine atunci

$$\bar{y}'' = 1,$$

care integrată, dă

$$2\bar{y} = \bar{x}^2 + a\bar{x} + b.$$

Curbele integrale ale ecuaţiei (2) vor fi atunci conicele

$$2y = x^2 + axy + by^2,$$

osculatoare în origine parabolei directoare a transformării lui Legendre

$$2y = x^2,$$

Ecuația (2) este un invariant relativ al transformării lui Legendre. De asemenea, ecuația

$$J_a = \text{const.}$$

este un invariant relativ al grupului general proiectiv al planului; ea exprimă o corespondență între punctele $T_1\,(x_1, y_1)$ și $T_2\,(x_2, y_2)$ a două curbe $y_1 = f_1(x_1)$, $y_2 = f_2(x_2)$, corespondența fiind neschimbată de orice omografie sau corelație a planului. Punctul $M$ de intersecție al tangentelor din $T_1$ și $T_2$ descrie o curbă care formează împreună cu curbele $C_1$ și $C_2$ un sistem invariant față de transformările grupului general proiectiv al planului.

*Observație.* Toate transformările făcute în scopul canonizării relației lui Demoulin: $I_a = 1$ au fost aplicate numai primului membru: putem deci afirma, făcînd o ușoară și evidentă modificare a condițiilor de canonizare, că forma canonică a invariantului $I_a$, relativ la două curbe oarecare, este

$$I_a = \frac{\overline{y_1''}}{y_2''}.$$

## II. Invarianții diferențiali ai transformării lui Legendre

Rezultatele arătate mai sus, deși cu un caracter proiectic general, au căpătat forme simple datorită transformării lui Legendre. Ne propunem acum să studiem această transformare, dînd o metodă de construcție a invarianților diferențiali — relativi și absoluți. Metoda folosită, care ne-a fost sugerată tocmai de rezultatele simple din rîndurile precedente, este valabilă pentru o transformare oarecare, în special dacă ea este involutivă.

1. Invarianți diferențiali absoluți. Pentru a fixa ideile, vom considera congruența de curbe definită de ecuația diferențială de primul ordin

$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

Exprimăm elementele liniare ale planului cu ajutorul noilor variabile

$$u = x + y' \,,\; v = y \,,\; w = xy' - v,$$

ceea ce este posibil dacă determinantul funcțional

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, y')} = x - y' \neq 0,$$

deci trebuie să excludem din considerațiile noastre cazul parabolelor supraosculatoare la infinit parabolei directoare

$$2y - x^2 = \text{const.}$$

Interpretînd variabilele $u, v, w$ drept coordonate carteziene ale unui punct în spațiul euclidian tridimensional, congruenței de curbe (3) îi va corespunde suprafața

$$S: \qquad u = x + f(x, y),\; v = y,\; w = x\,f(x, y) - y,$$

$x, y$ formînd un sistem de coordonate curbilinii pe varietate.

Transformării în plan a lui Legendre îi corespunde în spațiu simetria

$$\sigma: \qquad \overline{u} = u,\; \overline{v} = w,\; \overline{w} = v.$$

Prin urmare, construcţia invarianţilor transformării lui Legendre s-a redus la formarea invarianţilor simetriei $\sigma$; invarianţii suprafeţei $S$ faţă de această simetrie vor da invarianţii congruenţei (3). In particular, înlocuind în expresiile invarianţilor diferenţiali metrici ai suprafeţei $S$ variabilele $u$, $v$, $w$ prin valorile lor în $x$, $v$, $y'$, vom obţine invarianţii diferenţiali ai congruenţei (3) faţă de transformarea lui Legendre.

De asemenea, se obţin invarianţii diferenţiali ai unei curbe a congruenţei

$$F(x, y) = C_0, \tag{4}$$

considerînd invarianţii curbei $C_0$ pe suprafaţa S, curba $C_0$ fiind definită de aceeaşi ecuaţie (4).

Unghiul a două $C_1$, $C_0$ corespunzînd la două curbe integrale ale ecuaţiei diferenţiale (3), sau distanţa dintre două puncte situate pe aceste curbe, vor da invarianţi diferenţiali absoluţi, ataşaţi celor două curbe, analogi invariantului $J_a$.

2. Invarianţii diferenţiali relativi. Ecuaţia diferenţială (3) este invariată de transformarea lui Legendre, dacă suprafaţa $S$ are planul $v = w$, plan de simetrie; cu alte cuvinte, scriind ecuaţia (3) sub forma

$$u = \Phi(v, w),$$

condiţia de invarianţă cere ca funcţia $\Phi$ să fie simetrică în $v$ şi $w$.

De asemenea, o ecuaţie diferenţială de ordinul II este neschimbată în transformarea lui Legendre dacă scrisă sub forma

$$y'' = F(u, v, w),$$

funcţia $F$ satisface ecuaţiei funcţionale

$$1/F(u, w, v) = F(u, v, w).$$

In general, pentru a găsi invarianţii diferenţiali relativi de ordinul $n$, vom construi o serie de $n-1$ invarianţi absoluţi $I_2$, $I_3$, $I_4$, ... $I_a$ împreună cu variabilele $u$, $v$, $w$, folosind metoda arătată mai sus; invarianţii căutaţi vor fi de forma

$$I_n = F(u, v, w, I_2, I_3, I_4 \ldots I_{n-1}),$$

în care $F$ este o funcţie simetrică în $v$ şi $w$, condiţia fiind necesară şi suficientă.

*Exemplu.* Ecuaţia diferenţială de primul ordin

$$y' = x$$

se scrie sub forma simetrică în $v$ şi $w$: $u^2 - 4(v + w) = 0$, deci este invariantă de transformarea lui Legendre.

## III. Grupul $G$ de transformări care invariază o ecuaţie diferenţială de ordinul II

**1.** După o teoremă clasică a lui Sophus Lie (3), orice ecuaţie diferenţială de ordinul II, pe care o putem scrie sub forma normală

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{5}$$

poate fi dedusă din ecuaţia canonică

$$y'' = 0, \tag{6}$$

printr-o transformare de contact $\Gamma$ care trebuie determinată.

Teorema are o interperetare geometrică foarte simplă.

Curbele integrale ale ecuației (5) formează o familie cu doi parametri

$$\Phi(x, y ; C_1, C_2) = 0 \tag{7}$$

cu ajutorul parametrilor $C_1$, $C_2$, putem realiza o corespondență biunivocă și bicontinuă între curbele (7) și punctele planului $x$, $y$, presupunînd că $\Phi$ este o funcție uniformă și continuă în $C_1$ și $C_2$, în intervalul de valabilitate. Această corespondență $\Gamma'$ și transformarea $\Gamma$ care schimbă dreptele date de ecuația (6) în curbele date de ecuația (5), va fi dată de formula simbolică,

$$\Gamma = \Gamma' L,$$

$L$ fiind transformarea lui Legendre, sau o corelație oarecare, evident, $\Gamma$ este o transformare de contact.

Natura geometrică a problemei fiind astfel precizată, vom trece acum la determinarea formală a grupului $G$ de transformări care lasă neschimbată ecuația diferențială (5).

Transformările generele, care schimbă între ele curbele integrale ale ecuației diferențiale (5) se exprimă prin transformări între parametrii $C_1$, $C_2$ ai acestor curbe

$$\overline{C}_1 = \overline{C}_1(C_1, C_2)$$

$$\overline{C}_2 = \overline{C}_2(C_1, C_2).$$

Considerăm o transformare $\Gamma$ care face să corespundă fiecărui punct $(x, y)$ din plan, o curbă din familia (7), de exemplu transformarea care schimbă punctul $(x, y)$ în curba $C_1 = x$, $C_2 = y$. *Cu ajutorul transformării* $\Gamma$, *grupul* $G$ *este izomorf cu grupul* $L$, *al transformărilor punctuale, adică în scriere simbolică*

$$G = \Gamma \mathfrak{T} \Gamma^{-1}$$

Intr-adevăr, este ușor de văzut că orice transformare $T \in G$ lasă neschimbată ecuația diferențială (5) și, reciproc, dacă $T$ este o transformare care schimbă între ele curbele integrale ale ecuației diferențiale (5), atunci transformarea

$$P = \Gamma^{-1} T \Gamma \tag{8}$$

schimbă între ele punctele planului, adică este punctuală: $P \in \mathfrak{T}$. Inmulțind ambii membri ai relației (8) cu $\Gamma$, la stînga și cu $\Gamma^{-1}$ la dreapta, obținem

$$T = \Gamma P \Gamma^{-1}$$

deci: $T \in G$.

Grupul $G$ astfel atașat ecuației diferențiale (5), este un grup infinit conținînd transformări de contact biunivoce, exprimate prin funcții analitice de toate variabilele cuprinse, dacă grupul $\mathfrak{T}$ al transformărilor punctuale conține numai transformări analitice biunivoce, ceea ce noi vom presupune.

Vom demonstra acum că reciproc, fiind dat un grup $G$ de transformări de contact, izomorf cu grupul $\mathfrak{T}$

$$G = \Gamma \mathfrak{T} \Gamma^{-1}$$

$\Gamma$ fiind o transformare de contact, există o ecuație diferențială unică de al doilea ordin care să fie invariată de toate transformările grupului $G$.

Intr-adevăr, ecuaţia diferenţială a curbelor obţinute prin aplicarea transformării $\Gamma$ asupra punctelor planului, este evident neschimbată de transformările grupului $G$. Să presupunem că, înafară de această ecuaţie, mai există încă una, de acelaşi ordin, neschimbată de transformările grupului $G$, care se obţine aplicînd punctelor planului o transformare de contact $\Gamma$; avem atunci

$$\Gamma \mathfrak{T} \Gamma^{-1} = \Gamma' \mathfrak{T} \Gamma'^{-1}$$

sau, înmulţind membrii acestei relaţii la stînga cu $\Gamma'^{-1}$ şi la dreapta cu $\Gamma'$:

$$(\Gamma'^{-1}\Gamma)\ \mathfrak{T}\ (\Gamma^{-1}\Gamma') = \mathfrak{T}.$$

sau

$$(\Gamma'^{-1}\Gamma)\ \mathfrak{T}\ (\Gamma'^{-1}\Gamma)^{-1} = \mathfrak{T},$$

din această egalitate se vede că există o ecuaţie diferenţială de ordinul II neschimbată de toate transformările grupului $\mathfrak{T}$. Or, nu există nici o ecuaţie de ordinul II care să se bucure de această proprietate; este suficient să se observe că transformările

$$\bar{x} = x + a,\ \bar{y} = y + bx + c$$
$$\bar{x} = 1/x,\ \bar{y} = 1/y$$

nu pot schimba simultan o aceeaşi ecuaţie diferenţială de ordinul II, deoarece prima cere ca ecuaţia să fie independentă de $x, y, y'$, adică să fie de forma

$$y'' = \text{const.}$$

care nu este păstrată de cea de a doua transformare.

**2.** Transformarea $\Gamma$ care schimbă punctele planului în curbele (7) nu este unică; fie $\Gamma^x$, încă o transformare asemănătoare. Din relaţia evidentă

$$\Gamma^{-1}\Gamma^x \in \mathfrak{T}$$

deducem că mulţimea transformărilor $\Gamma$ formează o clasă de resturi ale descompunerii grupului transformărilor de contact prin grupul $\mathfrak{T}$, la dreapta [1]). Se ştie atunci că [2]) toate transformările $\Gamma$, se deduc dintr-o aceeaşi transformare $\Gamma^x$ prin relaţia

$$\Gamma = \Gamma^x \mathfrak{T}$$

Prin urmare, ataşînd fiecărei ecuaţii de ordinul II, grupul corespunzător $G$, se constituie o descompunere în clase a grupului transformărilor de contact.

**3.** Vom da acum cîteva exemple care vor ilustra mai bine consideraţiile făcute în rîndurile precedente.

*a*) Grupul $G_0$ care păstrează dreptele planului.

Luăm drept coordonate ale dreptei, ordonate urmei ei pe axa $Oy$: $xy' - y$ şi coeficientul unghiular $y'$. Formulele care exprimă o transformare între dreptele planului vor fi

$$T: \quad \bar{x}\bar{y}' - \bar{y} = f(xy' - y, y'),$$
$$\bar{y}' = g(xy' - y, y'),$$

[1]) După Dan Barbilian, *Algebra Axiomatică* (curs litografiat Fac. Mat. Buc. 1947—1948, p. 154 — 56.

[2]) Idem, p. 155 — 56.

Transformarea $T$ este de contact deoarece, efectuînd asupra elementelor liniare $(x,y,y')$ transformarea lui Legendre, se obține transformarea punctuală

$$P: \quad \begin{aligned} \bar{x} &= g(y, x) \\ \bar{y} &= f(y, x) \end{aligned}$$

și deci: $T = LPL^{-1} = LPL$. Am arătat de fapt că grupul $G_0$ se exprimă simbolic: $G_0 = L\mathfrak{P}L$.

*Subgrupul punctual al grupului $G^0$ este grupul omografiilor.* Într-adevăr, dacă transformarea $T$ este punctuală, $y'$ și $xy'-y$ se exprimă omografic în raport cu $y'$, adică

$$\bar{y}' = \frac{\alpha y' + \beta (xy' - y) + \gamma}{\alpha'' y' + \beta'' (xy' - y) + \gamma''}$$

$T$:

$$\bar{x}\bar{y}' - \bar{y} = \frac{\alpha' y' + \beta' (xy' - y) + \gamma'}{\alpha_1'' y' + \beta_1'' (xy' - y) + \gamma_1''}$$

unde coeficienții $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ sînt constanți. Transformările avînd un caracter dual, prin definiție, natura lor nu se schimbă dacă efectuăm, asupra variabilelor cuprinse, transformarea lui Legendre: se obține atunci transformarea

$$\bar{X} = \frac{\alpha X + \beta Y + \gamma}{\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma''}$$

$$Y = \frac{\alpha' X + \beta' Y + \gamma'}{\alpha_1'' X + \beta_1'' Y + \gamma_1''}$$

Se deduce acum imediat că: $\alpha'' = \alpha_1''$, $\beta'' = \beta_1''$, $\gamma'' = \gamma_1''$ abstracție făcînd de un coeficient de proporționalitate. Am verificat astfel o propoziție cunoscută.

*b*) Să aplicăm acum rezultatele precedente pentru determinarea grupului de transformări care lasă neschimbate ecuația diferențială integrată în prima parte a lucrării

$$\frac{y^3 y''}{(xy' - y)^3} = 1.$$

Am găsit pe o cale directă că această ecuație este neschimbată de transformarea lui Legendre. Tot direct se găsește ușor că este lăsată neschimbată de grupul omografiilor

$$\bar{x} = \frac{ax + by}{\alpha x + \beta y + \frac{a^2}{2}}, \qquad \bar{y} = \frac{y}{\alpha x + \beta y + \frac{a^2}{2}}.$$

Aceste omografii au punctele unite confundate cu originea axelor de coordonate. Ele formează împreună cu transformarea lui Legendre un grup proiectiv mixt.

Pentru a găsi efectiv grupul transformărilor punctuale şi de contact, vom folosi transformarea raţională pătratică involutivă dată de formulele [2]

$$Q: \qquad \bar{x} = \frac{-2xy}{x^2 - 2y}, \qquad \bar{y} = \frac{2y^2}{x^2 - 2y}$$

care transformă dreptele planului în conicele osculatoare în origine parabolei $x^2 - 2y = 0$. Grupul transformărilor de contact ataşat acestei ecuaţii este deci

$$g = Q\ (L\mathfrak{T}L)Q^{-1} = QL\mathfrak{T}LQ,$$

având subgrupul punctual

$$p = Q\mathcal{H}Q,$$

$\mathcal{H}$ fiind grupul cu 8 parametri al omografiilor din plan.

Acelaşi grup $G$ are ca invariant absolut, expresia lui $J_a$ canonizată

$$J_a = \frac{y^3 y''}{(xy' - y)^3} + \frac{(xy' - y)^3}{y^3 y''},$$

deoarece orice transformare a grupului, ori nu schimbă expresia lui $I_a$ din primul membru al ecuaţiei, ori o transformă în $1/I_a$.

## О ПРОЕКТИВНОМ ИНВАРИАНТЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении изучается проективный инвариант

$$I_a = \frac{MT_1^3}{\gamma_1} : \frac{MT_2^3}{\gamma_2},$$

обобщающий инвариант Мемке-Шмита, приводящий к теореме Демулена.

В первой части указывается, что любая симметрическая функция $F(I_a, 1/I_a$

$$F\left(I_a, \frac{1}{I_a}\right) = F\left(\frac{1}{I_a}, I_a\right)$$

есть абсолютный инвариант проективной общей группы плоскости.

Изучаемые здесь геометрические соотношения выявляют особую роль преобразования Лежандра в проективной геометрии плоскости.

Во второй части дается метод образования дифференциальных инвариантов этого преобразования.

Последняя часть работы посвящена формальному определению группы $G$ аналитических двузначных преобразований, инвариирующих дифференциальное уравнение второго порядка. Находят, что группа образована из контактных и в некоторых случаях точечных преобразований, представленных в виде

$$G = \Gamma\, \Sigma\, \Gamma^{-1},$$

причем $\Gamma$ есть контактное преобразование, а $\Sigma$ есть группа точечных двунепрерывных и двузначных преобразований.

# UN INVARIANT PROJECTIF

(RÉSUMÉ)*

**Dans ce travail on étudie l'invariant projectif:**

$$I_a = \frac{MT_1^3}{\gamma_1} : \frac{MT_2^3}{\gamma_2}$$

qui généralise l'invariant de Memkhe-Schmidt. On retrouve le théorème de Demoulin sur les coniques.

On montre ensuite que toute fonction $F(I_a, 1/I_a)$ symétrique

$$F\left(I_a, \frac{1}{I_a}\right) = F\left(\frac{1}{I_a}, I_a\right)$$

est un invariant absolu du groupe général projectif du plan.

Les relations géométriques qui interviennent dans ces considérations mettent en évidence le rôle spécial de la transformation de Legendre dans la géométrie projective du plan. Dans la seconde partie du travail, on donne une méthode de construction des invariants différentiels de cette transformation. Enfin, la dernière partie est consacrée à la détermination formelle du groupe $G$ des transformations biunivoques, analytiques, qui laissent invariante une équation différentielle du deuxième ordre. On trouve que le groupe $G$ contient les transformations de contact, de la forme suivante:

$$G = \Gamma \mathfrak{T} \Gamma^{-1}$$

ou $\Gamma$ est une transformation de contact et $\mathfrak{T}$, le groupe des transformations ponctuelles, bicontinues et biunivoques.

## BIBLIOGRAFIE

1. Nicolescu A., Bul. Soc.. Mat., 1945 – 1946, vol. 4, p. 35.
2. Salmon G., *Géométrie Analytique*. Courbes planes. Gauthiers Villars, Paris, 1912, vol. II.
3. Vrănceanu G., *Lecții de geometrie diferențială*. Ed. Acad. R.P.R., 1953, vol.I.

## LISTA COMUNICĂRILOR ŢINUTE ÎN CADRUL INSTITUTULUI DE MATEMATICĂ ÎN ANUL 1953

1. N. DINCULEANU, *Despre limite generalizate*, 6 ianuarie 1953.
2. CAIUS IACOB, *Asupra teoriei mişcărilor conice*, 13 ianuarie 1953.
3. MARCUS SOLOMON, *Contribuţii la o analiză calitativă a funcţiilor reale*, 20 ianuarie 1953.
4. ROMULUS CRISTESCU, *Teoria ergodică în spaţii funcţionale*, 20 ianuarie 1953.
5. GR. C. MOISIL, *Asupra congruentelor faţă de un modul neprim*, 27 ianuarie 1953.
6. A. HALANAY, *Despre ecuaţiile diferenţiale liniare cu coeficienţi aproape periodici*, 3 februarie 1953.
7. G. MARINESCU, *Asupra prelungirii funcţionalelor liniare în spaţiile vectoriale topologice*, 10 februarie 1953.
8. FELIX ALBRECHT, *Mulţimi Baire de caracteristică* $\mu$, 17 februarie 1953.
9. MARCUS SOLOMON, *Derivata calitativă*, 10 martie 1953.
10. S. VASILACHE, *Asupra rezolvării ecuaţiilor cu diferenţe finite prin calculul simbolic* 17 martie 1953.
11. GR. C. MOISIL, *O caracterizare geometrică a transformărilor pseudo-conforme*, 24 martie 1953.
12. IVAN SINGER, *Teoremele medii pentru sisteme de funcţii*, 24 martie 1953.
13. S. VASILACHE, *Asupra unor noi condiţii la limită pentru ecuaţiile cu derivate parţiale de tip polihiperbolic*, 14 aprilie 1953.
14. RADU BĂDESCU, *Asupra unei ecuaţii integro-funcţionale*, 21 aprilie 1953.
15. GH. VRĂNCEANU, *Asupra unei clase de spaţii riemanniene*, 28 aprilie 1953.
16. ARISTIDE HALANAY, *Soluţii periodice pentru ecuaţia oscilaţiilor neliniare*, 5 mai 1953.
17. I. BARBĂLAT, *Soluţii periodice şi soluţii mărginite pentru anumite ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul II*, 12 mai 1953.
18. SERGIU VASILACHE, *Asupra repartiţiei spaţiale a cîmpului electro-magnetic, cînd se introduc mase fieromagnetice în anumite regiuni din spaţiu, într-un cîmp electro-magnetic preexistent*, 19 mai 1953.
19. G. MARINESCU, *Aspectul algebric al unor ecuaţii funcţionale liniare*, 9 iunie 1953.
20. S. STOILOV, *Funcţiile analitice de variabilă complexă în lucrările acad. D. Pompeiu*, 6 octombrie 1953.
21. N. TEODORESCU, *Derivata areolară şi ecuaţiile cu derivate parţiale, în legătură cu lucrările acad. D. Pompeiu*, 13 octombrie 1953.
22. AL. FRODA, *Funcţiile de variabilă reală, în lucrările acad. D. Pompeiu*, 20 octombrie 1953.
23. GR. C. MOISIL, *Extensiunile ideii de derivată areolară în legătură cu lucrările acad. D. Pompeiu*, 27 octombrie 1953.
24. T. GANEA, *Distanţe între mulţimi introdusă de acad. D. Pompeiu*, 10 noembrie 1953.
25. GH. MARINESCU *Cercetări şi sugestii asupra ecuaţiilor diferenţiale şi funcţionale în lucrările acad. D. Pompeiu*, 10 noiembrie 1953.

26. GR. C. MOISIL, *O definiție a numerelor ideale*, 17 noiembrie 1953.
27. N. TEODORESCU, *Perturbație, corpuscul și undă în teoria invariantă a propagării undelor*, 1 decembrie 1953.
28. EDMOND NICOLAU, *O proprietate a sistemelor diferențiale autoadjuncte*, 8 decembrie 1953.
29. VALENTIN POENARU, *Cîteva propoziții de topologia planului*, 15 decembrie 1953.

925 907

F762

KAI

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

Institut de Documentare Tehnică
BUCUREȘTI
OBMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

# STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

Országos Mérésügyi Könyvtár
BUDAPEST

3-4

ANUL V

IULIE - DECEMBRIE 1954

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

Országos Műszaki
Könyvtár
TULAJDONA

# STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

3-4

ANUL V

IULIE - DECEMBRIE 1954

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

*COMITETUL DE REDACȚIE*

Academician D. POMPEIU – Redactor responsabil

A. HALANAY — Redactor adjunct; Academician S. STOILOV; GH. MIHOC; N. TEODORESCU; G. VRĂNCEANU

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

# STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul V, nr. 3—4 iulie — decembrie 1954

SUMAR

Pag.

MIRON NICOLESCU, Ecuaţia iterată a căldurii . . . . . 243

CAIUS IACOB, Asupra mişcării unei plăci plane paralel cu solul într-un curent fluid variabil cu înălţimea . . . . . 333

NICOLAE CIORĂNESCU, O clasă de ecuaţii liniare cu derivate parţiale de ordinul al doilea, integrabile prin sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare ordinare . . . . . 351

MARCEL N. ROŞCULEŢ, O teorie a funcţiilor de o variabilă hipercomplexă în spaţiul cu trei dimensiuni . . . . . 361

MARIUS I. STOKA, Asupra geometriei gonometrice a familiilor de cercuri 403

S. MARCUS, Funcţiile lui Pompeiu . . . . . 413

DIMITRIE POMPEIU . . . . . 421

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

# ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome V, no. 3—4 juillet — décembre 1954

## SOMMAIRE

Page

MIRON NICOLESCU, L'équation itérée de la chaleur . . . . . 243

CAIUS IACOB, Sur le mouvement parallèle au sol d'une plaque plane dans un courant fluide variable avec la hauteur . . . . . 333

NICOLAE CIORĂNESCU. Une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, intégrables à l'aide d'un système d'équations différentielles ordinaires . . . . . 351

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Une théorie des fonctions d'une variable hypercomplexe dans l'espace à trois dimensions . . . . . 361

MARIUS I. STOKA, Sur la géométrie goniométrique des familles de cercles . 403

S. MARCUS, Les fonctions de Pompeiu . . . . . 413

DIMITRIE POMPEIU . . . . . 421

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том V, № 3—4 Июль—декабрь 1954

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

М. НИКОЛЕСКУ, Итерированное уравнение теплопроводности ..... 243

К. ЯКОБ, О движении параллельно земной поверхности плоской пластины в изменяющемся с высотой течении жидкости ..... 333

Н. ЧОРЭНЕСКУ, Класс линейных уравнений с частными производными второго порядка, интегрируемых при помощи системы ординарных дифференциальных уравнений ..... 351

М. Н. РОШКУЛЕЦ, О теории функций гиперкомплексной переменной в трехмерном пространстве ..... 361

М. И. СТОКА, О гониометрической геометрии семейств кругов ..... 403

С. МАРКУС, Функции Помпею ..... 413

ДИМИТРИЕ ПОМПЕЮ ..... 421

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul V, nr. 3—4, 1954

# ECUAŢIA ITERATĂ A CĂLDURII

DE

MIRON NICOLESCU

MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

## Introducere

Prin ecuaţia iterată a căldurii înţelegem ecuaţia cu derivate parţiale de ordinu $2p$ în $n+1$ variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$,

$$\left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^{(p)} = 0, \tag{I}$$

unde

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Această ecuaţie n-a făcut, pînă acum, obiectul unui studiu amănunţit. Ea a fost menţionată în anul 1950 de către academicianul Gr. C. Moisil în cadrul unei liste destul de mari de ecuaţii care n-au făcut încă obiectul atenţiei matematicienilor. În «Théorie des distributions» de Laurent Schwartz [1], se găseşte aceeaşi ecuaţie, ca exemplu, între alte exemple, de aplicare a metodelor acestei teorii pentru găsirea unei soluţii «elementare»; şi atîta tot.

În ultimii doi ani, ne-am ocupat de studiul acestei ecuaţii, obţinînd un număr de rezultate care ne-au condus la redactarea acestei lucrări.

Unele dintre aceste rezultate au fost predate studenţilor din anul IV, în cadrul unui curs special de ecuaţia căldurii, în anii 1951 — 1953. Altele au fost comunicate verbal în şedinţele ştiinţifice ale Institutului de matematică sau ale Universităţii. Toate apar, pentru prima oară, în această lucrare.

Pentru evitarea lungimilor în scris şi în vorbire, mi-am permis să introduc o notaţie nouă, punînd

$$\square = \Delta - \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\square' = \Delta + \frac{\partial}{\partial t},$$

precum şi o terminologie nouă, numind funcţii policalorice de ordinul $p$, soluţiile regulate ale ecuaţiei (I). Funcţiile policalorice de ordinul 1, adică soluţiile ecuaţiei căldurii, vor fi numite, pe scurt, funcţii calorice.

Nu știu dacă această denumire este cea mai nimerită. Ceea ce este important este faptul că mulțimea și caracterul proprietăților soluțiilor ecuației (I) care le apropie atît de mult de funcțiile poliarmonice, le dă din plin dreptul de a fi deosebite printr-o denumire specială.

Lucrarea este împărțită în șase capitole.

În afară de primul capitol ne-am mărginit peste tot, pentru simplicitatea calculelor, la cazul unei singure variabile spațiale.

În primul capitol dăm pentru funcțiile policalorice o dezvoltare de tip Almansi, atașînd astfel în mod unic fiecărei funcții policalorice de ordinul $p$ un sistem ordonat de $p$ funcții calorice.

Această proprietate ne permite să arătăm cu ușurință că o funcție policalorică $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ este analitică în raport cu $x_1, x_2, \ldots x_n$ (variabilele spațiale) și de clasa 2, în sensul lui Holmgren, în raport cu $t$ (variabila temporală).

Capitolele II și III sînt consacrate extensiunilor cunoscutei formule a lui Poisson la funcțiile policalorice de ordinul $p$. Această extensiune se poate face în două direcții.

I. Se poate cere să se determine funcția $u(x, t)$ policalorică de ordinul $p$ în banda

$$0 < t < t_1,$$

cunoscîndu-se valorile pe care $u$ și derivatele parțiale succesive $\frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{p-1} u}{\partial t^{p-1}}$ le iau pe axa $Ox$;

II. Se poate cere să se determine $u(x, t)$ cunoscîndu-se valorile pe care această funcție și operatorii succesivi $\Delta u, \Delta^2 u, \ldots, \Delta^{p-1} u$ le iau pe axa $Ox$.

Am rezolvat ambele probleme, dînd și formulele *efective* corespunzătoare.

În rezolvarea primei probleme am întîmpinat dificultăți destul de mari în ceea ce privește verificarea soluției, dificultăți pe care le-am putut trece dînd acestei soluții o formă simbolică apropriată. Această problemă este, desigur, destinată să aibă aplicații în fizică. În schimb, problema a doua, mult mai ușor de rezolvat, are o deosebită importanță teoretică prin posibilitatea unei treceri la limită care ne conduce la o noțiune nouă, noțiunea de *analiticitate parabolică*. Un paragraf al Capitolului III este consacrat acestei noțiuni.

Capitolul IV este consacrat problemelor la limită pentru domeniile mărginite. Cititorul familiarizat cu problemele privitoare la ecuația căldurii știe că este vorba de domenii limitate între două segmente de caracteristice $t = t_0$, $t = t_1$, $(t_0 < t_1)$, și de două arce de curbă de tipul

$$x = \gamma_1(t), \quad x = \gamma_2(t), \quad (\gamma_1(t) < \gamma_2(t)).$$

Un prim tip de problemă, pe care l-am tratat pînă la capăt numai pentru funcțiile bicalorice, este următorul:

Să se determine o funcție $u(x, t)$, definită în interiorul unui domeniu de tipul descris mai sus, bicalorică în interiorul acestui domeniu, cunoscînd valorile pe care $u$ și $\frac{\partial u}{\partial t}$ le iau pe latura inferioară $t = t_0$ a domeniului precum și valorile pe care $u$ și $\frac{\partial u}{\partial x}$ le iau pe cele două arce laterale.

Am arătat că această problemă conduce la un sistem de *patru* ecuații liniare de tip Volterra, ecuații pe care le-am formal.

În acest scop, am fost nevoiți să facem un studiu prealabil al unei funcții pe care am numit-o *potențialul bicaloric*, cu ajutorul căreia am putut pune în ecuație problema enunțată.

Un al doilea tip de problemă corespunde problemei II de mai sus:

Să se determine o funcție $u(x, t)$, definită în interiorul unui domeniu de tipul descris, policalorică în interiorul acestui domeniu, cunoscînd valorile pe care șirul de funcții

$$u, \Delta u, \Delta^2 u, \ldots, \Delta^{p-1} u,$$

le ia pe latura inferioară ca și pe cele două arce laterale.

Pentru rezolvarea acestei probleme, a trebuit să rezolvăm cîteva probleme intermediare.

În primul rînd, am extins formula lui Green pentru ecuația căldurii la funcțiile policalorice de un ordin oarecare.

Acest lucru ne-a reușit numai grație unei scrieri simbolice inspirate de lucrările din ultimii ani ale academicianului Gr. C. Moisil [2].

În al doilea rînd, am introdus funcțiile lui Green pentru ecuația iterată a căldurii și am studiat proprietățile acestei funcții.

În sfîrșit, cu ajutorul acestor funcții, am reușit să dăm soluția concretă, în termeni finiți, a problemei enunțate.

Capitolul V, care servește ca pregătire capitolului următor, se ocupă cu studiul integralei

$$v(x, t; h) = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, t-h) \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}} d\xi,$$

considerată ca funcție de $h$. Această integrală se obține din integrala lui Poisson prin schimbarea argumentului $t$ în $t-h$ în funcția $u$. Rezultatul fundamental al acestui capitol este că această funcție de $h$ este derivabilă în origine de un număr de ori depinzînd de proprietățile funcției $u$ și avem

$$\left(\frac{\partial^p v(x, t; h)}{\partial h^p}\right)_0 = \Delta^p u(x, t),$$

dacă $u$ admite derivate parțiale continue pînă la ordinul în care intervin în compunerea operatorului $\Delta^p u$.

În particular, dacă $u$ este o funcție policalorică de ordinul $p$, atunci $v$ este un polinom de gradul $p-1$ în $h$.

Este, poate, interesant să arătăm cum am fost conduși la această integrală. Se cunoaște formula lui Poisson, care ne dă valoarea unei funcții calorice $u$ într-o bandă $(t_0, t_1)$ atunci cînd cunoaștem valorile acestei funcții pe dreapta $t = t_0$,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-t_0)}} \cdot \frac{u(\xi, t_0)}{\sqrt{t-t_0}} d\xi.$$

Într-un Memoriu din anul 1937, [3] consacrat ecuației căldurii, am avut ideea să lăsăm punctul $(x, t)$ fix și să variem dreapta $t = t_0$, bineînțeles numai cu condiția $t_0 < t$.

Atunci integrala din membrul al doilea va conţine pe $t_0$ ca parametru variabil Punînd $t - t_0 = h$, formula lui Poisson se scrie

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4h}} \cdot u(\xi, t - h) \cdot d\xi.$$

Formula lui Poisson, sub această nouă formă, exprimă tocmai faptul că membrul al doilea din formula precedentă *nu* depinde de $h$ în cazul în care $u$ este o funcţie calorică.

Dar dacă $u$ *nu* este o funcţie calorică, membrul al doilea al formulei precedente este o funcţie determinată de $h$. Studiul acestei funcţii de $h$ constituie tocmai obiectul Capitolului V şi formează baza teoriei dezvoltate în Capitolul VI.

Capitolul VI, ultimul capitol al lucrării, revine la studiul proprietăţilor de structură ale unei funcţii policalorice de un ordin oarecare $p > 1$, într-o bandă infinită $0 < t < t_1$.

La baza acestui studiu am pus o teoremă de medie pe care am stabilit-o graţie proprietăţilor demonstrate în capitolul precedent.

Ceva mai mult, am arătat că dacă funcţia $u$ îndeplineşte o anumită condiţie de creştere pentru $x \to \infty$, proprietatea de medie enunţată *caracterizează* funcţiile policaloríce. După cum am subliniat în cuprinsul lucrării, acest fapt este important, pentru că permite caracterizarea funcţiilor calorice printr-o relaţie integrală, mult mai uşor de mînuit în calcul. Ca exemplificare, am pus în evidenţă cîteva proprietăţi ale funcţiilor policalorice, care se obţin foarte uşor pe această cale: extensiunea teoremei lui Liouville, formularea unei teoreme de tip Harnack pentru şirurile de funcţii policalorice, un criteriu de compacitate pentru familiile de astfel de funcţii.

În ultimul § al Capitolului VI introducem noţiunea de *funcţie subcalorică de ordinul p*. Pentru $p = 1$, această noţiune a fost utilizată de W. Sternberg [4] şi pusă clar în evidenţă de I. G. Petrowski [5].

În § 3 al Capitolului VI dăm, de altfel, o altă definiţie funcţiilor subcalorice (de ordinul I) şi arătăm legătura acestor funcţii cu funcţiile «subparabolice» ale lui I. G. Petrowski.

Cu tot materialul pe care îl conţine lucrarea de faţă, mu te probleme n-au putut fi aprofundate, din motive diferite.

Una din aceste probleme este, de pildă, problema analiticităţii parabolice privită în legătură cu analiticitatea clasică şi cu analiticitatea hiperbolică de care ne-am ocupat într-o lucrare anterioară [6]. În toate aceste trei probleme este vorba, în fapt, de un acelaşi fenomen matematic.

Analiticitatea unei funcţii de o variabilă reală revine la posibilitatea desfăşurării acestei funcţii într-o serie de puteri ale unei funcţii particulare (în speţă $x$, sau $x - a$), coeficienţii fiind constante, adică soluţii ale ecuaţiei

$$\frac{du}{dx} = 0.$$

Analiticitatea hiperbolică a unei funcţii de două variabile reale înseamnă posibilitatea desfăşurării acestei funcţii într-o serie de puteri ale unei funcţii particulare (în speţă $(x - a)(y - b)$, sau $xy$), coeficienţii fiind soluţii ale ecuaţiei

$$Du = 0,$$

unde

$$Du(x, y) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{u(x + h, y + k) - u(x + h, y) - u(x, y + k) + u(x, y)}{hk}.$$

Analiticitatea obișnuită a funcțiilor de două sau mai multe variabile reale este o proprietate pe care o posedă soluțiile ecuației

$$\Delta u = 0,$$

ca și ale ecuației iterate [7]

$$\Delta^p u = 0.$$

N. I. Ciorănescu [8] a arătat, însă, că orice funcție analitică de două sau mai multe variabile reale poate fi desfășurată într-o serie de puteri ale lui $r^2$ (unde $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$), coeficienții fiind soluții ale ecuației

$$\Delta u = 0,$$

adică funcții armonice. Acest rezultat important care dă dreptul funcțiilor analitice (în sens obișnuit) de două sau mai multe variabile reale să se numească eliptic (sau mai exact: armonic) analitice, stabilește o anumită solidaritate între cele trei noțiuni: *de fiecare dată*, funcția particulară $f$ care intervine în desfășurarea în serie prin puterile sale succesive este astfel încît

$$f = 0$$

constituie ansamblul liniilor caracteristice corespunzătoare operatorului diferențial considerat, iar coeficienții desfășurării sînt soluții ale ecuației obținute egalînd acest operator cu zero.

Acest lucru sugerează un studiu general al unei «analiticități» în raport cu un operator diferențial dat, studiu care ar îngloba într-o singură teorie cele trei cazuri amintite mai sus.

Într-o altă ordine de idei, pentru stabilirea teoremei de medie din ultimul capitol, am fost nevoiți să presupunem că, în banda considerată, atît funcția $u$ cît și operatorii succesivi $\Delta u$, $\Delta u^2$, ..., $\Delta^{p-1} u$ sînt majorați de o aceeași funcție de tipul $M.e^{Kx^2}$.

Dar membrul al doilea al formulei de medie [formula (7) de la punctul 49] se poate construi numai în ipoteza $|u| < M.e^{Kx^2}$. Este suficientă această ipoteză pentru a deduce formula de medie considerată? Nu am reușit să răspundem la această întrebare. Rezolvarea problemei formulate aici, într-un sens sau în altul, ar constitui un fapt important în teoria funcțiilor policalorice.

În sfîrșit, nu ne-am ocupat de loc în această lucrare de problema singularităților funcțiilor calorice sau policalorice.

Cititorul va găsi, desigur, și alte probleme care merită să fie aprofundate. Faptul acesta a constituit îndemnul cel mai puternic pentru terminarea redactării acestei lucrări, în cadrul în care se află.

## Capitolul I

## COMPONENTELE CALORICE ALE UNEI FUNCȚII POLICALORICE

**1.** Fie $u(x, y, t)$ o funcție definită într-un anumit domeniu $D$ al spațiului $(x, y, t)$. Vom pune

$$\Delta^0 u = u, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$$

şi în general

$$\Delta^p u = \Delta(\Delta^{p-1}), \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Vom spune că $u(x, y, t)$ este *polic[illegible]lorică de ordinul p* în domeniul $D$, dacă $u(x, y, t)$ posedă toate derivatele parţiale care intră în definiţia lui $\Delta^p$, dacă aceste derivate parţiale sînt continue în $D$ şi dacă ecuaţia

$$\Delta^p u = 0$$

este verificată în orice punct al lui $D$.

În acest capitol vom arăta că funcţii[illegible] policalorice au o structură foarte simplă, asemănătoare în multe privinţe structu[illegible] funcţiilor poliarmonice. Pentru aceasta vom avea nevoie, însă, să stabilim cîtev[illegible] formule preliminarii privitoare la operatorul iterat $\Delta^p$.

**2.** Avem, pentru o funcţie *oarecare* $u$

$$\Delta(tu) = [illegible]\Delta u - u$$

apoi

$$\Delta^2(tu) = \Delta(t\Delta u) - [illegible]\Delta u = t\Delta^2 u - 2\Delta u.$$

Prin recurenţă, deducem formula [illegible]nerală

$$\Delta^{p+1}(tu) = t\Delta^{p+1}[illegible] - (p+1)\Delta^p u. \tag{1}$$

O consecinţă imediată a acestei for[illegible]ule este următoarea:

*Produsul prin t al unei funcţii polic[illegible]lorice de ordinul p este o funcţie policalorică de ordinul* $p+1$.

**3.** Să aplicăm formula precedentă [illegible]rodusului $t^k \cdot u$, unde $k$ este un număr natural mai mare decît 1. Avem, în primu[illegible] rînd,

$$\Delta^{p+1}(t^2 u) = t\Delta^{p+1}([illegible]) - (p+1)\Delta^p(tu),$$

de unde, aplicînd formula (1) ambilor ter[illegible]meni din membrul doi,

$$\Delta^{p+1}(t^2 u) = t^2\Delta^{p+1}u - 2t(p[illegible]1)\Delta^p u + (p+1)p\cdot\Delta^{p-1}u.$$

Un raţionament prin recurenţă ne [illegible]onduce la formula generală

$$\Delta^{p+1}(t^k u) = t^k\Delta^{p+1}u - C_k^1 t^{k-1}(p[illegible]1)\Delta^p u + \tag{2}$$

$$+ C_k^2 t^{k-2}\cdot(p+1)p\cdot\Delta^{p-1}u - \ldots. + (-[illegible])^k (p+1)p\ldots(p-k+2)\Delta^{p-k+1}u.$$

Bineînţeles, în această formulă, toţ[illegible] termenii conţinînd factorul $\Delta^{p-i}$ pentru care $i > p$ sînt nuli.

Vom obţine astfel de termeni atunci [illegible]şi numai atunci cînd $k > p+1$.

Formula precedentă se poate scrie şi [illegible]sub forma condensată

$$\Delta^{p+1}(t^k u) = ([illegible] - \Delta^{p+1}u)^{(k)} \tag{2'}$$

unde puterea simbolică $k$ are înţelesul urmă[illegible]or: binomul $t - \Delta^{p+1}u$ se ridică la puterea $k$ după regula lui Newton, cu urm[illegible]ătoarea convenţie

$$(\Delta^{p+1}u)^0 = \Delta^{p+1}u, \quad (\Delta^{p+1}u)^{(i)} = (p+[illegible])\,p\,(p-1)\ldots(p-i+2)\Delta^{p-i+1}u,$$

$$(i = 1, 2, [illegible]\ldots, k).$$

**4.** Teorema fundamentală de reprezentare a funcțiilor policalorice. *Fiind dată o funcție $u(x, y, t)$, policalorică de ordinul $p$ într-un domeniu $D$, există $p$ funcții*

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{p-1},$$

*calorice în $D$, astfel încît să avem*

$$u = u_0 + tu_1 + t^2u_2 + \ldots + t^{p-1}u_{p-1} \tag{3}$$

*identic în $D$. Aceste funcții sînt determinate în mod unic.*

*Demonstrația unicității.* Vom arăta, în primul rînd, că nu pot exista *două* sisteme de funcții $u_i$ pentru care identitatea (3) să aibă loc. Într-adevăr, în caz contrar ar trebui să avem, identic în $D$,

$$0 \equiv u_0 + tu_1 + t^2u_2 + \ldots + t^{p-1}u_{p-1}, \tag{4}$$

cu un sistem de funcții calorice $u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_{p-1}$ nu toate identic nule. Or, acest lucru este absurd. Într-adevăr, să aplicăm ambilor membri ai identității (4) operatorul $\Delta^{p-1}$, ținînd seama de relația fundamentală (2), scrisă pentru $p-1$. Obținem

$$0 \equiv (-1)^k \cdot (p-1)!\, u_{p-1},$$

de unde $u_{p-1} \equiv 0$. Identitatea (4) devine

$$0 \equiv u_0 + tu_1 + \ldots + t^{p-2}u_{p-2}.$$

Aplicînd ambilor membri ai acestei identități operatorul $\Delta^{p-2}$, obținem $u_{p-2} \equiv 0$ și așa mai departe.

Așadar, toți coeficienții diverselor puteri ale lui $t$ din membrul doi al identității (4) sînt identic nuli.

Identitatea se reduce, atunci, la $u_0 \equiv o$: cu aceasta unicitatea reprezentării (3) este stabilită.

*Demonstrația existenței.* Vom demonstra, acum, existența unui sistem de funcții $u_i$ prin inducție, presupunînd teorema adevărată pentru $p-1$. În baza acestei ipoteze, există un sistem de $p-1$ funcții calorice

$$v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_{p-2}$$

astfel încît să avem

$$\Delta u = v_0 + tv_1 + t^2v_2 + \ldots + t^{p-2}v_{p-2}$$

identic în $D$, deoarece $\Delta u$ este, evident, policalorică de ordinul $p-1$.

Dacă există un sistem de $p$ funcții $u_i$, $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$, astfel încît relația (3) să aibă loc, atunci, prin aplicarea operatorului $\Delta$ ambilor membri și utilizarea formulei (2), obținem

$$\Delta u = -u_1 - 2tu_2 - \ldots - (p-1)\,t^{p-2}\,u_{p-1}.$$

Deducem, în baza unicității, stabilite mai sus,

$$u_1 = -v_0,\ u_2 = -\frac{1}{2}v_1,\ \ldots,\ u_{p-1} = -\frac{1}{p-1}v_{p-2} \tag{5}$$

Funcţiile calorice $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ fiind determinate de aceste formule (5), să punem, atunci,

$$u_0 = u - (tu_1 + t^2 u_2 + \ldots + t^{p-1} u_{p-1}). \tag{6}$$

Se verifică imediat că $u_0$ este o funcţie calorică.

Într-adevăr, avem, aplicînd formula (2),

$$\Delta\,(t^{p-i}\,u_{p-i}) = t^{p-i}\,\Delta\,u_{p-i} - (p-i)\,t^{p-i-1}\,u_{p-i} = -(p-i)\,t^{p-i-1}\,u_{p-i},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p-1),$$

de unde

$$\begin{aligned}\Delta\,u_0 &= \Delta\,u + [u_1 + 2tu_2 + \ldots + (p-1)\,t^{p-2}\,u_{p-1}]\\ &= \Delta\,u - (v_0 + tv_1 + \ldots + t^{p-2}\,v_{p-2})\\ &= 0.\end{aligned}$$

Formulele (5) şi (6) demonstrează teorema de existenţă. Cu aceasta, teorema de reprezentare este complet demonstrată.

Funcţiile calorice

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots,\ u_{p-1}$$

ataşate, prin această teoremă, în mod unic funcţiei $u$, vor fi numite *componente calorice* ale lui $u$.

**5.** Aplicarea repetată a formulelor (5) şi (6) ne dă mijlocul de a construi *efectiv* componentele calorice

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots,\ u_{p-1}$$

atunci cînd funcţia $u$ este dată. Într-adevăr, să însemnăm, în general, cu

$$v_0^i,\ v_1^i,\ \ldots,\ v_{i-1}^i$$

cele $i$ componente calorice ale funcţiei $\Delta^{p-i}\,u$, policalorice de ordinul $i$. Formula (2) ne dă, în primul rînd,

$$\Delta^{p-1}\,u = (-1)^{p-1}.\,(p-1)\,!\,u_{p-1},$$

de unde

$$u_{p-1} = (-1)^{p-1}.\,\frac{\Delta^{p-1}\,u}{(p-1)\,!}.$$

Avem, apoi,

$$\Delta^{p-2}\,u = v_0^2 + t\,v_1^2,$$

de unde, aplicînd formulele (5) şi (6) pentru cazul particular $p = 2$,

$$v_0^2 = \Delta^{p-2}\,u + t\,\Delta^{p-1}\,u,\ v_1^2 = -\Delta^{p-1}\,u.$$

Funcţia $\Delta^{p-3}\,u$ este tricalorică, deci

$$\Delta^{p-3}\,u = v_0^3 + tv_1^3 + t^2\,v_2^3,$$

de unde, aplicînd formulele (5) și (6) pentru cazul particular și ținînd seama de rezultatele deja obținute,

$$\varphi_1^3 = -\varphi_0^2 = -(\Delta^{p-2} u + t\,\Delta^{p-1} u),$$

$$\varphi_2^3 = -\frac{1}{2}\varphi_1^2 = \frac{1}{2}\Delta^{p-1} u,$$

$$\varphi_0^3 = \Delta^{p-3} u - t\,\varphi_1^3 - t^2\varphi_2^3 = \Delta^{p-3} u + \frac{t}{1}\Delta^{p-2} u + \frac{t^2}{2}\Delta^{p-1} u.$$

Vom arăta că avem, în general,

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_0^i = \Delta^{p-i} u + \frac{t}{1}\Delta^{p-i+1} u + \frac{t^2}{2!}\Delta^{p-i+2} u + \ldots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\Delta^{p-1} u,\\
&\varphi_1^i = -\frac{1}{1!}\left(\Delta^{p-i+1} u + \frac{t}{1}\Delta^{p-i+2} u + \ldots + \frac{t^{i-2}}{(i-2)!}\Delta^{p-1} u\right),\\
&\varphi_2^i = \frac{1}{2!}\left(\Delta^{p-i+2} u + \frac{t}{1}\Delta^{p-i+3} u + \ldots + \frac{t^{i-3}}{(i-3)!}\Delta^{p-1} u\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{i-1}^i = \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\Delta^{p-1} u.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Într-adevăr, presupunînd adevărate formule scrise, formulele (5) ne dau

$$\varphi_k^{i+1} = -\frac{1}{k}\varphi_{k-1}^i = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\Delta^{p-i-1+k} u + \frac{t}{1}\Delta^{p-i+k} u + \right.$$

$$\left. + \frac{t^2}{2!}\Delta^{p-i+k+1} u + \ldots + \frac{t^{i-k}}{(i-k)!}\Delta^{p-1} u\right),$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots, i),$$

de unde

$$\varphi_0^{i+1} = \Delta^{p-i-1} u - t\,\varphi_1^{i+1} - t^2\varphi_2^{i+1} - \ldots - t^i\varphi_i^{i+1}$$

$$= \Delta^{p-i-1} u + \frac{t}{1}\Delta^{p-i} u + \frac{t^2}{2!}\Delta^{p-i+1} u + \ldots + \frac{t^i}{i!}\Delta^{p-1} u.$$

Deci formulele (7) sînt adevărate și pentru $i + 1$.
În particular, pentru $i = p$, obținem

$$\left.\begin{aligned}
&u_0 = u + \frac{t}{1}\Delta u + \frac{t^2}{2!}\Delta^2 u + \ldots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\Delta^{p-1} u,\\
&u_1 = -\frac{1}{1!}\left(\Delta u + \frac{t}{1}\Delta^2 u + \ldots + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}\Delta^{p-1} u\right),\\
&u_2 = \frac{1}{2!}\left(\Delta^2 u + \frac{t}{1}\Delta^3 u + \ldots + \frac{t^{p-3}}{(p-3)!}\Delta^{p-1} u\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{p-1} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\Delta^{p-1} u.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Aceste formule rezolvă problema determinării componentelor calorice ale unei funcţii policalorice date de ordinul $p$. Se observă că toate aceste componente se exprimă *liniar* în funcţie de $u$ şi de operatorii $\Delta u$, $\Delta^2 u, \ldots, \Delta^{p-1} u$.

Trebuie să facem aici observarea importantă că toate formulele şi teoremele acestui punct rămîn valabile dacă se înlocuieşte $t$ prin $t - t_0$.

Aşa, de pildă, funcţia policalorică $u$, de ordinul $p$, fiind dată, există un sistem şi unul singur de $p$ funcţii calorice

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$$

astfel încît să avem

$$u = u_0 + (t - t_0) u_1 + (t - t_0)^2 u_2 + \ldots + (t - t_0)^{p-1} u_{p-1}. \tag{3'}$$

Aceste funcţii se determină cu ajutorul formulelor ce se obţin din (8), schimbînd pe $t$ în $t - t_0$.

**6.** Să considerăm funcţia liniară *)

$$\lambda(x, t) = ax + bt + c. \tag{9}$$

Avem, pentru o funcţie oarecare $u(x, t)$,

$$\square(\lambda u) = \lambda \square u + 2a \frac{\partial u}{\partial x} - bu, \tag{10}$$

de unde rezultă imediat, întrebuinţînd raţionamentul prin recurenţă, că produsul printr-o funcţie liniară $\lambda(x, t)$ a unei funcţii policalorice de ordinul $i$ este o funcţie policalorică de ordinul $i + 1$. Se pune atunci următoarea întrebare: date fiind funcţia $u(x, t)$, policalorică de ordinul $p$, şi funcţia liniară $\lambda(x, t)$, există $p$ funcţii calorice

$$u_0(x, t), u_1(x, t), \ldots, u_{p-1}(x, t)$$

astfel încît să avem

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \lambda u_1(x, t) + \ldots + \lambda^{p-1} u_{p-1}(x, t) \tag{11}$$

dentic în $D$?

Răspunsul este afirmativ şi poate fi justificat. Însă, în general, nu mai avem *unicitatea* desfăşurării. Este suficient să considerăm cazul $p = 2$.

*Vom arăta, anume, că există două funcţii $u(x, t)$ şi $v(x, t)$ calorice în $D$, astfel încît să avem, identic în $D$,*

$$u_0(x, t) - \lambda(x, t) \cdot u_1(x, t) \equiv 0.$$

Într-adevăr, vom determina, în primul rînd, o funcţie $u_1$ calorică în $D$, astfel încît produsul $\lambda u_1$ să fie tot o funcţie calorică. Din identitatea (10) deducem, ţinînd seama că $u_1$ este calorică şi că produsul $\lambda u_1$ este tot o funcţie calorică,

$$2a \frac{\partial u_1}{\partial x} - bu_1 = 0,$$

*) Pentru simplitatea calculelor ne mărginim, în acest punct, la cazul unei singure variabile spaţiale.

deci $u_1$ este de forma

$$u_1(x, t) = \varphi(t) \cdot e^{\frac{b}{2a}x}.$$

Funcția $\varphi(t)$ se determină prin condiția ca să avem $\square u_1 = 0$. Găsim

$$\varphi(t) = k\, e^{\frac{b^2}{4a^2}t},$$

$k$ fiind o constantă arbitrară. Așadar,

$$u_1(x, t) = k\, e^{\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}t},$$

de unde

$$u_0(x, t) = -k(ax + bt + c) \cdot e^{\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}t}.$$

Din expresia funcțiilor $u_0$ și $u_1$, ca și din rezultatele obținute mai sus, rezultă că, cel puțin în cazul $p = 2$, *avem unicitatea dezvoltării* (11) *dacă și numai dacă* $a = 0$, adică tocmai în cazul studiat pe larg mai sus.

Rezultatul poate fi, de altfel, extins prin recurență la cazul $p > 2$. El justifică astfel și mai mult denumirea de componente calorice pe care le-am dat funcțiilor $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ din desfășurările (3) sau (3′).

**7.** Se știe că o funcție calorică $u(x, y, t)$, regulată *) în domeniul $D$, se bucură de următoarele proprietăți:

1° este indefinit derivabilă în acest domeniu;

2° în orice porțiune a unui plan paralel cu planul $xOy$, conținută în $D$, este analitică în raport cu $(x, y)$;

3° de-a lungul oricărui segment paralel cu axa $Ot$, conținut în $D$, este de clasa 2 în $t$, în sensul lui Holmgren (conf. de exemplu [9] **).

Vom arăta că aceste trei proprietăți aparțin și unei funcții policalorice:

Teoremă. (A doua teoremă de structură). *Orice funcție* $u$, *policalorică de ordinul* $p$ *în domeniul* $D$, *este*: 1° *indefinit derivabilă în* $D$; 2° *analitică în raport cu* $(x, y)$; 3° *de clasa* 2 *în raport cu* $t$.

Fie, într-adevăr, $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ componentele calorice ale lui $u$. Proprietățile 1°, 2°, 3° aparțin fiecăreia din aceste componente. Din formula (3′) rezultă imediat că funcția $u$ se bucură de proprietățile 1° și 2°.

Pentru demonstrarea proprietății 3°, reamintim că suma a două funcții de clasa 2 este o funcție de clasa 2. Va fi suficient deci, în baza formulei (3′), să arătăm că funcția

$$w = (t - t_0)^k \rho$$

unde $\rho$ este o funcție calorică, iar $k$ un număr natural, este o funcție de clasa 2 în $t$, în punctul $t_0$.

---

*) Adică având derivatele $\frac{\partial u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial u}{\partial t}$ continue în $D$.

**) p. 314.

Într-adevăr, potrivit formulei lui Leibniz, avem, pentru $n \geqq k$,

$$\left(\frac{\partial^n \omega}{\partial t^n}\right)_{t=t_0} = C_n^k \cdot k! \left(\frac{\partial^{n-k} \rho}{\partial t^{n-k}}\right)_{t=t_0} = \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{\partial^{n-k} \rho}{\partial t^{n-k}}\right)_{t=t_0}. \tag{12}$$

Dar, $\rho$ fiind de clasa 2 în $t$, avem

$$\left| \left(\frac{\partial^{n-k} \rho}{\partial t^{n-k}}\right)_{t=t_0} \right| < \frac{M \cdot (2n-2k)!}{r^{n-k}}, \tag{12'}$$

$M$ şi $r$ fiind două constante pozitive, independente de $t_0$. Să punem

$$M_1 = M \cdot r^k.$$

Atunci, din formulele (12) şi (12') deducem

$$\left| \left(\frac{\partial^n \omega}{\partial t^n}\right)_{t=t_0} \right| < \frac{n!\,(2n-2k)!}{(n-k)!} \cdot \frac{M_1}{r^n}.$$

Dar este evident că

$$\frac{n!}{(n-k)!} < \frac{(2n)!}{(2n-2k!)}.$$

Formula precedentă devine

$$\left| \left(\frac{\partial^n \omega}{\partial t^n}\right)_{t=t_0} \right| < \frac{M_1 \cdot (2n)!}{r^n}.$$

Aşadar $\omega$ este o funcţie de clasa 2 în raport cu $t$, în punctul $t_0$, deci în orice punct.

## Capitolul II

# PRIMA EXTENSIUNE A FORMULEI LUI POISSON LA FUNCŢIILE POLICALORICE

## § 1. Cazul funcţiilor bicalorice

8. Fie $u$ o integrală a ecuaţiei

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(2)} u = 0. \tag{1}$$

regulată într-o anumită bandă $0 < t \leqq t_1$.

Potrivit unui rezultat obţinut în capitolul precedent, se pot determina în mod unic două funcţii calorice $u_0$ şi $u_1$ astfel încît să avem

$$u = u_0 + t u_1 \tag{2}$$

identic în banda considerată.

Vom căuta, acum să rezolvăm următoarea problemă:

*Fie $\varphi(x)$ o funcție definită pe dreapta reală, de două ori derivabilă, cu derivata a doua continuă.*

*Fie, de asemenea, $\psi(x)$ o funcție continuă pe dreapta reală. Presupunem că funcțiile $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ verifică inegalitățile*

$$|\varphi(x)| < M\, e^{Kx^2}, \quad |\psi(x)| < M\, e^{Kx^2},$$

*unde $K < \frac{1}{4t_1}$. Să se găsească o funcție $u(x, t)$, bicalorică în banda considerată și astfel încît să avem*

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = \varphi(x), \tag{3}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \psi(x). \tag{3'}$$

**9.** Pentru rezolvarea acestei probleme, vom proceda astfel: vom căuta funcția $u$ sub forma (2), adică vom căuta funcțiile *calorice* $\varphi$ și $\psi$ astfel încît funcția $u$, dată prin formula (2), să verifice condițiile *inițiale* (3), (3'). Vom proceda, într-o primă etapă, în mod formal, presupunînd toate calculele legitime, după care vom verifica soluția obținută.

Din (2) și (3) deducem că trebuie să avem

$$\lim_{t \to 0} u_0(x, t) = \varphi(x),$$

deci $u_0(x, t)$ este dată de formula lui Poisson

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi. \tag{4}$$

Se știe că, pentru a putea scrie formula precedentă, este suficient să presupunem funcția $\varphi$ mărginită pe toată dreapta sau, mai general, că verifică o inegalitate de forma

$$|\varphi(x)| < M\, e^{Kx^2}$$

ceea ce noi am presupus de la început.

Integrala din membrul doi al formulei (4) este, în acest din urmă caz, uniform convergentă în banda

$$0 < t < \frac{1}{4K} < t_1,$$

împreună cu toate derivatele în raport cu parametrii $x$, $t$. Dacă $\varphi$ este mărginită, atunci $K = 0$ și integrala este uniform convergentă în întreg semiplanul $t > 0$.

Din (4) deducem

$$\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{4\sqrt{\pi t^{3/2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi + \tag{5}$$

$$+ \frac{1}{8\sqrt{\pi t^{5/2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\xi)^2 \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi.$$

Să derivăm, acum, relaţia (2) în raport cu $t$. Obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + t\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1. \tag{6}$$

Funcţia

$$\rho = \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_1 \tag{7}$$

este, evident, calorică. Deci (6) se poate scrie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho + t\frac{\partial u_1}{\partial t}, \tag{6'}$$

cu $\rho$ şi $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ calorice. Din (3') şi (6') deducem

$$\lim_{t \to 0} \rho(x, t) = \psi(x),$$

de unde, aplicînd încă odată formula lui Poisson,

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi. \tag{8}$$

Din (6), (5) şi (8) deducem

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi + \tag{9}$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{\pi t^{3/2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi - \frac{1}{8\sqrt{\pi t^{5/2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\xi)^2 \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi.$$

Ţinînd seama de (4) şi (9), formula (2) devine

$$u(x, t) = \frac{3}{4\sqrt{\pi t^{1/2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi +$$

$$+ \frac{t^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4}}\, d\xi - \tag{10}$$

$$- \frac{1}{8\sqrt{\pi t^{3/2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\xi)^2 \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi.$$

Aceasta este formula căutată. Ea constituie o extensiune a formulei lui Poisson la funcţiile bicalorice.

Vom arăta mai jos, în cadrul problemei generale, că funcţia dată de această formulă verifică condiţiile iniţiale date.

**10.** Să presupunem, în formula (10), că avem

$$\varphi(x) = 0, \ \psi(x) = 0, \text{ pentru } x < a, \text{ sau } x > b, \ (a < b).$$

Formula (10) devine

$$u(x, t) = \frac{3}{4\sqrt{\pi}t^{1/2}} \int_a^b \varphi(\xi)\, e^{\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi + \\ + \frac{t^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}} \int_a^b \psi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi - \\ - \frac{1}{8\sqrt{\pi}t^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\xi)^2\, \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi. \tag{11}$$

Este evident că $u(x, t)$ este bicalorică pentru $t > 0$ și că vom avea

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = \begin{cases} \varphi(x), \text{ dacă } x \in (a, b), \\ 0, \text{ dacă } x > b, \text{ sau } x < a, \end{cases}$$

$$\lim \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \begin{cases} \psi(x), \text{ dacă } x \in (a, b), \\ 0, \text{ dacă } x > b, \text{ sau } x < a. \end{cases}$$

Se poate arăta, urmînd aceeași metodă ca cea pe care o vom dezvolta mai jos, că avem

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x), \text{ dacă } x = a, \text{ sau } x = b, \tag{12}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\psi(x), \text{ dacă } x = a, \text{ sau } x = b. \tag{12'}$$

Această observație ne va fi utilă mai tîrziu.

## § 2. Cazul general

**11.** Problema de la punctul 8 se poate extinde la funcțiile policalorice de ordin $p > 2$.

Fie

$$\varphi_0(x), \ \varphi_1(x), \ldots, \ \varphi_{p-1}(x)$$

$p$ funcții continue pe dreapta reală și astfel încît să avem

$$|\varphi_i(x)| < M e^{Kx^2}, \ (i = 0, 1, \ldots, p-1),$$

$M$ și $K$ fiind două constante pozitive. Să se determine o funcție $u(x, t)$, policalorică de ordinul $p$ în banda $\left(0, \frac{1}{4K}\right)$, astfel încît să avem

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = \varphi_0(x), \tag{13}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} = \varphi_k(x), \quad (k = 1, 2, \ldots, p-1), \tag{13'}$$

Ca şi în cazul particular dezvoltat mai sus, vom căuta funcţia $u(x, t)$ sub forma

$$u(x, t) = u_0(x, t) + t\, u_1(x, t) + \ldots + t^{p-1} u_{p-1}(x, t), \tag{14}$$

$u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ fiind funcţii calorice pe care le vom determina astfel încît condiţiile iniţiale (13), (13') să fie îndeplinite.

Din (14) deducem, în mod formal,

$$\lim_{t\to 0} u_0(x, t) = \varphi_0(x),$$

deci

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi. \tag{15}$$

Vom proceda, atunci, prin inducţie: presupunînd componentele calorice

$$u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$$

determinate, vom arăta că putem determina componenta $u_k$.

Într-adevăr, din (14) deducem imediat

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} = v_0(x, t) + t\, v_1(x, t) + \ldots + t^{p-1} v_{p-1}(x, t), \tag{16}$$

$v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}$ fiind funcţii calorice. Expresia lui $v_0$, singura care ne interesează aici se găseşte imediat

$$v_0(x, t) = \frac{\partial^k u_0}{\partial t^k} + k \frac{\partial^{k-1} u_1}{\partial t^{k-1}} + k(k-1) \frac{\partial^{k-2} u_2}{\partial t^{k-2}} + \ldots + k!\, u_k \tag{17}$$

Singurul termen necunoscut în membrul doi este $u_k$.

Dar din (16) deducem

$$\lim_{t\to 0} v_0(x, t) = \varphi_k(x),$$

deci

$$v_0(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\, d\xi.$$

Formula (17) ne dă, atunci,

$$u_k(x, t) = \frac{1}{k!\, 2\sqrt{\pi}\, t^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi - \frac{\partial u_{k-1}}{\partial t} - \tag{18}$$

$$- \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u_{k-2}}{\partial t^2} - \ldots - \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u_0}{\partial t^k}.$$

Afirmația făcută este astfel justificată: formulele (15) și (18) determină din aproape în aproape, toate componentele calorice $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$.

**12.** Rămîne să verificăm că funcția policalorică astfel determinată îndeplinește condițiile inițiale (13), (13′). Pentru aceasta, vom căuta, în primul rînd, să dăm soluției reprezentate prin formulele (15) și (18) o formă mai comodă pentru calcul. Să introducem notația

$$u(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi.$$

Condiția (13) ne dă, cu notația introdusă mai sus,

$$u_0 = u(\varphi_0).$$

Formula (18) ne dă, apoi, pentru $k = 1$,

$$u_1(x, t) = u(\varphi_1) - \frac{\partial u(\varphi_0)}{\partial t}.$$

Pentru $k = 2$, aceeași formulă ne dă

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2!} u(\varphi_2) - \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}.$$

Dar

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u(\varphi_1)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(\varphi_0)}{\partial t^2},$$

deci putem scrie

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2!}\left[u(\varphi_2) - 2\frac{\partial u(\varphi_1)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(\varphi_0)}{\partial t^2}\right], \tag{19}$$

Vom arăta că avem, în general,

$$u_k(x, t) = \frac{1}{k!}\left[u(\varphi_k) - C_k^1 \frac{\partial u(\varphi_{k-1})}{\partial t} + C_k^2 \frac{\partial^2 u(\varphi_{k-2})}{\partial t^2} - \right.$$
$$\left. - \ldots + (-1)^k \frac{\partial^k u(\varphi_0)}{\partial t^k}\right]. \tag{20}$$

Într-adevăr, să presupunem formula adevărată pentru valorile

$$1, 2, 3, \ldots, k-1.$$

Vom arăta că ea subzistă și pentru valoarea $k$.
Așadar, prin ipoteză

$$u_j(x, t) = \frac{1}{j!} \sum_{r=0}^{j} (-1)^r C_j^r \frac{\partial^r u(\varphi_{j-r})}{\partial t^r}, \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1). \tag{21}$$

Scriind formula (18) sub forma condensată

$$u_k(x, t) = \frac{1}{k!}\left[u(\varphi_k) - \sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{i!} \frac{\partial^i u_{k-i}}{\partial t}\right]$$

şi ţinînd seama de formula (20), în care vom înlocui pe $j$ prin $k - i$, obţinem

$$u_k(x, t) = \frac{1}{k!}\left[u(\varphi_k) - \sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \sum_{r=0}^{k-i} \frac{(-1)^r (k-i)!}{r!(k-i-r)!} \frac{\partial^{i+r} u(\varphi_{k-i-r})}{\partial t^{i+r}}\right].$$

Dacă punem $i + r = s$, formula precedentă se scrie

$$u_k(x, t) = \frac{1}{k!}\left[u(\varphi_k) - \sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{i!(s-i)!(k-s)!} \sum_{s=i}^{k} (-1)^{s-i} \frac{\partial^s u(\varphi_{k-s})}{\partial t^s}\right]. \quad (22)$$

Să fixăm, în suma dublă din membrul al doilea, pe $s$. Atunci $i$ va lua valorile 1, 2, ..., $s$. Coeficientul derivatei $\frac{\partial^s u(\varphi_{k-s})}{\partial t^s}$ va fi deci

$$(-1)^s \frac{k!}{(s-1)!(k-s)!} + (-1)^{s-1} \frac{k!}{2!(s-2)!(k-s)!} + \ldots + \frac{k!}{s!(k-s)!}$$

sau

$$\frac{(-1)^s k!}{(k-s)!}\left[\frac{1}{(s-1)!} - \frac{1}{2!(s-2)!} + \ldots + (-1)^s \frac{1}{s!}\right].$$

Valoarea parantezei este, după cum se ştie, $\frac{1}{s!}$. Deci coeficientul derivatei

$$\frac{\partial^s u(\varphi_{k-s})}{\partial t^s}$$

din formula (22) este $(-1)^s C_k^s$. Această formulă se reduce, astfel, la formula (20).

Putem scrie această formulă sub forma simbolică

$$u_k(x, t) = \frac{1}{k!}\left[u(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t}\right]_0^{(k)} \quad (20')$$

sensul acestui simbol fiind dat de însăşi formula (20). Formula (14) devine, în acest caz,

$$u(x, t) = u(\varphi_0) + \frac{t}{1!}\left[u(\varphi_1) - \frac{\partial u(\varphi_0)}{\partial t}\right] + \frac{t^2}{2!}\left[u(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t}\right]_0^{(2)} + \ldots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\left[u(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t}\right]_0^{(p-1)}. \quad (14')$$

**13.** Rămîne să verificăm că funcţia $u(x, t)$ dată de formula precedentă îndeplineşte condiţiile iniţiale (13), (13'). Să notăm cu $u_k(x, t)$ funcţia care se obţine din (14') făcînd

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = \varphi_{k-1} = \varphi_{k+1} = \ldots = \varphi_{p-1} \equiv 0.$$

Este clar că

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + \ldots + u_{p-1}(x, t). \tag{23}$$

Problema revine la a arăta că avem

$$\lim_{t \to 0} \frac{\partial^i u_k(x, t)}{\partial t^i} = 0, \quad (i \neq k), \tag{24}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\partial^k u_k(x, t)}{\partial t^k} = \varphi_k(x). \tag{24'}$$

Din formula (14') deducem

$$u_k(x,t) = \frac{t^k}{k!} u(\varphi_k) - \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} C_{k+1}^1 \frac{\partial u(\varphi_k)}{\partial t} + \\ + \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} C_{k+2}^2 \frac{\partial^2 u(\varphi_k)}{\partial t^2} - \ldots + (-1) \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} C_{p-1}^{p-k-1} \frac{\partial^{p-k-1} u(\varphi_k)}{\partial t^{p-k-1}} \tag{25}$$

**14.** Fie $\varphi(x)$ o funcție definită pe toată axa, continuă pentru orice $x$ și astfel încît

$$|\varphi(x)| < M e^{Kx^2}.$$

Vom pune, pentru a simplifica,

$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}},$$

de unde

$$u(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, \omega(t)\, d\xi.$$

Vom avea, pentru orice $n$ natural,

$$\frac{\partial^n u(\varphi)}{\partial t^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, \omega^{(n)}(t)\, d\xi. \tag{26}$$

Este deci, de ajuns să calculăm derivata $\omega^{(n)}(t)$. Avem

$$\omega'(t) = \left[\frac{(\xi - x)^2}{4 t^{5/2}} - \frac{1}{t^{3/2}}\right] e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}},$$

$$\omega''(t) = \left[\frac{(\xi - x)^4}{2^4 t^{9/2}} - \frac{6(\xi - x)^2}{2^3 t^{7/2}} + \frac{3}{2^2} \frac{1}{t^{5/2}}\right] e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{27}$$

$$\omega^n(t) = \left[\frac{(\xi - x)^{2n}}{2^{2n} t^{\frac{4n+1}{2}}} - \frac{a_n^1 (\xi - x)^{2n-2}}{2^{2n-1} t^{\frac{4n-1}{4}}} + \frac{a_n^2 (\xi - x)^{2n-4}}{2^{2n-2} t^{\frac{4n-3}{2}}} - \ldots\ldots\ldots\right.$$

$$\left. \ldots\ldots\ldots + \frac{2n!}{n!\, 2^{2n}} \frac{1}{t^{\frac{2n+1}{2}}}\right] e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}$$

Coeficienţii numerici $a_n^1$, $a_n^2$, ... se determină prin relaţiile de recurenţă

$$a_{n+1}^1 = a_n^1 + 4n + 1,$$

$$a_{n+1}^m = a_n^m + (4n - 2m + 3)\, a_n^{m-1}.$$

Să introducem expresia lui $\omega^{(n)}(t)$ în integrala din formula (26) şi să facem, în această integrală, schimbarea de variabilă $\xi = x + 2\sqrt{t}\, s$. Punînd

$$\varpi_n(s) = 2s^{2n} - a_n^1 s^{2n-2} + \frac{a_n^2 s^{2n-4}}{2} + \ldots + (-1)^k \frac{a_n^k s^{2n-2k}}{2^{k-1}} + \ldots, \tag{28}$$

relaţia (26) se scrie

$$\frac{\partial^n u(\varphi)}{\partial t^n} = \frac{1}{t^n \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_n(s)\, e^{-s^2}\, \varphi(x + 2\sqrt{t}\, s)\, ds. \tag{26'}$$

Vom vedea, mai tîrziu [Capitolul V, punctul 41], că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_n(s)\, e^{-s^2}\, ds = 0, \tag{29}$$

precum şi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^{2q}\, \varpi_n(s)\, e^{-s^2}\, ds = 0, \tag{29'}$$

pentru $q = 1, 2, \ldots, n-1$.

Pe de altă parte, oricare ar fi polinomul $P(s)$, un raţionament clasic pe care nu-l mai repetăm aici ne arată că, în condiţiile impuse funcţiei $\varphi$, avem

$$\lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} P(s),\ e^{-s^2}\ \varphi\ (x + 2\sqrt{t}\, s)\, ds = \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} P\ (s)\ e^{-s^2}\, ds.$$

Vom avea atunci, în particular, ţinînd seama de formulele (29) şi (29')

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{2q}\, \varpi_n(s)\, e^{-s^2}\, \varphi(x + 2\sqrt{ts})\, ds = 0, \ (q = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{30}$$

Prin urmare, *pentru* $m \geqq n$, *vom avea*

$$\lim_{t \to 0} t^m \frac{\partial^n u(\varphi)}{\partial t^n} = 0, \tag{31}$$

*oricare ar fi funcţia* $\varphi$.

**15.** Să presupunem, acum, $m < n$. Punînd $n - m = q$, vom avea

$$t^m \frac{\partial^n u(\varphi)}{\partial t^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot t^q} \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_n(s)\, e^{-s^2} \varphi(x + 2\sqrt{t}\, s)\, ds.$$

Pentru $t \to 0$, membrul al doilea se prezintă sub forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, dacă ținem seama de relația (30). Pentru a ridica această nedeterminare, vom presupune că funcția $\varphi$ este de $2q$ ori derivabilă, cu derivata $\varphi^{(2q)}$ continuă și că avem, pentru orice derivată de ordin $k \leqq q$,

$$| \varphi^{(k)}(x) | < M e^{Kx^2}.$$

Să punem $\sqrt{t} = z$. Atunci

$$t^m \frac{\partial^n u(\varphi)}{\partial t^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, z^{2q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\omega}_s(s)\, e^{-s^2} \varphi(x + 2zs)\, ds.$$

Aplicînd, în membrul al doilea, regula lui Hospital de $2q$ ori, ceea ce este permis în urma ipotezelor făcute, obținem, ținînd seama de relația (30),

$$\lim_{t \to 0} t^m \frac{\partial^n u(\varphi)}{\partial t^n} = \frac{2^{2q}}{(2q)!\sqrt{\pi}} \lim_{z \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{2q} \overline{\omega}_n(s)\, e^{-s^2} \varphi(x + 2zs)\, ds = 0.$$

**16.** Să aplicăm, acum, rezultatele precedente la problema noastră. În expresia derivatei

$$\frac{\partial^k u_k(x, t)}{\partial t^k}$$

calculate din relația (25) cu ajutorul formulei lui Leibniz, vor intra numai termeni de forma

$$t^m \frac{\partial^n u(\varphi_k)}{\partial t^n}.$$

Cea mai mare valoare a diferenței $q = n - m$, în cazul cînd $n > m$, se va obține evident, pentru $i = p - 1$ și va fi egală cu $p - 1 - k$.

Dacă, deci, presupunem funcția $\varphi_k$ derivabilă de $2(p - k - 1)$ ori, cu derivata

$$\varphi^{2(p-k-1)}(x)$$

continuă și majorată de funcția $M e^{Kx^2}$, atunci, în baza rezultatelor punctului precedent, putem scrie, oricare ar fi valorile respective ale lui $m$ și $n$, afară de sistemul de valori $m = n = 0$,

$$\lim_{t \to 0} t^m \frac{\partial^n u(\varphi_k)}{\partial t^n} = 0.$$

Pentru $m = n = 0$, obținem termenul $u(\varphi_k)$, care apare numai în derivata

$$\frac{\partial^k u_k(x, t)}{\partial t^k}$$

și anume din derivarea primului termen din membrul al doilea al formulei (21).

Dar

$$\lim_{t \to 0} u(\varphi_k) = \varphi_k(x)$$

Putem deci, în definitiv, să enunţăm următoarea teoremă

T e o r e m ă. *Dacă funcţiile*

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_{p-1}(x)$$

*îndeplinesc următoarele condiţii:*

1° $\varphi_k(x)$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ p-1$ *este de clasă* $C^{2(p-k-1)}$;

2° *există două constante pozitive* $M$ *şi* $K$ *astfel încît să avem*

$$|\varphi_k^{(i)}(x)| < M\, e^{Kx^2},$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2p-2;\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1),$$

*atunci există o funcţie* $u(x, t)$, *policalorică de ordinul* $p$ *în banda* $\left(0, \frac{1}{4K}\right)$ *şi astfel încît să avem*

$$\lim_{t\to 0} u(x, t) = \varphi_0(x),$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} = \varphi_k(x),\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1).$$

*Această funcţie este dată de formula* (14′).

## Capitolul III

# A DOUA EXTENSIUNE A FORMULEI LUI POISSON LA FUNCŢIILE POLICALORICE

### § 1. Cazul funcţiilor bicalorice

**17.** Problema pe care voim să o rezolvăm în acest paragraf este următoarea:

*Fie* $f_0(x)$, $f_1(x)$ *două funcţii continue pe dreapta reală şi astfel încît*

$$|f_0(x)| < M\, e^{Kx^2},\ |f_1(x)| < M \cdot e^{Kx^2}.$$

*Să se determine o funcţie* $u(x, t)$, *bicalorică în banda* $\left(0, \frac{1}{4K}\right)$ *şi astfel încît să avem*

$$\lim_{t\to 0} u(x, t) = f_0(x), \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = f_1(x). \tag{1′}$$

Rezolvarea acestei probleme este cu mult mai uşoară decît rezolvarea problemei din capitolul precedent. Ca şi în cazul amintit, vom căuta funcţia necunoscută sub forma

$$u(x, t) = u_0(x, t) + t\, u_1(x, t), \tag{2}$$

unde $u_0$ și $u_1$ sînt două funcții calorice definite pentru $0 < t < \frac{1}{4K}$ și astfel încît condițiile inițiale (1), (1') să fie verificate.

Din (2) deducem imediat

$$\Delta u(x, t) = -u_1(x, t),$$

după care condiția (1') ne va da

$$\lim_{t \to 0} u_1(x, t) = -f_1(x),$$

deci

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi. \tag{3}$$

Se vede imediat, din această formulă, că

$$\lim_{t \to 0} t\, u_1(x, t) = 0,$$

deci din formula (2) deducem, ținînd seama de condiția (1),

$$\lim_{t \to 0} u_0(x, t) = f_0(x).$$

Prin urmare

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi$$

Punînd

$$F(x, t) = f_0(x) - t\, f_1(x),$$

avem, așa dar,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, t)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi. \tag{4}$$

Această formulă poate fi privită ca o a doua extensiune a formulei lui Poisson la funcțiile bicalorice.

**18.** Din însăși desfășurarea raționamentului, se vede că soluția este unică; dar unicitatea poate fi stabilită și *direct*, în felul următor: Să presupunem, că ar exista o a doua funcție bicalorică $u'(x, t)$ verificînd condițiile inițiale (1), (1'). Putem scrie această soluție sub forma

$$u'(x, t) = u'_0(x, t) + t\, u'_1(x, t), \tag{2'}$$

unde $u'_0$, $u'_1$ sînt funcții calorice. Din

$$\Delta u' = -u'_1,$$

am deduce

$$\lim_{t \to 0} u'_1(x, t) = -f_1(x),$$

de unde $u'_1(x, t) \equiv u_1(x, t)$, deci

$$\lim_{t \to 0} t u'_1 = 0.$$

Atunci, din formula (2') deducem

$$\lim_{t\to 0} u'_0 = f_0,$$

deci $u'_0 \equiv u_0$, adică, în definitiv, $u' \equiv u$.

## § 2. Cazul general

**19.** Regularitatea procedeului urmat în cazul funcţiilor bicalorice ne arată că acest procedeu poate fi cu uşurinţă extins la cazul general al unei funcţii policalorice de ordinul $p$. Enunţul problemei este, în acest caz, următorul:

*Fie*

$$f_0(x),\ f_1(x),\ \ldots,\ f_{p-1}(x)$$

*p funcţii definite pe dreapta reală, continue pe această dreaptă şi astfel încît*

$$|f_i(x)| < Me^{\overline{Kx}^2},\ (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ p-1).$$

*Să se determine o funcţie* $u(x, t)$, *policalorică de ordinul p în banda* $\left(0, \frac{1}{4K}\right)$, *ştiindu-se că avem*

$$\lim_{t\to 0} u(x, t) = f_0(x), \tag{5}$$

$$\lim_{t\to 0} \Delta^i u(x, t) = f_i(x), \tag{5'}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1).$$

Vom căuta funcţia $u(x, t)$ sub forma

$$u = u_0 + tu_1 + t^2u_2 + \ldots + t^{p-1}u_{p-1}, \tag{6}$$

$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ fiind componentele calorice ale acestei funcţii.

Deducem succesiv, din această formulă,

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u &= -u_1 - 2tu_2 - 3t^2u_3 - \ldots - (p-1)t^{p-2}u_{p-1},\\
\Delta^2 u &= 2!\,u_2 + 3.2.tu_3 + 4.3\,t^2u_4 + \ldots + (p-1)(p-2)t^{p-3}u_{p-1},\\
\Delta^3 u &= -3!u_3 - 4.3.2\,tu_4 - \ldots - (p-1)(p-2)(p-3)t^{p-4}u_{p-1},\\
&\ldots\ldots\ldots

Se vede imediat că

$$\lim_{t\to 0} t\, u_{p-1}(x,\ t) = 0,$$

deci penultima relație ne va da

$$\lim u_{p-2}(x,\ t) = \frac{(-1)^{p-2}}{(p-2)!} f_{p-2}(x),$$

de unde

$$u_{p-2}(x,\ t) = \frac{(-1)^{p-2}}{(p-2)!\, 2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{p-2}(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)}{4t}}\, d\xi.$$

Deducem, în general.

$$u_i(x,\ t) = \frac{(-1)^i}{i!\, 2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi,$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1),$$

Prin urmare, punînd

$$F(x,\ t) = f_0(x) - \frac{t}{1} f_1(x) + \frac{t^2}{2!} f_2(x) - \ldots + \frac{(-1)^{p-1} t^{p-1}}{(p-1)!} f_{p-1}(x),$$

obținem formula

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\ t)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi, \tag{8}$$

care rezolvă problema pusă.

Într-adevăr, din expresia (8) se vede imediat că

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f_0(x).$$

Apoi, din aceeași relație deducem, ținînd seama de formulele (7),

$$\Delta^i u(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(\xi,\ t)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi, \tag{8'}$$

$$(i - 1,\ 2,\ ..,\ p-1),$$

unde

$$F_i(x,\ t) = (-1)^i \left[ f_i(x) - \frac{t}{1} f_{i+1}(x) + \ldots + (-1)^{p-i-1} \frac{t^{p-i-1}}{(p-i-1)!} f_{p-1}(x) \right].$$

Din relația (8') deducem imediat

$$\lim_{t\to 0} \Delta^i u(x,\ t) = f_i(x).$$

Se poate arăta, exact ca și în cazul $p = 2$, că soluția astfel obținută este *unică*.

**20.** Dacă impunem funcţiilor $f_i$ condiţia de a se anula în afara unui anumit interval $[a, b]$, soluţia problemei puse se scrie, evident,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_a^b F(\xi, t)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi. \tag{8''}$$

Această funcţie, ca şi operatorii $\Delta u$, $\Delta^2 u$, . ., $\Delta^{p-1} u$ tind, evident, către zero, pentru $t \to 0$, dacă $x$ este exterior intervalului $[a, b]$.

Această observaţie ne va fi utilă mai tîrziu.

## § 3. Analiticitatea parabolică

**21.** Simetria rezultatului obţinut în paragraful precedent ne sugerează următoarea extensiune:

Fie

$$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

un şir infinit de funcţii continue pe dreapta reală. Se poate determina o funcţie $u(x, t)$, definită în semiplanul $t > o$, sau într-o bandă $(0, \delta)$, astfel încît să avem

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = f_0(x), \quad \lim_{t \to 0} \Delta^i u(x, t) = f_i(x),$$

pentru orice valoare a lui $i$?

Putem enunţa următoarea:

T e o r e m ă. *Dacă există două constante $M$ şi $K$ pozitive astfel încît să avem*

$$|f_i(x)| < M e^{Kx^2}, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

*atunci există o funcţie $u(x, t)$, indefinit derivabilă în raport cu $x$ şi cu $t$ în banda $(0, t_1)$ unde $t_1 < \frac{1}{4K}$ şi astfel încît să avem*

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = f_0(x), \quad \lim_{t \to 0} \Delta^i u(x, t) = f_i(x). \tag{10}$$

*Această funcţie este dată de formula*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} f_n(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi. \tag{11}$$

Să considerăm, într-adevăr, seriile

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} |f_{n+1}(x)|, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Toate aceste serii sînt majorate de seria

$$M e^{Kx^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!},$$

care este uniform convergentă în orice porţiune finită a benzii $(0, t_1)$, de pildă într-un dreptunghi $D$ detaşat din această bandă prin dreptele $x = -R$, $x = +R$, unde $R$ este un număr pozitiv arbitrar. Deci şi seriile (12) sînt uniform convergente în $D$.

Să punem

$$\sigma_p(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} f_n(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi. \tag{13}$$

Avem

$$|\sigma_{p+q}(x, t) - \sigma_p(x, t)| \leqq \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=p+1}^{p+q} \frac{t^n}{n!} |f_n(\xi)|\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi.$$

Fie $R_1 > R$ un număr pozitiv. Vom descompune integrala din membrul al doilea în trei părți punînd respectiv

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t} \int_{-\infty}^{-R_1} \sum_{n=p+1}^{p+q} \frac{t^n}{n!} |f_n(\xi)|\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t} \int_{-R_1}^{R_1} \sum_{n=p+1}^{p+q} \frac{t^n}{n!} |f_n(\xi)|\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi,$$

$$I_3 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t} \int_{R_1}^{\infty} \sum_{n=p+1}^{p+q} \frac{t^n}{n!} |f_n(\xi)|\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi.$$

Ținînd seama de condițiile (9), avem

$$|I_1| < \frac{M_1}{2\sqrt{\pi}\, t} \int_{R_1}^{\infty} e^{K\xi^2 - \frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi,$$

unde $M_1 = Me^{\frac{1}{4K}}$. Pe de altă parte, punînd $\delta^2 = 1 - 4Kt$, $\delta_1^2 = 1 - 4Kt_1 > 0$, putem scrie

$$\frac{M_1}{2\sqrt{\pi}\, t} \int_{R_1}^{\infty} e^{K\xi^2 - \frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi = \frac{M_1 e^{\frac{Kx^2}{\delta^2}}}{2\sqrt{\pi}\, t} \int_{R_1}^{\infty} e^{-\frac{\delta^2\left(\xi - \frac{x}{\delta^2}\right)^2}{4t}}\, d\xi$$

$$< \frac{M_1 e^{\frac{Kx^2}{\delta_1^2}}}{2\sqrt{\pi}\, t} \int_{R_1}^{\infty} e^{-\frac{\delta^2\left(\xi - \frac{x}{\delta^2}\right)^2}{4t}}\, d\xi.$$

Făcînd substituția

$$\delta\left(\xi - \frac{x}{\delta^2}\right) = 2\sqrt{t}\, s,$$

de unde $d\xi = \frac{2\sqrt{t}}{\delta}\, ds$, deducem

$$|I_1| < \frac{M_1 e^{\frac{Kx^2}{\delta_1^2}}}{\delta_1\sqrt{\pi}} \int_{\beta}^{\infty} e^{-s^2}\, ds,$$

unde

$$\beta = \frac{\delta_1\left(R_1 - \frac{x}{\xi_1^2}\right)}{2\sqrt{t_1}},$$

sau

$$|I_1| < \frac{M_1 e^{K_1 R^2}}{\delta_1 \sqrt{\pi}} \int_\beta^\infty e^{-s^2} ds, \left(K_1 = \frac{K}{\xi_1^2}\right).$$

Pentru $R_1 \to \infty$, integrala din membrul al doilea tinde către zero. Există deci o valoare a lui $R_1$ pentru care

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{3},$$

oricare ar fi punctul $(x, t)$ în dreptunghiul $D$. În mod analog se arată că există o valoare a lui $R_1$ pentru care

$$|I_3| < \frac{\varepsilon}{3},$$

oricare ar fi punctul $(x, t)$ în dreptunghiul $D$.

Să alegem pe cea mai mare dintre aceste două valori, pe care să o notăm tot cu $R_1$. În dreptunghiul $D_1$, detaşat din banda $(0, t_1)$ de dreptele $x = -R_1$, $x = +R_1$, seriile (12) sînt uniform convergente. Există deci un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încît, pentru $p > N(\varepsilon)$, să avem, oricare ar fi $q$,

$$\sum_{n=p+1}^{p+q} \frac{t^n}{n!} |f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

în dreptunghiul $D_1$. De unde deducem

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{6\sqrt{\pi t}} \int_{-R_1}^{+R_1} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}} d\xi,$$

sau

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{\pi}} \int_{\frac{R_1+x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{R_1-x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Vom avea deci, în definitiv, pentru $p > N(\varepsilon)$,

$$|\sigma_{p+q}(x, t) - \sigma_p(x, t)| < \varepsilon, \ (q = 1, 2, 3, \ldots), \tag{14}$$

oricare ar fi punctul $(x, t)$ în dreptunghiul $D$.

Să aplicăm, acum, fiecărui termen al integralei din relaţia (13) operatorul $\Delta^i$, $(i = 1, 2, \ldots)$.

Obținem relația

$$\Delta^i \sigma = \frac{(-1)^i}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=i}^{p} (-1)^n \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} f_n(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi,$$

care se mai poate scrie

$$\Delta^i \sigma_p = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{p+i} (-1)^n \frac{t^n}{n!} f_{n+i}(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi. \tag{15}$$

În același mod ca mai sus, se poate arăta că se poate determina un număr natural $N(\varepsilon)$ (în fapt *același ca mai sus*), astfel încît, pentru $p > N(\varepsilon)$, să avem

$$|\Delta^i \sigma_{p+q} - \Delta^i \sigma_p| < \varepsilon, \tag{16}$$

oricare ar fi $q$ și oricare ar fi punctul $(x, t)$ în $D$.

Din (14) rezultă că șirul $\{\sigma_p(x, t)\}$ converge uniform către $u(x, t)$ în $D$, deci putem scrie

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi. \tag{11'}$$

Din (16) rezultă, de asemenea, că șirul $\{\Delta^i \sigma_p(x, t)\}$ converge uniform în $D$. În baza unei teoreme generale, pe care o vom demonstra mai tîrziu [Capitolul VI, punctul 55], rezultă că limita acestui șir este $\Delta^i u(x, t)$.

Vom avea, deci,

$$\Delta^i u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+i}(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi. \tag{17}$$

Vom arăta acum că

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = f_0(x),$$

$$\lim_{t \to 0} \Delta^i u(x, t) = f_i(x), \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Într-adevăr, putem scrie, pentru un $x$ dat,

$$|u(x, t) - f_0(x)| \leqq |u(x, t) - \sigma_p(x, t)| + |\sigma_p(x, t) - f_0(x, t)|.$$

Dacă $p > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ avem

$$u(x, t) - \sigma_p(x, t)| \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

oricare ar fi $t \in (0, t_1)$.

Pe de altă parte, din rezultatele paragrafului precedent avem, pentru un $p$ dat,

$$\lim_{t \to 0} \sigma_p(x, t) = f_0(x),$$

deci există $\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \eta > 0$, astfel încît pentru $t < \eta$ să avem

$$|\sigma_p(x, t) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

În definitiv, pentru $t < \eta$ vom avea

$$|u(x, t) - f_0(x)| < \varepsilon.$$

ceea ce echivalează cu prima din relaţiile (10).

De asemenea, putem scrie, pentru un $x$ dat şi un număr natural $i$ dat,

$$|\Delta^i u(x, t) - f_i(x)| \leqq |\Delta^i u(x, t) - \Delta^i \sigma_p(x, t)| + |\Delta^i \sigma_p(x, t) - f_i(x)|.$$

Pentru $p > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ avem, ca mai sus, oricare ar fi $t$ în intervalul $(0, t_1)$

$$|\Delta^i u(x, t) - \Delta^i \sigma_p(x, t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De asemenea, în baza rezultatelor din paragraful precedent, $p$ fiind fixat, există un număr $\eta_i\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \eta_i > 0$, astfel încît să avem, pentru $t < \eta_i$,

$$|\Delta^i \sigma_p(x, t) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde, pentru $t < \eta_i$,

$$|\Delta^i u(x, t) - f_i(x)| < \varepsilon,$$

ceea ce echivalează cu a doua relaţie (10).

Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

**22.** Dacă în formula (11) sau (11'), punem

$$u_i(x, t) = \frac{(-1)^i}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi,$$

formula se scrie

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_n(x, t), \tag{18}$$

unde $u_i$ sînt, vizibil, funcţii calorice.

Vom numi funcţie *parabolic analitică* (sau: policalorică de ordin infinit), orice funcţie $u(x, t)$ definită în banda $(0, t_1)$ printr-o serie de forma (18), unde $u_n(x, t)$ sînt funcţii calorice supuse la legea de creştere următoare

$$|u_n(x, t)| < M\, e^{Kx^2}. \tag{19}$$

Rezultă, din această condiție, că seria din membrul al doilea al formulei (18) este uniform convergentă în orice dreptunghi $D$. Să considerăm, acum, seria

$$(-1)^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_{n+i}(x, t),$$

obținută aplicînd fiecărui termen al seriei (18) operatorul iterat $\Delta^i$. Această serie este și ea uniform convergentă, pentru orice $i$, în orice dreptunghi $D$. Deci [Capitolul VI, punctul 55] putem scrie

$$\Delta^i u(x, t) = (-1)^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_{n+i}(x, t). \tag{20}$$

Din formulele (18) și (20) deducem imediat următoarea importantă

T e o r e m ă. *O funcție parabolic analitică se poate pune într-un singur mod sub forma* (18).

Într-adevăr, fie

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = f_0(x), \quad \lim_{t \to 0} \Delta^i u(x, t) = f_i(x) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dacă presupunem că mai există un șir de funcții calorice $\{u'_n(x, t)\}$ astfel încît să avem

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u'_n(x, t),$$

funcțiile $u'_n(x, t)$ verificînd condiții de forma (19), punînd

$$\varphi_n(x, t) = u_n(x, t) - u'_n(x, t),$$

am deduce, aplicînd formulele (18) și (20)

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \varphi_{n+1}(x, t),$$

oricare ar fi $i$. Cum seria din dreapta converge uniform în orice dreptunghi, din cauză că

$$|\varphi_{n+i}(x, t)| < 2M, e^{Kx^2},$$

deducem, pentru $t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \varphi_{n+i}(x, t) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots,),$$

oricare ar fi $i$. Deci, în baza teoremei de unicitate a lui Tihonov [10]

$$\varphi_n(x, t) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

adică

$$u'_n(x, t) \equiv u_n(x, t), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Din teorema de mai sus rezultă, în particular, că în cîmpul funcțiilor parabolic analitice, problema enunțată la începutul acestui paragraf are o soluție *unică*.

**23.** Fie $t = t_0$ o dreaptă oarecare a benzii $(0, t_1)$. Vom pune

$$(-1)^n u_n(x, t_0) = g_n(x), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

Inegalităţile (19) devin

$$|g_n(x)| < M e^{Kx^2}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Să aplicăm rezultatele de la punctele precedente: există o funcţie parabolic analitică $U(x, t)$, *şi una singură*, definită în banda $(t_0, t_1)$ şi astfel încît să avem

$$\lim_{t \to 0} U(x, t) = g_0(x), \quad \lim_{t \to 0} \Delta^i U(x, t) = g_i(x, t), \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Această funcţie va fi dată, potrivit teoremei de la punctul 21, de formula

$$U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t - t_0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t - t_0)^n}{n!} g_n(\xi)\, d\xi, \tag{22}$$

obţinută din (11) prin schimbarea lui $t$ în $t - t_0$ şi a funcţiilor $f_n$ în $g_n$.

Dar, potrivit relaţiilor (20) şi (21), vom avea

$$\lim_{t \to t_0} u(x, t) = g_0(x), \quad \lim_{t \to t_0} \Delta^i u(x, t) = g_i(x).$$

Rezultă, în baza teoremei de unicitate, că $U(x, t) = u(x, t)$. Vom avea, aşadar

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t - t_0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t - t_0)^n}{n!} g_n(\xi)\, d\xi, \tag{23}$$

ceea ce putem, încă, scrie

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} u_n^0(x, t), \tag{24}$$

$u_n^0(x, t)$ fiind funcţii calorice.

Putem spune că formula (24) reprezintă *desfăşurarea funcţiei parabolic analitice* $u(x, t)$ *dată prin seria* (18), *de-a lungul dreptei* $t = t_0$.

## Capitolul IV

# PROBLEMELE LA LIMITA PENTRU DOMENII MĂRGINITE

## § 1. Prima problemă bicalorică. Potenţialul bicaloric

**24.** În tot cursul acestui capitol ne vom mărgini, pentru simplitatea calculelor şi a expunerii, la cazul a două variabile $(x, t)$. Domeniile în care vor fi definite funcţiile vor avea frontiera limitată de două drepte $t_0 = t_1$, $t = t_2$, $(t_1 < t_2)$, precum

și de două arce de curbă $\Gamma_1$: $x = \gamma_1(t)$, $\Gamma_2$: $x = \gamma_2(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, cu $\gamma_1(t) < \gamma_2(t)$, aceste două funcții fiind presupuse lipschitziene în intervalul $[t_1, t_2]$, (fig. 1). Se știe că un astfel de domeniu este apt pentru rezolvarea primei probleme a ecuației căldurii: oricare ar fi paralela $B_1 B_2$ la bazele trapezului mixtiliniu considerat, cunoașterea valorilor unei funcții calorice pe arcele $B_1 A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 B_2$, atrage după sine cunoașterea valorilor funcției pe segmentul $B_1 B_2$, deci în tot trapezul $PA_1 A_2 Q$.

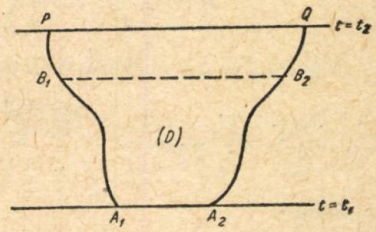


Fig. 1

Vom numi, pe scurt, domeniu normal (pentru problema căldurii) un astfel de domeniu.

Reamintim că pentru rezolvarea, cu ajutorul ecuațiilor integrale, a problemei căldurii, s-au utilizat funcțiile

$$\Phi_\Gamma(x, t; \varphi) = \int_{t_1}^{t} \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{[x-\gamma(t)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau, \tag{1}$$

$$\Psi_\Gamma(x, t; \varphi) = -\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi_\Gamma}{\partial x} = \int_{t_1}^{t} \varphi(\tau) \frac{x-\gamma(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\gamma(\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau, \tag{1'}$$

unde $\varphi$ și $\gamma$ sînt continui în $[t_1, t_2]$. Prin $\Gamma$ am notat arcul de curbură $x = \gamma(t)$.

Funcția $\Phi_\Gamma(x, t)$ este continuă în toată banda $[t_1, t_2]$ și verifică, în această bandă, ecuația $\Delta \Phi_\Gamma = 0$.

Funcția $\Psi_\Gamma(x, t; \varphi)$ este continuă în orice regiune a benzii $[t_1, t_2]$, care nu conține nici un punct al arcului $x = \gamma(t)$ și verifică, în orice punct al unei astfel de regiuni, ecuația $\Delta \Psi_\Gamma = 0$. De asemenea, $\Psi_\Gamma(x, t; \varphi)$ conservă un sens pentru orice punct $(x_0, t_0)$ al acestui arc. În plus avem formulele lui Holmgren

$$\lim_{(x,t) \to (x_0, t_0)} \Psi_\Gamma(x, t; \varphi) = \Psi_\Gamma(x_0, t_0; \varphi) \pm 2\pi\varphi(t_0), \tag{2}$$

unde în membrul doi trebuie să luăm semnul « + » sau «— », după cum punctul $(x, t)$ tinde către punctul $(x_0, t_0)$ dinspre regiunea $x - \gamma(t) > 0$, sau dinspre regiunea $x - \gamma(t) < 0$.

În cazul particular în care $\gamma = \text{const.} = x_0$, atunci $\Psi_\Gamma(x_0, t_0, \varphi) = 0$. Prin urmare: integrala

$$W(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t} \varphi(\tau) \frac{x - x_1}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4(t-\tau)}} d\tau \tag{3}$$

tinde către $\pm \varphi(t_0)$ cînd punctul $(x, t)$ tinde către punctul $(x_1, t_1)$, dinspre dreapta sau dinspre stînga.

După cum se vede, funcția $\Psi_\Gamma$ se bucură de proprietăți analoge proprietăților potențialului newtonian. De aceea vom numi această funcție *potențialul caloric* relativ la arcul $\Gamma$.

**25.** Să considerăm, acum, funcţia

$$H_\Gamma(x, t; \varphi) = \int_{t_1}^{t} \varphi(\tau) \frac{x - \gamma(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{[x-\gamma(\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau \tag{4}$$

Vom arăta că această funcţie este *bicalorică*. Într-adevăr, avem

$$\frac{\partial H_\Gamma}{\partial x} = \int_{t_1}^{t} \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{[x-\gamma(\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t} \varphi(\tau) \frac{[x-\gamma(\tau)]^2}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\gamma(\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau$$

sau încă

$$\frac{\partial H_\Gamma}{\partial x} = \Phi_\Gamma(x, t; \varphi) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t} \varphi(\tau) \frac{[x-\gamma(\tau)]^2}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\gamma(\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau. \tag{5}$$

Să punem

$$J_\Gamma(x, t; \varphi) = \int_{t_1}^{t} \varphi(\tau) \frac{[x-\gamma(\tau)]^2}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\gamma(\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau. \tag{6}$$

Avem

$$\frac{\partial J_\Gamma}{\partial x} = \Psi_\Gamma(x, t; \varphi) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t} \varphi(\tau) \frac{[x-\gamma(\tau)]^3}{(t-\tau)^{5/2}} e^{-\frac{[x-\gamma(\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau. \tag{7}$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial H_\Gamma}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Psi_\Gamma(x, t; \varphi) + \frac{1}{4}\int_{t_1}^{t} \varphi(\tau) \frac{[x-\gamma(\tau)]^3}{(t-\tau)^{5/2}} e^{-\frac{[x-\gamma(t)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau.$$

Prin urmare

$$\Delta H_\Gamma = -2\Psi_\Gamma(x, t).$$

Deducem imediat că avem

$$\Delta^2 H_\Gamma = 0,$$

în orice punct care nu se află pe arcul $\Gamma$.

Din relaţia (5), care se mai scrie

$$\frac{\partial H_\Gamma}{\partial x} = \Phi_\Gamma - \frac{1}{2} J_\Gamma,$$

deducem că şi $J_\Gamma$ este o funcţie bicalorică, în orice regiune a bandei $[t_1, t]$ care nu conţine un punct al arcului $\Gamma$.

Putem scrie formula (6) astfel

$$J_\Gamma(x, t; \varphi) = x\,\Psi_\Gamma(x, t; \varphi) - \Psi_\Gamma(x, t; \varphi\gamma), \tag{8}$$

de unde se vede că $J_\Gamma$ este o funcţie continuă de-a lungul arcului $\Gamma$. Într-adevăr, avem, ţinînd seama de formula lui Holmgren,

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} J_\Gamma(x, t; \varphi) = x'[\Psi_\Gamma(x_0, t_0; \varphi) \pm 2\pi\varphi(t_0)] -$$
$$- \Psi_\Gamma(x_0, t_0; \varphi\gamma) \mp 2\pi\varphi(t_0)\gamma(t_0) =$$
$$= J_\Gamma(x_0, t_0; \varphi) \pm 2\pi[x_0 - \gamma(t_0)]\varphi(t_0) = J_\Gamma(x_0, t_0; \varphi).$$

Să punem

$$\Omega_\Gamma(x, t; \varphi) = \int_{t_1}^{t} \varphi(\tau) \frac{[x - \gamma(\tau)]^3}{(t-\tau)^{5/2}} e^{-\frac{[x-\gamma(\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau. \tag{9}$$

Vom arăta că în ipoteza derivabilității funcției $\gamma(t)$, funcția $\Omega_\Gamma(x, t; \varphi)$ este discontinuă de-a lungul arcului $\Gamma$. Să punem

$$\Omega_\Gamma^1(x, t; \varphi) = -2\int_{t_1}^{t} \varphi(\tau)\gamma'(\tau) \frac{[x - \gamma(\tau)]^2}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\gamma(\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau =$$

$$= -2 J_\Gamma(x, t; \varphi\gamma').$$

Funcția $\Omega_\Gamma^1$ este continuă în toată banda. Avem, în ipoteza $\varphi \equiv 1$,

$$\Omega_\Gamma + \Omega_\Gamma^1 = \int_{t_1}^{t} \frac{[x - \gamma(\tau)]^2}{t-\tau} \left[\frac{x - \gamma(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} - \frac{2\gamma'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\right] e^{-\frac{[x-\gamma(\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau,$$

de unde, punînd

$$\frac{x - \gamma(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}} = u,$$

și observînd că paranteza dreaptă este egală cu $4\frac{du}{d\tau}$,

$$\Omega_\Gamma(x, t; 1) + \Omega_\Gamma^1(x, t; 1) = 16\int_{\alpha}^{\beta} u^2 e^{-u^2} du$$

$\alpha$ și $\beta$ fiind limitele corespunzătoare valorilor $t_1$ și $t$ ale lui $\tau$. Dar $\beta = \pm\infty$, după cum $x - \gamma(\tau) \gtrless 0$ deci

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} \Omega_\Gamma(x, t; \varphi) + \Omega_\Gamma^1(x_0, t_0; 1) = 16\int_{\frac{x_0\gamma(t)}{2\sqrt{t_0-t_1}}}^{\pm\infty} u^2 e^{-u^2} du.$$

Pe de altă parte

$$\Omega_\Gamma(x_0, t_0; 1) + \Omega_\Gamma^1(x_0, t_0; 1) = 16\int_{\frac{x_0\gamma(t)}{2\sqrt{t_0-t_1}}}^{0} u^2 e^{-u^2} du.$$

Deducem, prin scăderea celor două relații

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} \Omega_\Gamma(x, t; 1) = \Omega_\Gamma(x_0, t_0; 1) + 16\int_0^{\pm\infty} u^2 e^{-u^2} du,$$

adică

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} \Omega_\Gamma(x, t; 1) = \Omega_\Gamma(x_0, t_0; 1) \pm 16\sqrt{\pi}. \tag{10}$$

Trecînd, acum, la cazul general, putem scrie

$$\Omega_\Gamma(x, t; \varphi) = -\int_{t_1}^{t} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}, \frac{[x - \gamma(\tau)]^3}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\gamma(\tau)]^2}{4(t-\tau)}} d\tau +$$

$$+ \varphi(t)\ \Omega_\Gamma(x, t; 1).$$

Să presupunem că $\varphi$ are, în intervalul $[t_1, t_2]$, numere derivate mărginite. Atunci prima integrală reprezintă o funcţie continuă de $(x, t)$ în toată banda $[t_1, t_2]$. Trecînd la limită şi ţinînd seamă de formula (10), obţinem

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} \Omega_\Gamma(x, t; \varphi) = -\int_{t_1}^{t_0} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_0)}{\tau - t_0} \frac{[x_0 - \gamma(\tau)]^3}{(t_0 - \tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x_0-\gamma(\tau)]^2}{4(t_0-\tau)}} d\tau, +$$

$$+ \Omega_\Gamma(x_0, t_0; 1)\ \varphi(t_0) \pm 16\sqrt{\pi}\,\varphi(t_0),$$

adică

$$\boxed{\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} \Omega_\Gamma(x, t; \varphi) = \Omega_\Gamma(x_0, t_0; \varphi) \pm 16\sqrt{\pi}\,\varphi(t_0).} \qquad (11)$$

Această formulă importantă va juca, în problema bicalorică, acelaşi rol pe care formula lui Holmgren îl joacă în rezolvarea problemei fundamentale a ecuaţiei căldurii.

Din rezultatul obţinut, deducem imediat că funcţia $\dfrac{\partial J_\Gamma}{\partial x}$ este discontinuă de-a lungul arcului $\Gamma$. Anume obţinem, din formula (8), ţinînd seama de formula lui Holmgren, precum şi de formula (11) găsită mai sus,

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} \frac{\partial J_\Gamma}{\partial x} = 2\,\Psi_\Gamma(x_0, t_0; \varphi) - \frac{1}{2}\,\Omega_\Gamma(x_0, t_0; \varphi) \mp 4\sqrt{\pi}\,\varphi(t_0). \qquad (11')$$

**26.** Cu aceste pregătiri, putem formula problema fundamentală de frontieră pentru funcţiile bicalorice, în modul următor:

Să se determine funcţia $v(x, t)$ care, în interiorul domeniului limitat, în banda $[t_1, t_2]$, de curbele

$$(\Gamma_1):\ x = \gamma_1(t), \qquad \gamma_1(t) < \gamma_2(t),$$
$$(\Gamma_2):\ x = \gamma_2(t),$$

*verifică ecuaţia*

$$\Delta^2 v = 0,$$

*iar pe frontieră verifică următoarele condiţii iniţiale*

$$v(x, t_0) = \varphi(x), \qquad v'_t(x, t_0) = \psi(x), \qquad (12_1)$$

*precum şi următoarele condiţii la limită:*

$$\begin{aligned} &v(x, t) = f_1(t), \quad v'_x(x, t) = g_1(t), \text{ pe } \Gamma_1, \\ &v(x, t) = f_2(t), \quad v'_x(x, t) = g_2(t), \text{ pe } \Gamma_2. \end{aligned} \qquad (12_2)$$

Fie $u(x, t)$ funcţia definită de formula (11) de la punctul 10, în care $a = \gamma_1(t_1)$, $b = \gamma_2(t_1)$.

Vom pune

$$U(x, t) = v(x, t) - u(x, t).$$

Condițiile inițiale $(12_1)$, pentru funcția $U(x, t)$, devin,

$$U(x, t_1) = 0, \qquad U'_t(x, t_1) = 0, \tag{12'_1}$$

Putem deci, fără a micșora generalitatea problemei, să presupunem de la început, în condițiile inițiale $(12_1)$

$$\varphi(x) \equiv 0, \qquad \psi(x) \equiv 0.$$

Cu această explicație, vom căuta funcția $v(x, t)$ sub următoarea formă,

$$v(x, t) = \Phi_{\Gamma_1}(x, t; \varphi_1) + \Phi_{\Gamma_2}(x, t; \varphi_2) + J_{\Gamma_1}(x, t; \psi_1) + J_{\Gamma_2}(x, t; \psi_2) \tag{13}$$

și vom încerca să determinăm funcțiile $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$, $\psi_2$ astfel încît condițiile la limită să fie verificate (întrucît condițiile inițiale sînt satisfăcute de la sine).

Vom obține, ținînd seama de formulele (11) și $(12_1)$ și omițînd, pentru simplitate, scrierea argumentelor $x$, $t$,

$$\begin{cases} \Phi^i_{\Gamma_1}(\varphi_1) + \Phi^i_{\Gamma_2}(\varphi_2) + J^i_{\Gamma_1}(\psi_1) + J^i_{\Gamma_2}(\psi_2) = f_i, \ (i = 1, 2), \\ -2\Psi^i_{\Gamma_1}(\varphi_1) - \Psi^i_{\Gamma_2}(\varphi_2) + 2\Psi^i_{\Gamma_1}(\psi_1) - \dfrac{1}{2}\Omega^i_{\Gamma_1}(\psi_1) + \\ + 2\Psi^i_{\Gamma_2}(\psi_2) - \dfrac{1}{2}\Omega^i_{\Gamma_2}(\psi_2) = g_i - (-1)^i 4\pi(\varphi_i - \psi_i), \ (i = 1, 2). \end{cases} \tag{14}$$

Indicele superior $i$ din primii membri ai acestor relații indică înlocuirea, în funcțiile respective, a argumentului $x$ prin $\gamma_i(t)$, $(i = 1, 2)$.

Sistemul (14) constituie un sistem de patru ecuații integrale liniare Volterra, cu patru funcții necunoscute, anume $\varphi_1$, $\varphi_2$ $\psi_1$, $\psi_2$. Un astfel de sistem admite întotdeauna o soluție și una singură.

Prin urmare dacă sistemul este *omogen*, adică dacă datele pe frontieră $f_1$, $f_2$, $g_1$, $g_2$ sînt nule, sistemul precedent admite ca unică soluție

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \psi_1 = \psi_2 \equiv 0,$$

iar formula (13) ne dă, în acest caz,

$$v(x_1\ t) \equiv 0.$$

Este evident, pe de altă parte, că verificarea condițiilor la frontieră o constituie însuși faptul că sistemul (14) este verificat de soluția sa.

Așadar: *problema bicalorică admite o soluție și una singură.*

## § 2. A doua problemă bicalorică

**27.** A doua problemă fundamentală pentru funcțiile bicalorice poate fi enunțată astfel, păstrînd notațiile din paragraful precedent:

*Să se determine funcția $v(x, t)$ care, în interiorul domeniului limitat de curbele $(\Gamma_1)$, $(\Gamma_2)$ în banda $[t_1, t_2]$, este bicalorică, iar pe frontieră verifică următoarele condiții inițiale*

$$v(x, t_1) = \varphi(x), \quad \Delta v(x, t_1) = \psi(x), \tag{15_1}$$

*precum şi următoarele condiţii la limită:*

Pe $\Gamma$: $\rho(x, t) = f_1(t)$, $\frac{\partial \rho}{\partial n}(x, t) = g_1(t)$,
Pe $\Gamma_2$: $\rho(x, t) = f_2(t)$, $\frac{\partial \rho}{\partial n}(x, t) = g_2(t)$.

Ca şi în cazul primei probleme, putem şi aici, printr-un artificiu, să reducem condiţiile iniţiale la următoarele:

$$\rho(x, t_1) = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n}(x, t_1) = 0. \tag{15$_2$}$$

Este suficient să considerăm funcţia $u(x, t)$ dată de formula

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi (t - t_1)}} \int_a^b [\varphi(\xi) - (t - t_1)\, \psi(\xi)]\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_1)}}\, d\xi.$$

Se vede imediat, repetînd raţionamentul de la punctele 19 şi 20 că avem

$$\lim_{t \to t_1} u(x, t) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{dacă } x \in [a, b], \\ 0, & \text{dacă } x \notin [a, b], \end{cases}$$

$$\lim_{t \to t_1} \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = \begin{cases} \psi(x), & \text{dacă } x \in [a, b], \\ 0, & \text{dacă } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Deci, dacă punem

$$U(x, t) = \rho(x, t) - u(x, t),$$

condiţiile iniţiale ($15_1$) devin, pentru $U(x, t)$,

$$U(x, t_1) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial n}(x, t_1) = 0.$$

Putem, deci, presupune de la început

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad \psi(x) \equiv 0.$$

**28.** Vom scrie, acum, ecuaţia $\Delta^2 \rho = 0$ sub forma sistemului echivalent

$$\Delta \rho = w, \quad \Delta w = 0. \tag{16}$$

Funcţia calorică $w$ trebuie să fie nulă pe segmentul $A_1 A_2$ şi să ia, respectiv, valorile $g_1$ şi $g_2$ pe arcele $\Gamma_1$, $\Gamma_2$. Soluţia acestei probleme este cunoscută [vezi de pildă, [9]] *).

Odată $w$ determinat, funcţia $\rho$, care satisface ecuaţia

$$\Delta \rho = W,$$

unde, de astă dată, $w$ este cunoscut, se determină punînd condiţia de a se anula pe segmentul $A_1 A_2$ şi de a lua valorile respective $f_1$ şi $f_2$ pe arcele $\Gamma_1$ şi $\Gamma_2$. Şi această problemă este cunoscută.

Putem exprima soluţia problemei în mod foarte simplu, prin mijlocirea funcţiei lui Green ataşată domeniului dat şi ecuaţiei căldurii, în felul următor:

*) p. 319.

În primul rînd, avem, presupunînd pe $w$ cunoscut,

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\int_{\Gamma_2} f_2 \frac{\partial G}{\partial \xi}\, d\tau - \int_{\Gamma_1} f_1 \frac{\partial G}{\partial \xi}\, d\tau\right) - \\ - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D w\, G(x, t; \xi, \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

Pe de altă parte,

$$w = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\int_{\Gamma_2} g_2 \frac{\partial G}{\partial \xi}\, d\tau - \int_{\Gamma_1} g_1 \frac{\partial G}{\partial \xi}\, d\tau\right).$$

Introducînd această valoare a lui $w$ în prima formulă, obținem funcția căutată.

Vom vedea, în paragrafele următoare cum aceeași problemă se poate rezolva pe o altă cale, care ne va permite generalizarea ei cu ușurință la cazul funcțiilor policalorice de un ordin oarecare.

## § 3. Extensiunea formulei lui Green

**29.** Reamintim aici formula lui Green pentru operatorul $\square$ [9]:

$$\iint_D (v \square u - u \square v)\, dx dt = \int_C uv\, dx + \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}\right) dt. \tag{17}$$

Vom avea nevoie de extensiunea acestei formule la cazul operatorilor iterați $\square^p$ și $\square^p$. În acest scop, vom da, în prealabil, formulei precedente, care nu prezintă în membrul al doilea, nici o simetrie aparentă, o formă mai simetrică, prin mijlocirea unor convenții de calcul, utilizate cu succes și în alte probleme [2]. Să punem

$$\frac{\partial}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial}{\partial t} = T.$$

Atunci

$$\square = X^2 - T, \quad \square = X^2 + T.$$

Considerînd operatorii $\square$ și $\square$ ca polinoame în literele respective, putem scrie

$$\frac{\partial \square}{\partial X} = 2X, \quad \frac{\partial \square}{\partial T} = -1,$$

$$\frac{\partial \square}{\partial X} = 2X, \quad \frac{\partial \square}{\partial T} = 1,$$

deci

$$\frac{\partial \square u}{\partial X} = 2\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \square u}{\partial T} = -u,$$

$$\frac{\partial \square v}{\partial X} = 2\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial \square v}{\partial T} = v.$$

Prin urmare

$$u\nu = \frac{1}{2}\left(u\,\frac{\partial \nabla \nu}{\partial T} - \nu\,\frac{\partial \Delta u}{\partial T}\right),$$

$$\nu\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial \nu}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\nu\,\frac{\partial \Delta}{\partial X} - u\frac{\partial \nabla \nu}{\partial X}\right).$$

Dacă $\alpha'$, $\beta'$ sînt cosinușii directori ai normalei interioare la curba $C$, atunci

$$dx = \beta'\,ds,\quad dt = -\alpha'\,ds,$$

deci

$$u\nu\,dx + \left(\nu\,\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)dt = \frac{1}{2}\left[\left(u\,\frac{\partial \nabla \nu}{\partial T} - \nu\,\frac{\partial \Delta u}{\partial T}\right)\beta' + \right.$$

$$\left. + \left(u\,\frac{\partial \nabla \nu}{\partial X} - \nu\,\frac{\partial \Delta u}{\partial X}\right)\alpha'\right]ds,$$

sau

$$u\,\nu\,dx + \left(\nu\,\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)dt = \frac{1}{2}\left[u\left(\frac{\partial \nabla \nu}{\partial X}\,\alpha' + \frac{\partial \nabla \nu}{\partial T}\,\beta'\right) - \right.$$

$$\left. - \nu\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial X}\alpha' + \frac{\partial \Delta u}{\partial X}\beta'\right)\right]ds.$$

Vom pune iarăși, în mod convențional,

$$\frac{\partial}{\partial X}\alpha' + \frac{\partial}{\partial T}\beta' = \frac{d}{dn}. \tag{18}$$

Atunci formula (17) se poate scrie, în definitiv, sub forma următoare

$$\iint_D (\nu\,\Delta u - u\,\nabla\nu)\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\int_C \left(\nu\,\frac{d\Delta u}{dn} - u\frac{d\nabla\nu}{dn}\right)ds, \tag{19}$$

cu totul analogă, ca aspect, formulei lui Green pentru operatorul lui Laplace.

**30.** Formula (19) se poate extinde cu ușurință la operatorii $\Delta^p$, $\nabla^p$, lucru care nu se poate face cu formula (17). Să scriem, într-adevăr, această formulă, mai întîi pentru funcțiile $\nabla\nu$ și $u$, apoi pentru funcțiile $\nu$ și $\Delta u$:

$$\iint_D (\nabla\nu\,\Delta u - u\nabla^2\nu\,d\,x\,dt = -\frac{1}{2}\int_C \left(\nabla\nu\,\frac{d\Delta u}{dn} - u\,\frac{d\nabla^2\nu}{dn}\right)ds,$$

$$\iint_D (\nu\,\Delta^2 u - \Delta u\,\nabla\nu)\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\int_C \left(\nu\,\frac{d\Delta^2 u}{dn} - \Delta u\,\frac{d\nabla\nu}{dn}\right)ds.$$

Adunînd aceste formule membru cu membru, obținem

$$\iint_D (\nu\Delta^2 u - u\nabla^2\nu)\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\int_C \left(\nu\,\frac{d\Delta u}{dn} - u\,\frac{d\nabla^2\nu}{dn}\right)ds - \tag{20}$$

$$-\frac{1}{2}\int_C \left(\nabla\nu\,\frac{d\Delta u}{dn} - \Delta u\,\frac{d\nabla\nu}{dn}\right)ds.$$

Prin iterarea procedeului indicat, obținem următoarea formulă fundamentală

$$\iint_D (v\Delta^p u - u\nabla^p v)\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\int_\sigma \left(\nabla^i v \frac{d\overset{p-i}{\Delta} u}{dn} - \Delta^i u \frac{d\overset{p-i}{\nabla} v}{dn}\right) ds. \quad (21)$$

În aplicații la problemele de frontieră, va trebui să ne reamintim totdeauna caracterul simbolic al «derivatelor normale» care figurează în membrul al doilea. Astfel, pentru a da un exemplu, avem

$$\frac{d\Delta^2 u}{dn} = \frac{\partial \Delta^2 u}{\partial X}\alpha' + \frac{\partial \Delta^2 u}{\partial T}\beta'.$$

Dar

$$\Delta^2 u = X^4 - 2X^2 T + T^2,$$

deci

$$\frac{\partial \Delta^2 u}{\partial X} = 4X^3 - 4XT, \quad \frac{\partial \Delta^2 u}{\partial T} = -2X^2 + 2T,$$

adică

$$\frac{\partial \Delta^2 u}{\partial X} = 4\frac{\partial \Delta u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Delta^2 u}{\partial T} = -2\Delta u,$$

prin urmare

$$\frac{d\Delta^2 u}{dn} = 4\frac{\partial \Delta u}{\partial x}\alpha' - 2\Delta u\,\beta'.$$

## § 4. Funcțiile lui Green de ordinul p. Legea permutării argumentelor

**31.** După cum se știe, funcția preliminară a lui Green $g(x, t; \xi, \tau)$, verifică în raport cu $\xi$, $\tau$ ecuația

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial g}{\partial \tau} = 0.$$

Ea este nulă pe segmentul $B_1 B_2$ și coincide cu funcția

$$\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}$$

pe arcele $\Gamma_1$, $\Gamma_2$. Funcția $G(x, t; \xi, \tau)$ a lui Green pentru ecuația căldurii, este definită de relația

$$G(x, t; \xi, \tau) = g(x, t; \xi, \tau) - \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}.$$

Această funcție de $\xi$, $\tau$ se bucură de următoarele proprietăți:

1° Este regulată în orice punct $(\xi, \tau)$ al domeniului $D$, afară de punctul $\xi = x$, $\tau = t$;

2° Verifică, în orice punct al domeniului $D$, afară de punctul $\xi = x$, $\tau = t$, ecuaţia $\overline{\square} G = 0$;

3° Este nulă pe arcele $\Gamma_1$ şi $\Gamma_2$.

În sfîrşit, se vede imediat, în baza proprietăţii de monotonie a funcţiilor calorice (ca şi a soluţiilor ecuaţiei adjuncte $\overline{\square} v = 0$, că avem, în orice punct interior, (afară de punctul $x$, $t$).

$$G(x, t; \xi, \tau) < 0.$$

După cum se ştie, cunoaşterea funcţiei lui Green pentru domeniul $D$ permite imediata rezolvare a problemei fundamentale pentru ecuaţia căldurii şi chiar pentru ecuaţia neomogenă

$$\square u = f(x, t). \tag{22}$$

Dacă $\psi_1$ şi $\psi_2$ sînt valorile pe care $u$ trebuie să le ia pe arcele $\Gamma_1$ şi $\Gamma_2$, soluţia ecuaţiei precedente, nulă pe segmentul $A_1A_2$, este dată de formula

$$\begin{aligned} u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\int_{\Gamma_2} \psi_2 \frac{\partial G}{\partial \xi} d\tau - \int_{\Gamma_1} \psi_1 \frac{\partial G}{\partial \xi} d\tau\right) + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau, \end{aligned} \tag{23}$$

unde $(x, t)$ este un punct al laturii $B_1B_2$.

De aici rezultă că soluţia ecuaţiei (22), nulă pe arcele $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, şi pe segmentul $A_1A_2$, adică pe ceea ce se poate numi, din punct de vedere al celor două probleme fundamentale, «frontiera» domeniului $D$, este dată de formula

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau. \tag{24}$$

**32.** Pentru ecuaţia adjunctă

$$\overline{\square} v(x, t) = f(x, t), \tag{22'}$$

problema se pune în mod analog. Ea se poate deduce din problema precedentă prin schimbarea semnului lui $t$. Formularea problemei simplificate pentru ecuaţia (22') este, deci, următoarea:

*Cunoscîndu-se valorile funcţiei $v$ pe arcele $\Gamma_1$ şi $\Gamma_2$ şi ştiindu-se că funcţia este nulă pe segmentul $B_1B_2$, să se găsească valoarea acestei funcţii în interiorul domeniului şi pe segmentul $A_1A_2$.*

Să însemnăm cu $\overline{G}(x, t; \xi, \tau)$ funcţia lui Green pentru ecuaţia (22'). Calculele clasice, bine cunoscute, se pot relua pentru această ecuaţie. Ajungem, în definitiv, la formula

$$\begin{aligned} v(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\int_{\Gamma_1} \psi_2 \frac{\partial \overline{G}}{\partial \xi} d\tau - \int_{\Gamma_1} \psi_1 \frac{\partial \overline{G}}{\partial \xi} d\tau\right) + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D \overline{G}(\bar{x}, \bar{t}; \xi, \tau) f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau, \end{aligned} \tag{23'}$$

$\psi_1$ și $\psi_2$ fiind valorile pe care $\rho$ le ia pe arcele $\Gamma_1$, $\Gamma_2$. Aici $\bar{x}$, $\bar{t}$ sînt coordonatele unui punct de pe latura $A_1A_2$. Se vede că această formulă este, în întregime, analoagă formulei (23). Deducem, ca mai sus, că soluția ecuației (22'), nulă pe arcele $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ și pe segmentul $B_1B_2$, este dată de formula

$$\rho(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D \bar{G}(\bar{x}, \bar{t}; \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{24'}$$

Funcția $G$ se bucură de proprietăți în totul analoge funcției $G$:

1° este nulă pe arcele $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ și regulată în tot domeniul $D$, afară de punctul $\xi = x$, $\tau = t$;

2° verifică, în orice punct al domeniului, afară de punctul precedent, ecuația

$$\square \bar{G}(\bar{x}, \bar{t}; \xi, \tau) = \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \bar{G}}{\partial \tau} = 0;$$

3° avem, în orice punct interior, $\bar{G}(x, t; \xi, \tau) < 0$.

**33.** Să considerăm, în interiorul domeniului $D$, două puncte $M(x, t)$ și $\bar{M}(\bar{x}, \bar{t})$, cu $t > \bar{t}$ și să desprindem, din acest domeniu, un domeniu $D'$, prin două paralele $A_1'A_2'$ și $B_1'B_2'$, la axa $Ox$ care să lase cele două puncte în afară (fig. 2). În interiorul domeniului $D'$, funcțiile $u(\xi, \tau) = \bar{G}(\bar{x}, \bar{t}; \xi, \tau)$, $\rho(\xi, \tau) G = (x, t; \xi, \tau)$ sînt regulate și verifică, respectiv ecuațiile

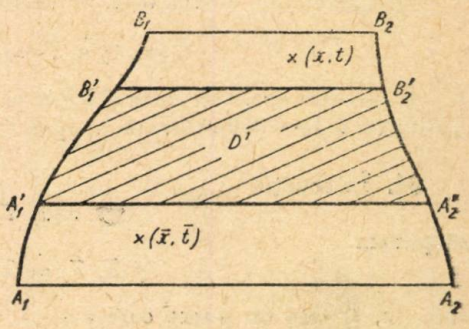


Fig. 2

$$\square u = 0, \quad \square \rho = 0.$$

Scriind, deci, formula (17) în care am schimbat variabilele $(x, t)$ prin $(\xi, \tau)$, pentru aceste două funcții și ținînd seama că atît $u$ cît și $\rho$ sînt *nule* pe arcele $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$, obținem

$$\int_{A_1'A_2'} \bar{G}(\bar{x}, \bar{t}; \xi, t_1) G(x, t; \xi, t_1)\, d\xi = \int_{B_1'B_2'} \bar{G}(\bar{x}, \bar{t}; \xi, t_2) G(x, t; \xi, t_2)\, d\xi, \tag{25}$$

$t_1$ și $t_2$ fiind, respectiv, ordonatele paralelelor $A_1'A_2'$ și $B_1'B_2'$. Să facem, acum, pe $t_1$ să tindă către $\bar{t}$ și pe $t_2$ către $t$. Ținînd seama că

$$G(x, t; \xi, \tau) = g(x, t; \xi, \tau) - U(x, t; \xi, \tau),$$

$$\bar{G}(\bar{x}, \bar{t}; \xi, \tau) = \bar{g}(\bar{x}, \bar{t}; \xi, \tau) - V(\bar{x}, \bar{t}; \xi, \tau),$$

unde $U$ și $V$ sînt soluțiile elementare ale ecuației căldurii și ecuației adjuncte a acesteia, obținem

$$\int_{A_1'A_2'} \overline{G}(\overline{x}, \overline{t}; \xi, t_1)\, G(x, t; \xi, t_1)\, d\xi =$$

$$= \int_{A_1'A_2'} \overline{g}(\overline{x}, \overline{t}; \xi, t_1)\, G(x, t, ; \xi, t_1)\, d\xi -$$

$$- \int_{A_1'A_2'} V(\overline{x}, \overline{t}; \xi, t_1)\, G(x, t; \xi, t_1)\, d\xi,$$

de unde, observînd că $\overline{g}(\overline{x}, \overline{t}; \xi, \overline{t}) \equiv 0$,

$$\lim_{t_1 \to t} \int_{A_1'A_2'} \overline{G}(\overline{x}, \overline{t}; \xi, t_1)\, G(x, t; \xi, t_1)\, d\xi = -2\sqrt{\pi}\, G(x, t; \overline{x}, \overline{t}).$$

În același mod, vom avea

$$\lim_{t_2 \to t} \int_{B_1'B_2'} \overline{G}(\overline{x}, \overline{t}; \xi, t_2)\, G(x, t; \xi, t_2)\, d\xi = -2\sqrt{\pi}\, \overline{G}(\overline{x}, \overline{t}; x, t).$$

Egalitatea (25) devine deci, la limită,

$$G(x, t; \overline{x}, \overline{t}) = \overline{G}(\overline{x}, \overline{t}; x, t). \tag{26}$$

În această egalitate constă legea permutării argumentelor *). Reamintim că egalitatea a fost demonstrată în ipoteza $t \geqslant \overline{t}$.

**34.** În ecuația

$$\square\, \varphi(\overline{x}, \overline{t}) = f(\overline{x}, \overline{t}),$$

să punem

$$f(\overline{x}, \overline{t}) = G(x, t; \overline{x}, \overline{t}),$$

unde $(x, t)$ este un punct oarecare.

Atunci formula (24′) devine

$$\varphi(x, t; \overline{x}, \overline{t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D \overline{G}(\overline{x}, \overline{t}; \xi, \tau)\, G(x, t; \xi, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

sau, ținînd seama de formula (26),

$$\varphi(x, t; \overline{x}, \overline{t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D G(x, t; \xi, \tau)\, G(\xi, \tau; \overline{x}, \overline{t})\, d\xi\, d\tau,$$

deoarece avem, evident $\tau \geqslant \overline{t}$.

Vom nota soluția dată de această ecuație astfel: $G^2(x, t; \overline{x}, \overline{t})$.

Dacă, acum, în ecuația de mai sus punem

$$f(\overline{x}, \overline{t}) = G^2(x, t; \overline{x}, \overline{t}),$$

*) Nu am întîlnit această relație în nici unul din lucrările consacrate ecuației căldurii, pe care le-am putut consulta.

soluția acestei ecuații, nulă pe arcele $\Gamma_1\Gamma_2$, ca și pe latura $B_1B_2$, soluție pe care o vom nota cu $G^3(x, t; \overline{x}, \overline{t})$, este dată de formula

$$G^3(x, t; \overline{x}, \overline{t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D \overline{G}(\overline{x}, \overline{t}; \xi, \tau)\, G^2(x, t; \xi, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

sau

$$G^3(x, t; \overline{x}, \overline{t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D G^2(x, t; \xi, \tau)\, G(\xi, \tau; \overline{x}, \overline{t})\, d\xi\, d\tau.$$

În general, dacă punem

$$G^i(x, t; \overline{x}, \overline{t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D G^{i-1}(x, t; \xi, \tau)\, G(\xi, \tau; \overline{x}, \overline{t})\, d\xi\, d\tau, \quad (i = 2, 3, \ldots),$$

funcțiile $G(x, t; \overline{x}, \overline{t})$ se bucură de următoarele proprietăți, ca funcții de variabilele $\overline{x}, \overline{t}$:

1° Avem

$$\Box^j G^i(x, t; \overline{x}, \overline{t}) = G^{i-j}(x, t; \overline{x}, \overline{t}), \quad (j < i). \tag{27}$$

2° Funcțiile $G^i$ sînt toate nule pe arcele $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ ca și pe latura $B_1B_2$.

## § 5. Rezolvarea problemei a doua fundamentale pentru funcțiile policalorice

**35.** Fie $u(x, t)$ o funcție definită în domeniul $D$ din figura 2, posedînd operatorii $\Box^i u$, $i = 1, 2, \ldots, p$, continui în acest domeniu și verificînd în plus ecuația

$$\Box^p u(x, t) = f(x, t), \tag{28}$$

unde $f$ este o funcție continuă în domeniul considerat.

Problema pe care o vom rezolva în acest paragraf este următoarea:

*Cunoscîndu-se valorile pe care șirul de funcții*

$$u(x, t), \Box u(x, t), \ldots, \Box^{p-1} u(x, t) \tag{29}$$

*le ia pe arcele $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ precum și pe latura $A_1A_2$, să se determine valorile funcției $u(x, t)$ pe segmentul $B_1B_2$.*

Pentru $f \equiv 0$, obținem ceea ce noi vom numi *a doua problemă fundamentală* pentru funcțiile calorice.

Considerațiile dezvoltate în paragraful 2, precum și în paragrafele 3 și 4 ale acestui capitol ne vor permite să rezolvăm cu ușurință problema enunțată. Să notăm într-adevăr, cu $t_1$ ordonata punctelor de pe latura $A_1A_2$ și să punem, respectiv,

$$u(x, t_1) = f_0(x), \quad \Box^i u(x, t_1) = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Să presupunem funcțiile $f_0, f_1, \ldots, f_{p-1}$ prelungite prin continuitate pe întreaga axă a $x$-lor, astfel încît să avem, însemnînd cu $f_i^*(x)$ prelungirea lui $f_i(x)$,

$$|f_i^*(x)| < M e^{Kx^2}, \quad (i = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Putem, pentru a simplifica, lua $K = 0$. Atunci vom putea defini pe $f^*(x)$ astfel, dacă însemnăm, respectiv, cu $a_1$ și $a_2$ abscisele punctelor $A_1$ și $A_2$

$$f_i^*(x) = \begin{cases} f_i(a_1), & \text{dacă } x \leqq a_1, \\ f_i(x), & \text{dacă } a_1 < x < a_2, \\ f_i(a_2), & \text{dacă } x \geqq a_2, \end{cases}$$

pentru $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Să punem

$$F^*(x, t-t_1) = f_0^*(x) - \frac{t-t_1}{1} f_1^*(x) + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{(t-t_1)^{p-1}}{(p-1)!} f_{p-1}^*(x).$$

După cum știm (Capitolul IV, formula (8)), funcția

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-t_1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\xi, t-t_1)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_1)}}\, d\xi$$

este policalorică de ordinul $p$ în întreaga bandă cuprinsă între laturile $A_1A_2$ și $B_1B_2$, presupuse prelungite indefinit, și avem, în plus,

$$\lim_{t \to t_1} u^*(x,t) = f_0^*(x), \quad \lim_{t \to t_1} \Delta^i u^*(x,t) = f_i^*(x'), \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1).$$

În particular, dacă $x$ este cuprins între $a_1$ și $a_2$ vom avea

$$\lim_{t \to t_1} u^*(x,t) = f_0(x), \quad \lim_{t \to t_1} \Delta^i u^*(x,t) = f_i(x), \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Să punem, atunci

$$U(x, t) = u(x, t) - u^*(x, t).$$

Se vede imediat că $U(x, t)$ se anulează, împreună cu operatorii $\Delta U, \ldots, \Delta^{p-1} U$ pe latura $A_1A_2$. Așadar, adăugînd lui $u$ o funcție policalorică convenabilă de ordinul $p$, putem cere ca valorile pe care șirul (29) le ia pe latura $A_1A_2$ să fie nule.

**36.** Să înlocuim în formula fundamentală (21) pe $u$ printr-o integrală a ecuației (28) și să punem, în aceeași formulă, în care vom nota variabilele de integrare prin $\xi$ și $\tau$,

$$\varphi(x, t; \bar{x}, \bar{t}) = G^p(x, t+h; \bar{x}, \bar{t}),$$

unde $(x, t)$ este un punct situat pe latura $B_1B_2$, iar $h$ un număr pozitiv.

Punînd, pentru prescurtare,

$$G^p(x, t+h; \bar{x}, \bar{t}) = G_h^p(\bar{x}, \bar{t}),$$

formula (21) devine, dacă notăm variabilele de integrare cu $\xi$, $\tau$,

$$\iint_D G^p(x, t+h; \xi, \tau)\, f(\xi, \tau)\, d\xi d\tau = \tag{30}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-1} \int_{(\Gamma_1+\Gamma_2)} \left( G_h^{p-i} \frac{d\,\Delta^{p-i} u}{dn} - \Delta^i u \frac{dG_h^i}{dn} \right) ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-1} \int_{B_1B_2} \left( G_h^{p-i} \frac{d\,\Delta^{p-i} u}{dn} - \Delta^i u \frac{dG_h^i}{dn} \right) ds -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-1} \int_{A_1A_2} G_h^i \frac{d\,\Delta^{p-i} u}{dn}\, ds.$$

Dar funcțiile $G_h^{p-i}$ sînt nule pe arcele $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$. Deci

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{(\Gamma_1+\Gamma_2)} G_h^i \frac{d\,\Delta^{p-i}u}{dn}\,ds = 0. \tag{31}$$

Pe de altă parte

$$\frac{d\,\Delta^{p-i}u}{dn}\,ds = \left(\frac{\partial\,\Delta^{p-i}u}{\partial X}\alpha' + \frac{\partial\,\Delta^{p-i}u}{\partial T}\beta'\right)ds =$$

$$= -\frac{\partial\,\Delta^{p-i}u}{\partial X}\,d\tau - \Delta^{p-i-1}u\,d\xi = -2\frac{\partial\,\Delta^{p-i-1}u}{\partial\zeta}\,d\tau - \Delta^{p-i-1}u\,d\xi,$$

deci

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{A_1A_2} G_h^{p-i}\frac{d\,\Delta^{p-i}u}{dn}\,ds = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{A_1A_2} G_h^{p-i}\,\Delta^{p-i-1}u\,d\xi = 0, \tag{32}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{B_1B_2} G_h^{p-i}\frac{d\,\Delta^{p-i}u}{dn}\,ds = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{B_1B_2} G_h^{p-i}\,\Delta^{p-i-1}u\,d\xi = \tag{33}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{B_1B_2} G_h^{i+1}\,\Delta^i u\,d\xi.$$

De asemenea

$$\frac{d\,G_h^i}{dn} = \frac{d\,\nabla G_h^{i+1}}{dn} - \left(\frac{\partial\,\nabla G_h^{i+1}}{\partial X}\alpha' + \frac{\partial\,\nabla G_h^{i+1}}{\partial T}\beta'\right)ds =$$

$$= -2\frac{\partial\,G_h^{i+1}}{\partial\zeta}\,d\tau + G_h^{i+1}\,d\xi.$$

Deci, ținînd seama că funcțiile $G_h^{i+1}$ sînt nule pe arcele $\Gamma_1$, $\Gamma_2$,

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{(\Gamma_1+\Gamma_2)}\Delta^i u\frac{d\,G_h^i}{dn}\,ds = -\sum_{i=0}^{p-1}\int_{(\Gamma_1+\Gamma_2)}\Delta^i u\frac{\partial\,G_h^{i+1}}{\partial\zeta}\,d\tau, \tag{34}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{B_1B_2}\Delta^i u\frac{dG_h^i}{dn}\,ds = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{B_1B_2}\Delta^i u\;\;G_h^{i+1}\,d\xi. \tag{35}$$

Formula (30) devine, ţinînd seama de egalităţile (31), (32), (33), (34) şi (35),

$$\iint_D G^p(x, t+h; \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi d\tau = -\sum_{i=0}^{p-1} \int_{(\Gamma_1+\Gamma_2)} \Delta^i u \frac{\partial G_h^{i+1}}{\partial \xi} d\tau -$$

$$- \sum_{i=0}^{p-1} \int_{(B_1+B_2)} \Delta^i u\, \partial G_h^{i+1} d\xi. \tag{36}$$

Să facem, acum, pe $h$ să tindă către zero. Atunci avem

$$\lim_{h \to 0} G^{i+1}(x, t+h;\ x, t) = 0,$$

uniform în raport cu $x$, deci

$$\lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{p-1} \int_{B_1 B_2} \Delta^i u\, G^{i+1}(x, t+h;\ \xi, t)\, d\xi = 0.$$

Pe de altă parte,

$$\lim_{h \to 0} \int_{B_1 B_2} u(\xi, t)\, G(x, t+h; \xi, t)\, d\xi = -2\sqrt{\pi}\, u(x, t).$$

Deci, în definitiv, formula (36) se poate scrie

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{p-1} \int_{(\Gamma_1+\Gamma_2)} \Delta^i u \frac{\partial G^{i+1}(x, t; \xi, \tau)}{\partial \xi} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D G^p(x, t; \zeta, \tau)\, \Delta^p u(\xi, \tau)\, d\xi d\tau. \tag{37}$$

Aceasta este formula fundamentală care rezolvă problema a doua policalorică.

În particular, dacă $u$ este policalorică de ordinul $p$ în domeniul considerat, integrala dublă dispare din membrul al doilea şi formula precedentă devine

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{p-1} \int_{(\Gamma_1+\Gamma_2)} \Delta_i u \frac{\partial G^{i+1}(x, t; \xi, \tau)}{\partial \xi} d\tau. \tag{37'}$$

**37.** Vom arăta, acum, că soluţia dată de formula (37) este *unică*. Să presupunem, într-adevăr, că ecuaţia (28) ar admite două integrale $u_1$ şi $u_2$ care să satisfacă condiţiile enunţate la punctul 35.

Punînd

$$u_2 - u_1 = u,$$

funcţia $u$ va verifica, pe de o parte, ecuaţia

$$\Delta^p u = 0, \tag{28'}$$

iar pe de altă parte șirul (29) trebuie să se anuleze pe arcele $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, precum și pe latura $A_1A_2$. Vom arăta că, în asemenea condiții, $u \equiv 0$. Vom întrebuința, în acest scop, un raționament prin recurență, presupunînd că proprietatea este adevărată pentru funcțiile policalorice de ordin *mai mic decît p*. Într-adevăr, să punem

$$\Box u = \rho.$$

Avem

$$\Box^{p-1} \rho = 0,$$

iar pe de altă parte șirul

$$\rho, \Delta\rho, \ldots, \Box^{p-2} \rho; \quad (29)$$

coincide cu șirul (29) din care s-a suprimat primul termen. Deci acest șir se anulează pe arcele $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, ca și pe latura $A_1A_2$. Rezultă, $\rho$ fiind o funcție policalorică de ordinul $p - 1$, că avem

$$\rho \equiv 0,$$

deci

$$\Box u = 0.$$

Cu alte cuvinte $u$ este o funcție calorică, nulă pe arcele $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ ca și pe latura $A_1A_2$. Se știe că, în asemenea condiții,

$$u \equiv 0$$

și teorema de unicitate este demonstrată.

## Capitolul V

# STUDIUL UNEI INTEGRALE

## § 1. Cazul analitic

**38.** În tot cursul acestui capitol, ca și al capitolelor următoare, ne vom limita, pentru economie de spațiu, la cazul funcțiilor de două variabile $x$, $t$.

Fie $u(x, t)$ o funcție definită în banda

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 \leqq t \leqq t_1$$

bandă pe care o vom nota, pe scurt, $[0, t_1]$.

Vom presupune această funcție analitică în interiorul benzii considerate. În plus, vom presupune că există o constantă pozitivă $M$, precum și o constantă pozitivă $K$ legată de lărgimea $\delta$ a benzii considerate prin relația

$$4K\delta < 1,$$

astfel încît să avem

$$|u(x, t)| < Me^{Kx^2},$$

în orice punct al benzii.

Să punem

$$v(x,t;h)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}}\frac{u(\xi,\ t-h)}{\sqrt{h}}\,d\xi. \tag{1}$$

Această integrală diferă de celebra integrală a lui Poisson din teoria căldurii prin schimbarea argumentului $t$ în $t-h$, în funcţia $u$.

În condiţiile specificate mai sus, integrala precedentă are un sens bine determinat şi este, în orice punct $(x, t)$ al benzii $[0, t_1]$ o funcţie de $h$, definită în intervalul $[0, t]$.

În acest capitol ne propunem să facem studiul acestei funcţii de $h$, presupunînd, în primul rînd, funcţia $u$ analitică în banda $[0, t_1]$, apoi încercînd să înlăturăm această ipoteză.

**39.** Să punem, în integrala precedentă, $\xi - x = 2\sqrt{h}\,s$. Integrala devine

$$v(x,t;h)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}u(x+2s\sqrt{h},\ t-h)\,ds. \tag{2}$$

Pe de altă parte, pentru $h$ suficient de mic în valoare absolută, avem

$$\begin{aligned} u(x+2s\sqrt{h},t-h)&=u(x,t)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial u}{\partial x},\ 2\sqrt{h}\,s-\frac{\partial u}{dt}\,h\right)+\\ &+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}4hs^2-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\ 2h^{\frac{3}{2}}s+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ h^2\right)+\ldots. \end{aligned} \tag{3}$$

În membrul al doilea, derivatele parţiale sînt calculate, bineînţeles, în punctul $(x, t)$. Această dezvoltare este absolut convergentă. Putem deci, în membrul al doilea, să ordonăm termenii după puterile crescătoare ale lui $h$. Dar $h^n$ se găseşte:

1° în termenul $\dfrac{\partial^{2n}u}{\partial x^{2n}}$ al grupului al $2n$-lea din dezvoltarea precedentă. Coeficientul lui $h^n$ în acest termen este

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial^{2n}u}{\partial x^{2n}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}s^{2n}\,ds=\frac{1}{n!}\frac{\partial^{2n}u}{\partial x^{2n}}.$$

2° în termenul care conţine derivata

$$\frac{\partial^{2n-2k+1}u}{\partial x^{2n-4k+2}\,\partial t^{2k-1}},$$

al grupului al $(2n-2k+1)$-lea din dezvoltarea precedentă. Coeficientul lui $h^n$ din acest termen este

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2^{2n-4k+2}}{(2n-4k+2)!\ (2k-1)!}\frac{\partial^{2n-2k+1}u}{\partial x^{2n-4k+2}\,\partial t^{2k-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}s^{2n-4k+2}\,ds=$$

$$=\frac{1}{n!}C_n^{2k-1}\frac{\partial^{2n-2k+1}u}{\partial x^{2n-4k+2}\,\partial t^{2k-1}}.$$

3° în termenul care conține derivata

$$\frac{\partial^{2n-2k}u}{\partial x^{2n-4k}\,\partial t^{2k}}$$

al grupului al $(2n-2k)$-lea din dezvoltarea precedentă. Coeficientul lui $h^n$ din acest termen este

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2^{2n-4k}}{(2n-4k)!\,(2k)!}\,\frac{\partial^{2n-4k}u}{\partial x^{2n-4k}\,\partial t^{2k}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}s^{2n-4k}\,ds=\frac{1}{n!}C_n^{2k}\,\frac{\partial^{2n-2k}u}{\partial x^{2n-4k}\,\partial t^{2k}}.$$

Cum $k$ variază de la 1 la $n$, rezultă, în definitiv, că coeficientul lui $h^n$ în dezvoltarea funcției $v(x,t;h)$ după puterile lui $h$ este

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^{2n}u}{\partial x^{2n}}-C_n^1\frac{\partial^{2n-1}u}{\partial x^{2n-2}\,\partial t}+C_n^2\frac{\partial^{2n-2}u}{\partial x^{2n-4}\partial t^2}+\ldots+(-1)^n\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right]=\frac{1}{n!}\Delta^n u(x,t).$$

Deducem de aici, *în cazul analitic*, următoarea desfășurare remarcabilă

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}}\frac{u(\xi,t-h)}{\sqrt{h}}\,d\xi=u(x,t)+\frac{h}{1}\Delta u(x,t)+$$
$$+\frac{h^2}{2!}\Delta^2 u(x,t)+\ldots+\frac{h^n}{n!}\Delta^n u(x,t)+\ldots \tag{4}$$

## § 2. Unele rezultate preliminarii

**40.** Din dezvoltarea precedentă vom deduce cîteva identități importante. În primul rînd, din aspectul însuși al dezvoltării (4), deducem imediat

$$\Delta^p u(x,t)=\lim_{h\to 0}\frac{\partial^p v(x,t;h)}{\partial h^p},\quad (p=1,2,\ldots) \tag{5}$$

deci operatorul diferențial iterat $\Delta^p$ este o adevărată derivată de ordinul $p$, a unei anumite funcții, legate simplu de $u$, într-un anumit punct.

Să încercăm atunci să calculăm operatorul $\Delta^n u$ cu ajutorul formulei (5), ținînd seama de expresia lui $v$ dată de (1). Prezența exponențialei în integrală va permite să se facă derivarea sub semnul sumă, întrucît toate integralele obținute vor fi uniform convergente în raport cu $h$.

**41.** Să punem, așa cum am mai făcut (punctul 15),

$$\omega(h)=\frac{1}{\sqrt{h}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}}.$$

Atunci

$$\frac{\partial^n v}{\partial h^n}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}C_n^p\,\omega^{(p)}(h)\,\frac{\partial^{n-p}u(\xi,t-h)}{\partial t^{n-p}}\,d\xi. \tag{6}$$

Valoarea lui $\omega^p(h)$ a fost deja calculată la punctul 14, formula (27), cu singura deosebire că în acea formulă figura $n$ în loc de $p$ și $t$ în loc de $h$. Dacă

introducem această valoare în integrală şi apoi facem schimbarea de variabilă $\xi = x + 2\sqrt{h}\, s$, formula (6) se scrie

$$\frac{\partial^n \rho}{\partial h^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{n-p}}{h^p} C_n^p \frac{\partial^{n-p} u\left(x + 2\sqrt{h}\, s,\ t - h\right)}{\partial t^{n-p}} \varpi_p(s)\, e^{-s^2}\, ds, \qquad (6')$$

unde $\varpi_p(s)$ este funcţia definită de relaţia (28) de la punctul 14.

Dacă, în membrul al doilea, dezvoltăm toate funcţiile

$$\frac{\partial^{n-p} u\,(x + 2\sqrt{h}\, s,\ t - h)}{\partial t^{n-p}}$$

în serie de tipul (3), observăm imediat, ţinînd seama de relaţia (5), că termenul

$$\frac{\partial^{2n} u\,(x, t)}{\partial x^{2n}}$$

din operatorul $\Delta^n u\,(x, t)$ nu poate proveni decît din termenul corespunzător lui $p = n$ din formula (6'), adică din termenul

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\, h^n} \int_{-\infty}^{+\infty} u\,(x + 2\sqrt{h}\, s,\ t - h)\, \varpi_n(s)\, e^{-s^2}\, ds. \qquad (7)$$

Acest termen trebuie să aibe deci o limită finită $L$ pentru $h \to 0$. Deci

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u\,(x + 2\sqrt{h}\, s,\ t - h)\, \varpi_n(s)\, e^{-s^2}\, ds = 0.$$

Pe de altă parte, un raţionament clasic ne arată, în cazul cînd $u\,(x, t)$ verifică următoarea condiţie

$$|\, u\,(x, t)\,| < M\, e^{Kx^2}, \qquad (8)$$

că avem

$$\lim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_n(s)\, e^{-s^2}\, u\left(x + 2\sqrt{h}\, s,\ t - h\right) ds = \frac{u\,(x, t)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_n(s)\, e^{-s^2}\, ds.$$

În tot acest paragraf, vom face, pe lîngă ipoteza (8), ipoteza că toate derivatele care intră în compunerea operatorului $\Delta^n$ verifică o astfel de inegalitate (8), cu acelaşi $K$.

Deducem de aici că avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_n(s)\, e^{-s^2}\, ds = 0, \qquad (9)$$

dentitate pe care am utilizat-o anterior (punctul 15).

**42.** Să facem, în expresia (7), $h \to 0$. Vom avea, aplicînd regula lui Hospital,

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n\, h^{n - \frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} s\, \varpi_n(s)\, e^{-s^2}\, u'_x\,(x + 2\sqrt{h}\, s,\ t - h)\, ds -$$

$$- \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n h^{n-1}} \int_{-8}^{+\infty} \varpi_n(s)\, e^{-s^2}\, u'_t\,(x + 2\sqrt{h}\, s,\ t - h)\, ds.$$

Pentru aplicarea acestei reguli este suficient să se admită că și derivatele $u'_x$ $u'_t$ verifică o condiție de creștere de tipul (8), ca și funcția $u$, ceea ce am presupus mai sus.

Dar, în acest caz,

$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} s\,\varpi_n(s)\,e^{-s^2}\,u'_x\,(x+2\sqrt{h}\,s,\ t-h)\,ds = u'_x(x,t)\int_{-\infty}^{+\infty} s\,\varpi_n(s)\,e^{-s^2}\,ds = 0,$$

deoarece $s\,\varpi_n(s)$ este o funcție impară.

De asemenea,

$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_n(s)\,e^{-s^2}\,u'_t\,(x+2\sqrt{h}\,s,\ t-h)\,ds = u'_t(x,t)\int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_n(s)\,e^{-s^2}\,ds = 0,$$

în baza relației (9).

Să aplicăm, atunci, încă odată, regula lui Hospital, nereținînd în membrul drept decît termenul conținînd derivata $u''_{x^2}$. Vom avea, astfel, de evaluat limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)h^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} s^2\,\varpi_n(s)\,e^{-s^2}\,u''_{x^2}\,(x+2\sqrt{h}\,s,\ t-h)\,ds.$$

Dar

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s^2\,\varpi_n(s)\,e^{-s^2}\,u''_{x^2}\,(x+2\sqrt{h}\,s,\ t-h)\,ds = \frac{u''_{x^2}(x,t)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s^2\,\varpi_n(s)\,e^{-s^2}\,ds$$

și cum limita numărătorului trebuie să fie din nou nulă, rezultă că avem

$$\int_{-8}^{+\infty} s^2\,\varpi_n(s)\,e^{-s^2}\,ds = 0.$$

Să aplicăm, atunci integralei (7) regula lui Hospital de $2n$ ori, nereținînd de fiecare dată decît termenul care conține derivata lui $u$ luată numai în raport cu $x$. Pe de o parte obținem identitățile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^{2p}\,\varpi_n(s)\,e^{-s^2}\,ds = 0, \tag{10}$$

(pe care le-am utilizat anterior (punctul 15)), iar pe de altă parte o ultimă aplicare a regulii lui Hospital (*a* $2n^a$), ne conduce la calculul limitei

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2n}}{(2n)!} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{2n}\,\varpi_n(s)\,e^{-s^2}\,\frac{\partial^{2n} u\,(x+2\sqrt{h}\,s,\ t-h)}{\partial x^{2n}}\,ds.$$

Valoarea acestei limite este

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial x^{2n}} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{2n}\,\varpi_n(s)\,e^{-s^2}\,ds.$$

Dar valoarea acestei limite trebuie să fie, din cauza relației (5), $\dfrac{\partial^{2n} u\,(x.\ t)}{\partial x^{2n}}$.

Deducem, de aici, identitatea

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} s^{2n}\,\varpi_n(s)\,e^{-s^2}\,ds = \frac{(2n)!}{2^{2n}}. \tag{11}$$

Identităţile (9), (10), (11) ne vor fi utile în paragraful următor.

## § 3. Formula fundamentală

**43.** Să presupunem că funcţia $u(x, t)$, definită în banda $[0, t_1]$ se bucură de următoarele proprietăţi:

1° Posedă derivatele parţiale care intră în compunerea operatorului $\Delta^n u$ şi numai acestea.

Aceste derivate parţiale, anume

$$\frac{\partial^{2n-p} u}{\partial x^{2n-2p}\,\partial t^p},\ (p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

sînt continue în banda considerată.

2° Există două numere pozitive $M$ şi $K$, astfel încît să avem

$$|u(x,\ t)| < M\,e^{Kx^2},\quad \left|\frac{\partial^{2m-p} u}{\partial x^{2m-2p}\,\partial t^p}\right| < M\,e^{Kx^2},$$

$$(m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n;\ p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Vom arăta că, în asemenea condiţii, avem

$$\Delta^m u(x,\ t) = \lim_{h\to 0}\frac{\partial^m \nu(x, t; h)}{\partial h^m},\ (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{5'}$$

$\nu$ fiind integrala definită de relaţia (1).

**44.** Vom porni de la relaţia

$$\frac{\partial^m \nu}{\partial h^m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^{m-p}}{h^p}\,C_m^p\,\varpi_p(s)\,e^{-s^2}\,\frac{\partial^{m-p} u(x + 2\sqrt{h}\,s,\ t-h)}{\partial t^{m-p}}\,ds.$$

Membrul al doilea este suma unor expresii de forma

$$E_m^p(h) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{(-1)^{m-p}}{h^p}\,C_m^p\int_{-\infty}^{+\infty}\varpi_p(s)\,e^{-s^2}\,\frac{\partial^{m-p} u(x + 2\sqrt{h}\,s,\ t-h)}{\partial t^{m-p}}\,ds. \tag{12}$$

$$(p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Totul revine la calculul limitei pentru $h \to 0$, a fiecărei din aceste expresii. Vom examina mai întîi cazul $p > 0$.

Pentru $h \to 0$ expresia precedentă se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$. Într-adevăr, în baza identităţii (9) şi a ipotezelor făcute, avem

$$\lim\int_{-\infty}^{+\infty}\varpi_p(s)\,e^{-s^2}\,\frac{\partial^{m-p} u(x + 2\sqrt{h}\,s,\ t-h)}{\partial t^{m-p}}\,ds = \frac{\partial^{m-p} u(x,\ t)}{\partial t^{m-p}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varpi_p(s)\,e^{-s^2}\,ds = 0.$$

Aplicarea regulii lui Hospital ne va conduce la aflarea a două limite, obținute prin derivarea în raport cu $h$, a funcției compuse

$$\frac{\partial^{m-p} u(x + 2\sqrt{h}\, s,\ t - h)}{dt^{m-p}}. \tag{13}$$

Așadar

$$\lim_{h\to 0} E_m^p(h) = \lim_{h\to 0} \frac{C_m^p}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^{m-p}}{ph^{p-\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} s\varpi_p(s)\, e^{-s^2} \frac{\partial^{m-p+1} u(x + 2\sqrt{h}\, s,\ t - h)}{\partial x\ \partial t^{m-p}}\, ds - \tag{14}$$

$$- \lim_{h\to 0} \frac{C_m^p}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^{m-p}}{ph^{p-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_p(s)\, e^{-s^2} \frac{\partial^{m-p+1} u(x + 2\sqrt{h}\, s,\ t - h)}{\partial t^{m-p+1}}\, ds.$$

Cele două integrale din membrul al doilea tind către zero, prima din cauza imparității polinomului $s\varpi_p(s)$, a doua din cauza identității (9).

Să mai observăm că derivarea în raport cu primul argument al funcției (13) a avut ca efect scăderea puterii lui $h$ de la numitor cu $\frac{1}{2}$ și înmulțirea coeficientului de sub integrală cu $s$, în timp ce derivarea în raport cu al doilea argument a avut ca efect reducerea exponentului lui $h$ de la numitor cu o unitate.

Să presupunem, atunci, că aplicăm mai departe, în membrul al doilea al relației (14), regula lui Hospital, de $k$ ori. Vom obține abstracție făcînd, pentru moment, de coeficienții constanți, o sumă de limite de tipul următor

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{p-\frac{k}{2}-\frac{r}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} s^q \varpi_p(s)\, e^{-s^2} \frac{\partial^{m-p+k} u(x + 2\sqrt{h}\, s,\ t - h)}{\partial x^q\ \partial t^{m-p+r}}\, ds,$$

unde $q + r = k$. Se vede de aici că atîta timp cît $r \neq 0$, există o valoare a lui $k$ *mai mică decît* $2p$ pentru care exponentul lui $h$ devine negativ și deci limita precedentă este nulă.

Rămîne de examinat cazul $r = 0$, deci $k = q$.

Atunci aplicarea regulii lui Hospital se poate face exact de $2p$ ori. Vom obține astfel, ținînd seama, de data aceasta, și de coeficienții numerici,

$$\lim_{h\to 0} E_m^p(h) = \frac{C_m^p}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^{m-p} 2^{2p}}{(2p)!} \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{2p} \varpi_p(s)\, e^{-s^2} \frac{\partial^{m+p} u(x + 2\sqrt{h}\, s,\ t - h)}{\partial x^{2p}\ \partial t^{m-p}}\, ds =$$

$$= \frac{C_m^p}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^{m-p} 2^{2p}}{(2p)!} \frac{\partial^{m+p} u(x,t)}{\partial x^{2p} \partial t^{m-p}} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{2p} \varpi_p(s) \cdot e^{-s^2} ds,$$

adică, ținînd seama de identitatea (11).

$$\lim_{h\to 0} E_m^p(h) = (-1)^{m-p} C_m^p \frac{\partial^{m+p} u(x,t)}{\partial x^{2p} \partial t^{m-p}}.$$

Să examinăm, acum, cazul $p = 0$. Avem

$$E_m^0(h) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \frac{\partial^m u(x + 2\sqrt{h}s,\ t - h)}{\partial t^m}\, ds.$$

Avem imediat

$$\lim_{h \to 0} E_m^0(h) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial^m u(x,\ t)}{\partial t^m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = (-1)^m \frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m}.$$

Cu aceasta, relaţia (5′) este complet demonstrată.

**45.** Calculele făcute mai sus ne permit să enunţăm următoarea

Teoremă fundamentală. *Fie $u(x, t)$ o funcţie definită în banda $[0, t_1]$ cu următoarele proprietăţi:*

1° *Posedă derivatele parţiale pînă la ordinele necesare formării operatorului $\Delta^n u(x, t)$;*

2° *Aceste derivate parţiale sînt continue în banda considerată;*

3° *Există un număr pozitiv $M$ şi un număr pozitiv $K$ astfel încît să avem*

$$|u(x, t)| < Me^{Kx^2},\quad |D^m u| < M.e^{Kx^2},\quad (m = 1, 2, .., 2n),$$

*Dm fiind o derivată parţială de ordin $m$ a lui $u$.*

*In asemenea condiţii, există un număr $\varepsilon_n(h)$ tinzînd către zero odată cu $h$, astfel încît să avem*

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4h}} u(\xi,\ t - h)\, d\xi = u(x,\ t) + \frac{h}{1} \Delta u(x,\ t) + \frac{h^2}{2!} \Delta^2 u(x,\ t) + \ \ldots\ + \frac{h^n}{n!} [\Delta^n u(x,\ t) + \varepsilon_n(h)]. \tag{15}$$

Formula aceasta este fundamentală pentru ceea ce va urma.

Să observăm, numai, de acum, că pentru o funcţie policalorică de ordinul $n$ integrala de mai sus se reduce la un polinom de gradul $n - 1$ în $h$.

Pentru $n \to \infty$ cădem peste formula (4) din paragraful 1, formulă obţinută în condiţii mult mai restrictive pentru funcţia $u$.

## Capitolul VI

# FORMULE DE MEDIE PENTRU FUNCŢIILE POLICALORICE

## § 1. Medii de diverse ordine. Teorema fundamentală de medie

**46.** Să punem

$$\mu_0(u;\ h) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4h}} \frac{u(\xi,\ t - h)}{\sqrt{h}}\, d\xi. \tag{1}$$

În integrala din membru doi figurează valorile funcției $u$ pe paralela la axa $Ox$, de ordonată $t - h$. Vom numi, de aceea, expresia $\mu_0(u; h)$ medie (ponderată) de ordinul zero a funcției pe paralela $t - h$.

Formula (15) din Capitolul precedent se scrie, cu notația introdusă,

$$\mu_0(u; h) = u(x, t) + \frac{h}{1}\Delta u(x, t) + \frac{h^2}{2!}\Delta^2 u(x, t) + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\Delta^{n-1} u(x,t) + \frac{h^n}{n!}[\Delta^n u(x,t) + \varepsilon_n]. \tag{2}$$

Să punem

$$\mu_s(u; h) = \frac{2}{h^2}\int_0^h h'\mu_{s-1}(u; h')\, dh' \quad (s = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Vom numi expresiile

$$\mu_1(u; h),\ \mu_2(u; h),\ \ldots, \mu_s(u; h),\ \ldots$$

mediile (ponderate) ale funcției $u$ în banda $[t - h,\ t,]$ de ordine respective $1, 2, \ldots, s, \ldots$.

Din (2) deducem, ținînd seama de relația de recurență (3),

$$\mu_s(u; h) = u(x, t) + \frac{2^s}{3^s}\frac{h}{1!}\Delta u(x,t) + \frac{2^s}{4^s}\cdot\frac{h^2}{2!}\Delta^2 u(x, t) + \tag{4}$$

$$+ \ldots + \frac{2^s}{(n+1)^s}\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\Delta^{n-1} u(x, t) + \frac{2^s}{(n+2)^s}\frac{h^n}{n!}[\Delta^n u(x,t) + \varepsilon_n^s]$$

unde

$$\varepsilon_n^s = \frac{n+2}{h^{n+2}}\int_0^h h'^{n+1}\cdot \varepsilon_n^{s-1} d'h'.$$

Să presupunem că

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon_n^{s-1} = 0.$$

Din relația precedentă deducem imediat, aplicînd o singură dată regula lui Hospital

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon_n^s = \lim_{h\to 0} \varepsilon_n^{s-1} = 0.$$

Dar

$$\lim \varepsilon_n^0 = 0 \ (\varepsilon_n^0 = \varepsilon_n).$$

Deci $\varepsilon_n^s$ tinde către zero odată cu $h$, oricare ar fi numărul natural $s$.

**47.** Să presupunem funcţia $u(x, t)$ policalorică de ordinul $p$ în banda $[0, t_1]$. Dacă $u(x, t)$ satisface, în plus, condiţiile teoremei de la punctul 45, atunci formulele (2) şi (4) de la punctul precedent devin

$$\mu_0(u;h) = u(x,t) + \frac{h}{1!}\Delta u(x,t) + \frac{h^2}{2!}\Delta^2 u(x,t) + \tag{2'}$$

$$+ \ldots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!}\Delta^{p-1}u(x,t). \tag{4'}$$

$$\mu_s(u;h) = u(x,t) + \frac{2^s}{3^s}\frac{h}{1}\Delta u(x,t) + \frac{2^s}{4^s}\frac{h^2}{2'}\Delta^2 u(x,t) +$$

$$+ \ldots + \frac{2^s}{p+1}\frac{h^{p-1}}{(p-1)!}\Delta^{p-1}u(x,t), (s=1,2,\ldots.)$$

Vom arăta că aceste formule rămîn valabile în condiţii mai generale pentru funcţia policalorică $u(x, t)$. Pentru aceasta, vom introduce unele definiţii cu scopul de a evita repetiţiile.

Vom spune că funcţia policalorică $u(x, t)$ este cu *creştere regulată* dacă avem, în banda $[0, t_1]$,

$$|u(x, t)| < Me^{Kx^2},$$

constantele pozitive $M$ şi $K$ avînd semnificaţiile cunoscute. Dacă, în plus, avem

$$|\Delta^i u(x,t)| < Me^{Kx^2}, \ (i = 1, 2, 3, .., p-1),$$

vom spune că $u(x, t)$ este cu *creştere complet regulată* în banda $[0, t_1]$.

Vom arăta că *formulele* (2') *şi* (4') *rămîn valabile dacă* $u(x, t)$ *este o funcţie policalorică cu creştere complet regulată în banda* $[0, t_1]$.

Pentru aceasta, vom stabili, în prealabil, următoarea

Lemă. *Dacă* $u(x, t)$ *este o funcţie policalorică de ordinul cu creştere complet regulată în* $[0, t_1]$, atunci avem

$$\mu_0(u;h) = u_0 + (t-h)u_1 + (t-h)^2 u_2 + \ldots + (t-h)^{p-1}u_{p-1} \tag{5}$$

*unde* $u_0, u_1, .., u_{p-1}$ *sînt componentele calorice ale lui* $u$.

Într-adevăr, prin ipoteză avem, identic în $[0, t_1]$,

$$u(x, t) \equiv u_0 + tu_1 + t^2 u_2 + \ldots + t^{p-1}u_{p-1}, \tag{6}$$

funcţiile calorice $u_0, u_1, .., u_{p-1}$ fiind date de formulele (8) de la punctul 5. Din aceste formule se vede imediat că integralele

$$\mu_0(u_0; h), \ \mu_0(u_1; h), \ .., \ \mu_0(u_{p-1}; h)$$

au sens. În acest caz, se ştie [3] că avem

$$\mu_0(u_i; h) = u_i(x, t), \ (i = 0, 1, 2, .., p-1).$$

Din (6) deducem

$$\mu_0(u; h) = \mu_0(u_0; h) + \mu_0(tu_1; h) + \ldots + \mu_0(t^{p-1}u_{p-1}; h).$$

Dar

$$\mu_0(t^i u_i;\ h) = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}}\int_{-\infty}^{+\infty}(t-h)^i u_i(\xi,\ t-h)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}}\, d\xi,$$

sau încă

$$\mu_0(t^i u_i;\ h) = \frac{(t-h)^i}{2\sqrt{\pi h}}\int_{-\infty}^{+\infty} u_i(\xi,\ t-h)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}}\, d\xi =$$

$$= (t-h)^i\,\mu_0(u_i;\ h) = (t-h)^i u_i,$$

de unde rezultă formula (5): lema este demonstrată.

Să înlocuim, acum, în formula (5), funcțiile $u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_{p-1}$ prin valorile lor date de formulele (8) de la punctul 5 și să ordonăm rezultatul după puterile simbolice crescătoare ale operatorului $\Delta$. Coeficientul lui $\Delta^i$ va fi

$$\frac{t^i}{i!} - \frac{1}{1!}\frac{t^{i-1}(t-h)}{(i-1)!} + \frac{1}{2!}\frac{t^{i-2}(t-h)^2}{(i-2)!} - \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + (-1)^i\frac{1}{i!}\frac{(t-h)^i}{1!} = \frac{1}{i!}[t-(t-h)]^i = \frac{h^i}{i!}.$$

Formula (5) se scrie deci, în definitiv,

$$\mu_0(u;\ h) = u(x,\ t) + \frac{h}{1}\Delta u(x,\ t) + \ldots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!}\Delta^{p-1} u(x,\ t).$$

Cădem, astfel, peste formula (2'), din care deducem imediat formulele (4').

**48.** Să scriem, acum formulele (4') pentru

$$s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1$$

și să eliminăm între aceste relații și relația (2') funcțiile

$$\Delta u,\ \Delta^2 u,\ \ldots,\ \Delta^{p-1} u.$$

Obținem astfel:

Teorema de medie pentru funcțiile calorice: *Orice funcție $u(x,\ t)$ policalorică de ordinul $p$ în banda $[0,\ t_1]$, cu creștere complet regulată în această bandă, verifică în orice punct al benzii următoarea relație de medie*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \ldots\ldots & \frac{2}{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{2^{p-1}}{3^{p-1}} & \ldots & \frac{2^{p-1}}{(p+1)^{p-1}} \end{vmatrix} \cdot u(x,\ t) = \begin{vmatrix} \mu_0(u;\ h) & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ \mu_1(u;\ h) & \frac{2}{3} & \ldots\ldots & \frac{2}{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{p-1}(u;\ h) & \frac{2^{p-1}}{3^{p-1}} & \ldots & \frac{2^{p-1}}{(p+1)^{p-1}} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

Astfel, de pildă, dacă $p = 1$ obţinem o teoremă de medie pentru funcţiile calorice, care revine la formula lui Poisson. Pentru $p = 2$, obţinem formula

$$u(x, t) = 3\mu_1(u; h) - 2\mu_0(u; h).$$

**49.** Important pentru teoria funcţiilor policalorice este faptul că proprietatea precedentă caracterizează aceste funcţii:

Reciproca teoremei de medie. *Orice funcţie $u(x, t)$ definită în banda $[0, t_1]$ şi care îndeplineşte următoarele condiţii:*

1° Este sumabilă în banda considerată;

2° $|u(x, t| < Me^{Kx^2}$, cu $K < \frac{1}{4t_1}$;

3° *Verifică, în orice punct al benzii $[0, t_1]$, relaţia de medie*

$$u(x, t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \dots & \frac{2}{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{2^{p-1}}{3^{p-1}} & \dots & \frac{2^{p-1}}{(p+1)^{p-1}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mu_0(u; h) & 1 & \dots & 1 \\ \mu_1(u; h) & \frac{2}{3} & \dots & \frac{2}{p+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mu_{p-1}(u; h) & \frac{2^{p-1}}{3^{p-1}} & \dots & \frac{2^{p-1}}{(p+1)^{p-1}} \end{vmatrix} \quad (7)$$

*este policalorică de ordinul $p$, cu creştere complet regulată în orice bandă $[\varepsilon, t_1]$.*

Pentru demonstrarea acestei teoreme, vom arăta mai întîi că $u(x, t)$ este indefinit derivabilă şi apoi că derivatele parţiale ale acestei funcţii sînt majorate de funcţii de tipul $Me^{Kx^2}$ *cu* $M > 0$ şi $0 < K < \frac{1}{4t_1}$. Aceasta va constitui partea cea mai laborioasă a demonstraţiei.

**50.** Relaţia (7) poate fi scrisă sub forma

$$u(x, t) = A_0\mu_0 + A_1\mu_1 + \dots + A_{p-1}\mu_{p-1}, \quad (8)$$

$A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ fiind coeficienţi numerici depinzînd de numărul $p$.

Din această relaţie se deduce cu uşurinţă că $u$ posedă derivatele parţiale $\frac{\partial u}{\partial x}$ şi $\frac{\partial u}{\partial t}$ şi că aceste derivate parţiale verifică aceeaşi relaţie (8).

Într-adevăr, din

$$\mu_0(u; h) = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4h}} u(\xi, t - h)\, d\xi,$$

deducem imediat

$$\frac{\partial \mu_0(u; h)}{\partial x} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\, h^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x)\, u(\xi, t - h)\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4h}} d\xi, \quad (9)$$

operația de derivare sub semnul sumă fiind legitimată în membrul al doilea de faptul că integrala obținută este evident uniform convergentă, din cauza prezenței exponențialei.

Să presupunem, acum, că $v_{s-1}$ este derivabilă în raport cu $x$. Din relația (3) deducem imediat că și $v_s$ este derivabilă în raport cu $x$. Deci, în definitiv, putem deriva în raport cu $x$ membrul al doilea al ecuației (8) și vom avea

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + A_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \ldots + A_{p-1} \frac{\partial v_{p-1}}{\partial x}. \tag{10}$$

Din (9) deducem

$$\left| \frac{\partial v_0}{\partial x} \right| < \frac{M}{4\sqrt{\pi}\, h^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi - x|\, e^{-\frac{(4Kh-1)\xi^2 + 2x\xi - x^2}{4h}} d\xi.$$

Punînd, cum am făcut mai sus, $1 - 4Kh = \delta^2$, $1 - 4Kt_1 = \delta_1^2$, putem scrie

$$(1 - 4Kh)\xi^2 - 2x\xi + x^2 = \delta^2 \left( \xi - \frac{x}{\delta^2} \right)^2 - \frac{4Khx^2}{\delta^2},$$

de unde deducem

$$-\frac{(1 - 4Kh)\xi^2 - 2x\xi + x^2}{4h} = -\frac{\delta^2}{4h} \left( \xi - \frac{x}{\delta^2} \right)^2 + \frac{Kx^2}{\delta^2}.$$

Prin urmare

$$\left| \frac{\partial v_0}{\partial x} \right| < \frac{M e^{\frac{Kx^2}{\delta^2}}}{4\sqrt{\pi}\, h^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (|\xi| + |x|)\, e^{-\frac{\delta^2}{4h}\left(\xi - \frac{x}{\delta^2}\right)^2} d\xi.$$

Să facem substituția

$$\delta \left( \xi - \frac{x}{\delta^2} \right) = 2\sqrt{h}\, s.$$

Vom avea

$$\left| \frac{\partial v_0}{\partial x} \right| < \frac{M e^{\frac{K}{\delta^2} x^2}}{4\sqrt{\pi}\, h^{3/2}} \left[ \frac{4h}{\delta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |s|\, e^{-s^2} ds + \frac{|2x|\sqrt{h}}{\delta} \left( 1 + \frac{1}{\delta^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds \right],$$

sau

$$\left| \frac{\partial v_0}{\partial x} \right| < \frac{M e^{\frac{K}{\delta^2} x^2}}{4\sqrt{\pi}\, h^{3/2}} \left[ \frac{4h}{\delta^2} + \frac{2|x|\sqrt{h}\sqrt{\pi}}{\delta} \left( 1 + \frac{1}{\delta^2} \right) \right].$$

Să punem $K^* = \frac{K}{\delta^2}$. Pentru $h < \frac{\delta_1^2}{4K}$, vom avea $4K^* t_1 < 1$, de unde

$$\left| \frac{\partial v_0}{\partial x} \right| < \frac{M e^{K^* x^2}}{\sqrt{\pi}\, h\, \delta_1^2} \left[ \sqrt{t_1} + \frac{\sqrt{\pi}\,|x|}{\delta_1} \right]$$

Fie $K'$ un număr mai mare decît $K^*$, astfel încît să continuăm să avem

$$4K't_1 < 1.$$

Pentru $|x|$ destul de mare, vom avea

$$K^* x^2 + \log|x| < K'x^2,$$

de unde, punînd

$$M_1 = \frac{M}{\sqrt{\pi}\,\delta_1^2}\left(\sqrt{t_1} + \frac{\sqrt{\pi}}{\delta_1}\right),$$

deducem, pentru $|x|$ destul de mare

$$\left|\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right| < \frac{M_1}{h} e^{K'x^2}.$$

Ţinînd seama că

$$\frac{\partial \psi_s(u;h)}{\partial x} = \frac{2}{h^2}\int_0^h h' \frac{\delta \psi_{s-1}(u;h')}{dx}\,dh',$$

deducem, prin recurenţă, din inegalitatea precedentă

$$\left|\frac{\partial \psi_s(u;h)}{\partial x}\right| < \frac{2^s M_1}{h} e^{K'x^2}. \tag{11}$$

Egalitatea (10) ne dă, atunci,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{M_2}{h} e^{K'x^2},$$

unde

$$M_2 = (|A_0| + 2|A_1| + \ldots + 2^{p-1}|A_{p-1}|)\,M_1.$$

Dacă ţinem seama că membrul întîi nu depinde de $h$ şi dacă facem punctul $(x_1\,t)$ să varieze numai în banda $[\varepsilon, t_1]$, atunci inegalitatea precedentă devine

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < M' e^{K'x^2}, \tag{12}$$

unde $M' = \frac{M_2}{\varepsilon}$, iar pentru $h$ în expresia lui $K^*$ am luat valoarea $h = \varepsilon$, ceea ce presupune că $\varepsilon < \frac{\delta_1^2}{4K}$.

Dacă, în relaţia (1) facem schimbarea de variabilă $\xi = x + 2\sqrt{h}\,s$ în integrala care figurează în membrul al doilea, vom avea

$$\mu_0(u;h) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x + 2\sqrt{h}\,s, t-h)\,e^{-s^2}\,ds. \tag{13}$$

Inegalitatea (12) ne arată că putem deriva sub semnul sumă în raport cu $x$. Obținem astfel

$$\frac{\partial \mu_0}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u\,(x + 2\sqrt{h}\,s, t - h)}{\partial x}\, e^{-s^2}\, ds,$$

sau, revenind la variabila $\xi$,

$$\frac{\partial \mu_0\,(u;h)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u\,(\xi\, t - h)}{\partial \xi}\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4h}}\, d\xi,$$

adică

$$\frac{\partial \mu_0\,(u;h)}{\partial x} = \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x}\,; h \right). \tag{14}$$

Prin recurență, folosind relația de definiție (3), deducem, în general,

$$\frac{\partial \mu_s\,(u;h)}{\partial x} = \mu_s \left( \frac{\partial u}{\partial x}\,; h \right), \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Relația (10) devine atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_0\, \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x}\,; h \right) + A_1\, \mu_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x}\,; h \right) + \ldots + A_{p-1}\, \mu_{p-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x}\,; h \right) \tag{10'}$$

Deci: *derivata parțială* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *verifică, în banda* $[\varepsilon, t_1]$, *oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *cu* $\varepsilon < \frac{\delta_1^2}{4K'}$ *aceeași relație de medie ca și funcția* $u$.

**51.** Să ne ocupăm, acum, de derivata parțială $\frac{\partial u}{\partial t}$. Putem scrie

$$\mu_0\,(u;h) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u\,(\xi, \tau)}{\sqrt{t - \tau}}\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4(t - \tau)}}\, d\xi,$$

de unde deducem

$$\frac{\partial \mu_0}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{(\xi - x)^2}{4\,(t - \tau)^{5/2}} - \frac{1}{2\,(t - \tau)^{3/2}} \right] u\,(\xi, \tau)\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4(t - \tau)}}\, d\xi,$$

sau

$$\frac{\partial \mu_0}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{(\xi - x)^2}{4h^{5/2}} - \frac{1}{2h^{3/2}} \right] u\,(\xi, t - h)\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4h}}\, d\xi. \tag{16}$$

Deducem

$$\left| \frac{\partial \mu_0}{\partial t} \right| < \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{(\xi - x)^2}{4h^{5/2}} + \frac{1}{2h^{3/2}} \right] e^{-\frac{\delta\xi^2 - 2x\xi + x^2}{4h}}\, d\xi,$$

sau

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial t}\right| < \frac{M\epsilon^{K^*x^2}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(\xi - x)^2}{4h^{3/2}} + \frac{1}{2h^{3/2}}\right] e^{-\frac{\delta^2\left(\xi - \frac{x}{\delta}\right)^2}{4h}} d\xi.$$

Făcînd şi aici schimbarea de variabilă $\xi = \frac{x}{\delta^2} + \frac{2\sqrt{h}}{\delta}$ s, inegalitatea se scrie

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial t}\right| < \frac{M\epsilon^{K^*x^2}}{2\delta h}\left(1 + \frac{\sqrt{h}}{\delta^3} + \frac{4K^2h^{3/2}}{\delta^4}x^2\right),$$

de unde, cu atît mai mult

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial t}\right| < \frac{Me^{K^*x^2}}{2\delta_1 h}\left(1 + \frac{\sqrt{t_1}}{\delta_1^3} + \frac{4K^2t_1^{\frac{3}{2}}}{\delta_1^4}x^2\right).$$

Ca şi mai sus, dacă ne mărginim la valorile lui $h$ pentru care $h < \frac{\delta_1^2}{4K}$, atunci vom avea $4K^*t < 1$.

Tot astfel, dacă alegem un număr $K' > K^*$ supus încă la condiţia $4K't_1 < 1$, vom avea, pentru $x$ destul de mare în valoare absolută,

$$x^2e^{K^*x^2} < e^{K'x^2}$$

Deci, dacă punem

$$\overline{M_1} = \frac{M}{2\delta_1}\left(1 + \frac{\sqrt{t_1}}{\delta_1^3} + \frac{4K^2t_1^{\frac{3}{2}}}{\delta_1^4}\right),$$

inegalitatea precedentă se mai poate scrie, pentru $x$ destul de mare în valoare absolută şi $h < \frac{\delta_1^2}{4K}$,

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial t}\right| < \frac{\overline{M}_1}{h}e^{K'x^2}.$$

Ca şi în punctul precedent, deducem imediat

$$\left|\frac{\partial u_s}{\partial t}\right| < \frac{2^s\overline{M}_1}{h}e^{K'x^2}, \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Dacă ţinm seama că

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_0\frac{\partial u_0}{\partial t} + A_1\frac{\partial u_1}{\partial t} + \ldots + A_{p-1}\frac{\partial u_{p-1}}{\partial t}, \tag{17}$$

deducem

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| < \frac{\overline{M}_2}{h}e^{K'x^2},$$

unde

$$\overline{M}_2 = (|A_0| + 2|A_1| + \ldots + 2^{p-1}|A_{p-1}|)\,\overline{M}_1.$$

Luînd în membrul al doilea, ca și în expresia lui $K^*$, pentru $h$ valoarea $\varepsilon$ și punînd $\overline{M}' = \frac{\overline{M}_2}{\varepsilon}$, vom avea, în definitiv, în banda $[\varepsilon, t_1]$,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| < \overline{M}' e^{K' x^2}. \tag{18}$$

Această inegalitate ne arată că putem deriva, în relația (13) sub semnul sumă, în raport cu $t$. Obținem

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x + 2\sqrt{h}\, s,\ t - h)}{\partial t} e^{-s^2}\, ds,$$

sau, revenind la variabila $\xi$,

$$\frac{\partial \mu_0}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u\,(\xi, t - h)}{\partial t} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4h}}\, d\xi,$$

adică

$$\frac{\partial \mu_0\,(u; h)}{\partial t} = \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t}; h\right).$$

Prin recurență deducem, pentru orice $s > 0$,

$$\frac{\partial \mu_s\,(u;\ h)}{dt} = \mu_s \left(\frac{\partial u}{\partial t}; h\right),$$

deci relația (17) se scrie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_0 \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\ ; h\right) + \ldots + A_{p-1}\, \mu_{p-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\ ; h\right). \tag{17'}$$

Prin urmare: *Derivata parțială* $\frac{\partial u}{\partial t}$ *verifică în banda* $[\varepsilon, t_1]$, *oricare ar fi* $0 < \varepsilon < \frac{\delta_1^2}{4K}$, *aceeași relație de medie ca și funcția* $u$.

**52.** Cu funcțiile $\frac{\partial u}{\partial x}$ și $\frac{\partial u}{\partial t}$ se poate proceda ca și cu funcția $u$. În definitiv, vom ajunge la rezultatul următor: se pot determina două constante pozitive $M$ și $K$ cu $4Kt_1 < 1$, astfel încît, în orice bandă $[\varepsilon,\ t_1]$, derivatele parțiale pînă la ordinul cel mai înalt în care intervin în operatorul $\Delta^{p-1}$, să fie toate majorate de funcția $Me^{Kx^2}$.

În asemenea condiții, putem să scriem formulele (2) și (4) de la punctul 46:

$$\mu_s(u; h) = u(x, t) + \frac{2^s}{3^s} \frac{h}{1!} \Delta u(x, t) + \frac{2^s}{4^s} \frac{h^2}{2!} \Delta^2 u(x, t) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2^s}{(p+1)^s} \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} \Delta^{p-1} u(x,\ t) + \frac{2^s}{(p+2)^s} \frac{h^p}{p!} [\Delta^p u(x, t) + \varepsilon_r^s],$$

$$(s = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Eliminînd între aceste $p$ relaţii operatorii $\Delta u$, $\Delta^2 \mu$, ..., $\Delta^{p-1} u$, obţinem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \dots & \frac{2}{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{2^{p+1}}{3^{p-1}} & \dots & \frac{2^{p-1}}{(p+1)^{p-1}} \end{vmatrix} . u(x, t) = \begin{vmatrix} \mu_0(u; h) & 1 & \dots & \\ \mu_1(u; h) & \frac{2}{3} & \dots & \frac{2}{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \\ \mu_{p-1}(u; h) & \frac{2^{p-1}}{3^{p-1}} & \dots & \frac{2^{p-1}}{(p+1)^{p-1}} \end{vmatrix} +$$

$$+h^p \Delta^p u(x, t) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{2}{p+1} & \frac{2}{3} & \dots & \frac{2}{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{2^{p-1}}{(p+2)^{p-1}} & \frac{2^{p-1}}{3^{p-1}} & \dots & \frac{2^{p-1}}{(p+1)^{p-1}} \end{vmatrix} = h^p \begin{vmatrix} \varepsilon_p^0 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{2\varepsilon_p^1}{p+2} & \frac{2}{3} & \dots & \frac{2}{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{2^{p-1}\varepsilon_p^{p-1}}{(p+2)^{p-1}} & \frac{2^{p-1}}{3^{p-1}} & \dots & \frac{2^{p-1}}{(p+1)^{p-1}} \end{vmatrix} \quad (19)$$

Prin ipoteză, primul membru este nul, oricare ar fi $h$. Deci ţinînd seama că numerele $\varepsilon_p^s$ tind toate către zero odată cu $h$, deducem imediat

$$\Delta^p u(x, t) = 0,$$

ceea ce demonstrează teorema enunţată la punctul 49.

Această teoremă prezintă o deosebită importanţă teoretică, dar şi practică, deoarece caracterizează funcţiile policalorice cu creştere complet regulată, nu printr-o relaţie diferenţială, ci printr-o relaţie integrală, mult mai uşor de mînuit în calcul.

În paragrafele ce urmează vom face cîteva importante aplicaţii ale acestei formule integrale de medie.

## § 2. Limitarea derivatelor parţiale. Familii de funcţii policalorice

**53.** Fie $u(x,t)$ o funcţie policalorică de ordinul $p$ în banda $(0, t_1]$. În condiţiile specificate în teorema de medie de la punctul 47, avem

$$u(x,t) = A_0 \mu_0(u; h) + A_1 \mu_1(u; h) + \dots + A_{p-1} \mu_{p-1}(u; h)$$

Să presupunem funcţia $u(x,t)$ *mărginită* în banda considerată. Vom arăta că derivatele parţiale ale acestei funcţii sînt mărginite în orice bandă $[\varepsilon, t_1]$, unde $\varepsilon > 0$. Va fi suficient să reluăm calculele de la punctele 50 şi 51, în ipoteza

$$|u(x, t)| < M.$$

Aceste calcule vor fi, evident, mult mai simple în acest caz. Din relaţia (9) deducem, făcînd schimbarea de variabilă $\xi = x + 2\sqrt{h}\, s$,

$$\left| \frac{\partial \mu_0}{\partial x} \right| < \frac{M}{\sqrt{\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2} ds = \frac{M}{\sqrt{\pi h}}.$$

Prin recurență deducem

$$\left|\frac{\partial \varphi_s}{\partial x}\right| < \left(\frac{4}{3}\right)^s \frac{M}{\sqrt{\pi h}}, \quad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Să punem, atunci,

$$H = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[|A_0| + \frac{4}{3}|A_1| + \left(\frac{4}{3}\right)^2 |A_2| + \ldots + \left(\frac{4}{3}\right)^{p-1} |A^{p-1}|\right].$$

Din relația (10) deducem

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{HM}{\sqrt{h}}.$$

Cum membrul întîi nu depinde de $h$, putem lua, în membrul al doilea, pentru $h$ cea mai mare valoare posibilă și anume distanța $\delta$ a punctului $(x,t)$ la axa $Ox$, adică la latura inferioară a benzii $[0, t_1]$.

Vom avea, deci,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{HM}{\sqrt{\delta}}. \tag{20}$$

Din formula (17) deducem, cu aceeași substituție ca mai sus,

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial t}\right| < \frac{M}{2h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (2s^2 + 1)\, e^{-s^2} ds = \frac{M}{h},$$

iar prin recurență

$$\left|\frac{\partial \mu_s}{\partial t}\right| < \frac{2^s M}{h}.$$

Punînd și aici

$$L = |A_0| + 2|A_1| + \ldots + 2^{p-1}|A_{p-1}|,$$

vom avea, ținînd seama de relația (17),

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| < \frac{LM}{\delta}. \tag{21}$$

Inegalitățile (20) și (21) demonstrează afirmația făcută. Este important de observat că aceste inegalități sînt exact de aceeași formă ca inegalitățile pe care le-am obținut în Memoriul citat [3] din anul 1937.

Să presupunem, acum că funcția $u$ este definită, nu în banda $(0, t_1]$, ci într-o bandă oarecare $(t_0, t_1]$. În acest caz, inegalitățile (20) și (21) rămîn valabile dacă prin $M$ înțelegem marginea lui $|u|$ în această bandă, iar pentru $\delta$ luăm valoarea

$$\delta = |t - t_0|,$$

adică distanța punctului $(x,t)$ la latura inferioară $t = t_0$ a benzii. Să facem, atunci, în aceste inegalități $t_0 \to -\infty$. Obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

oricare ar fi punctul $(x,t)$ în semiplanul $t \leqq t_1$. Așadar,

Teorema 1. (Extensiunea teoremei lui Liouville la funcţiile policalorice). *Dacă $u(x,t)$ este o funcţie policalorică cu creştere complet regulată în semiplanul $t \leqq t_1$, mărginită în acest semiplan, atunci $u$ este în mod necesar o constantă.*

Să presupunem acum că avem

$$|u(x, t-h)| < M h^{\alpha},$$

$\alpha$ fiind un număr pozitiv. Nimic nu se modifică atunci în calculele noastre precedente. Ajungem astfel la inegalităţile următoare, obţinute prin schimbarea lui $M$ în $M\delta^{\alpha}$ în inegalităţile (20) şi (21).:

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| &< HM\delta^{\alpha-\frac{1}{2}} \\ \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| &< HM\delta^{\alpha-1} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Deducem de aici,

$$\left|\frac{\partial^n u}{\partial x^p \partial t^q}\right| < HLM\delta^{\alpha-\frac{n}{2}-\frac{q}{2}}, \tag{23}$$

unde $p+q=n$. Dacă deci

$$n+q > 2\alpha, \tag{24}$$

atunci exponentul lui $\delta$ devine negativ şi pentru $\delta \to \infty$ obţinem

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^p \partial t^q} = 0.$$

Inegalitatea (24) este sigur satisfăcută dacă luăm $n > 2\alpha$, oricare ar fi $q$. Prin urmare $u(x,t)$ este un polinom în $x$ şi $t$. Pentru $q=n$, deci $p=0$, inegalitatea (24) devine $n > \alpha$. Obţinem astfel

Teorema 2. (Extensiunea teoremei generalizate a lui Liouville la funcţiile policalorice). *Dacă funcţia $u(x,t)$, policalorică cu creştere complet regulată în semiplanul $t < t_1$, este astfel încît raportul*

$$\frac{|u(x,t)|}{(t_1-t)^{\alpha}}, \quad (\alpha > 0),$$

*rămîne mărginit în semiplanul $t < t_1 - \varepsilon$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, atunci $u(x,t)$ este în mod necesar de forma*

$$u(x,t) = A_0(x) + A_1(x)\,t + A_2(x)\,t^2 + \ldots + A_N(x)\,t^N,$$

*unde $N = E(\alpha)$, iar $A_i(x)$, $(i = 0,1,2,\ldots,N)$ sînt polinoame de grad $N'-i$, cu $N' = E(2\alpha)$.*

În particular, dacă $\alpha < \frac{1}{2}$ funcţia $u(x,t)$ se reduce la o constantă.

Pentru $p=1$ obţinem o teoremă pe care am dat-o în anul 1937, în Memoriul citat anterior [3]. Într-un Memoriu recent [11] matematicianul sovietic S. D. Ei-

delman a extins teorema noastră din anul 1937 la sistemele $p$— parabolice în sensul lui I. G. Petrovschi. Dar sistemul pentru care obține această generalizare nu îmbrățișează și cazul studiat în prezenta lucrare. Rezultatul lui S. D. Eidelman, ca și teorema 2 de mai sus constituie deci două extensiuni diferite ale uneia și aceleiași teoreme din lucrarea [2].

**54.** În tot cuprinsul acestui capitol, funcțiile $u(x\,t)$ vor fi presupuse cu creștere complet regulată în banda în care sînt definite. De aceea, pentru simplitate vom suprima această mențiune în enunțurile ce vor urma.

Fie $\{u\}$ o familie de funcții policalorice de ordinul, $p$, egal mărginite în banda $[0,t_1]$, de către numărul $M$. În acest caz, inegalitățile (20) și (21) sînt valabile pentru orice funcție a familiei, deci familia este compactă în sensul convergenței uniforme, adică normală în terminologia lui Paul Montel, în orice bandă $[\varepsilon, t_1]$, cu $\varepsilon > 0$. Rezultă, în baza unui principiu general pe care l-am formulat într-o lucrare anterioară [12],

Teorema I. 1° *Orice familie* $\{u\}$ *de funcții policalorice de ordinul* $p$, *egal mărginite în banda* $(0, t_1]$ *este normală în banda* $[\varepsilon, t_1]$ *pentru orice* $\varepsilon > 0$;

2° *Orice șir infinit al familiei considerate conține un șir parțial care să fie uniform, convergent în* $[\varepsilon, t_1]$ *oricare ar fi* $\varepsilon > 0$.

Teorema precedentă nu ne spune nimic despre natura funcțiilor limită. Această problemă este rezolvată de

Teorema II. *Limita unui șir de funcții policalorice de ordinul* $p$ *în banda* $(0, t_1]$, *uniform convergent în această bandă, este o funcție policalorică de ordinul* $p$ *în această bandă.*

Fie, într-adevăr, $\{u_n\}$ șirul considerat. Numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat, există prin ipoteză un număr natural $N(\varepsilon)$, astfel încît

$$| u_m(x, t) - u_n(x, t) | < \varepsilon,$$

pentru $m > N$, $n > N$, oricare ar fi punctul $(x,t)$ în banda considerată. Deducem

$$| \mu_0(u_m; h) - \mu_0(u_n; h) | < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}\,h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}} d\xi = \varepsilon,$$

deci șirul $\{\mu_0(u_n; h)\}$ converge uniform în banda $(0,t_1]$, oricare ar fi $h$.

Să presupunem, atunci, că șirul $\{\mu_{s-1}(u_n; h)\}$, pentru un $s \geqslant 1$ dat, converge uniform în banda $(0, t_1]$.

Deci, vom avea, în această bandă,

$$| \mu_{s-1}(u_m; h) - \mu_{s-1}(u_n; h) | < \varepsilon,$$

pentru $m > N(\varepsilon)$, $n > N(\varepsilon)$. Deducem

$$| \mu_s(u_m; h) - \mu_s(u_n; h) | < \frac{2\varepsilon}{h^2} \int_0^h h'dh' = \varepsilon,$$

deci și șirul $\{\mu_s(u_n\, h)\}$ converge uniform în banda $(0, t_1]$. Deci șirul $\{\mu_s(u_n; h)\}$ converge uniform, pentru orice $s$, în banda considerată.

Să punem, atunci,

$$u(x, t) = \lim_{n \to \infty} u_n(x, t),$$

$$\delta(x, t) = u(x, t) - A_0 \mu_0(u; h) - A_1 \mu_1(u; h) - \ldots - A_{p-1} \mu_{p-1}(u; h).$$

Cum

$$0 \equiv u_n(x, t) - A_0 \mu_0(u_n; h) - A_1 \mu_1(u_n; h) - \ldots - A_{p-1} \mu_{p-1}(u_n; h),$$

oricare ar fi $n$, deducem

$$|\delta(x, t)| \leqq |u - u_n| + |A_0| \, |\mu_0(u; h) - \mu_0(u_n; h)| + \cdots$$
$$\ldots + |A_{p-1}| \, |\mu_{p-1}(u; h) - \mu_{p-1}(u_n; h)|,$$

de unde, pentru $n > N(\varepsilon)$,

$$|\delta(x, t)| < \varepsilon(1 + |A_0| + |A_1| + \ldots + |A_{p-1}|).$$

Cum $\varepsilon$ este arbitrar, vom avea în mod riguros

$$\delta(x, t) \equiv 0,$$

în banda $(0, t_1]$ deci $u(x, t)$ este policalorică de ordinul $p$ în această bandă.

**55.** Teoremă. (Extensiunea primei teoreme a lui Harnack). *Fie* $\{u_n(x, t)\}$ *un şir de funcţii policalorice de ordinul* $p$ *în banda* $(0, t_1]$, *astfel încît şirurile*

$$\{u_n(x, 0)\}, \ \Delta u_n(x_1 0)\}, \ \ldots, \ \{\Delta^{p-1} u_n(x, 0)\} \tag{25}$$

*converg uniform pe axa* $Ox$. *Să presupunem, în plus, că există un număr pozitiv* $M$ *şi un număr pozitiv* $K < \dfrac{1}{4t_1}$ *astfel încît să avem*

$$|\Delta^s u_n(x, t)| < M e^{Kx^2}$$
$$(s = 0, 1, 2, \ldots, p - 1; \ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

*În asemenea condiţii, şirurile*

$$\{u_n(x, t)\}, \ \{\Delta u_n(x, t)\}, \ \ldots, \ \{\Delta^{p-1} u_n(x, t)\}$$

*converg uniform în banda* $[\varepsilon, t_1]$, *pentru orice* $\varepsilon > 0$, *respectiv către*

$$u(x, t), \ \Delta u(x, t), \ \ldots, \ \Delta^{p-1} u(x, t).$$

$u(x, t)$ *fiind o funcţie policalorică de ordinul* $p$.

Într-adevăr, pentru ficcare funcţie $u_n$ a şirului dat, există un sistem de $p$ funcţii calorice

$$u_n^0, \ u_n^1, \ \ldots, \ u_n^{p-1}$$

astfel încît să avem

$$u_n \equiv u_n^0 + t u_n^1 + t^2 u_n^2 + \ldots + t^{p-1} u_n^{p-1}, \tag{26}$$

identic în banda considerată. Aceste funcţii sînt date de formulele (8) din Capitolul I (punctul 5).

Din aceste formule rezultă, în particular,

$$u_n^0(x, 0) = u_n(x, 0),$$

$$u_n^1(x, 0) = -\Delta u_n(x, 0),$$

$$u_n^2(x, 0) = \frac{1}{2!}\Delta^2 u_n(x, 0),$$

. . . . . .

$$u_n^{p-1}(x, 0) = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\Delta^{p-1} u_n(x, 0).$$

Deci șirurile de funcții calorice

$$\{u_n^0(x, t)\}, \{u_n^1(x, t)\}, \ldots, \{u_n^{p-1}(x, t)\} \tag{27}$$

converg uniform pe axa $Ox$.

Pe de altă parte, punînd

$$M_i = \frac{M}{i!}\left(1 + \frac{t_1}{1!} + \ldots + \frac{t_1^{p-i-1}}{(p-i-1)!}\right),$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots. p-1)$$

formulele citate din punctul 5 ne dau

$$|u_n^i(x_1 t)| < M_i e^{Kx^2} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, p-1),$$

deci șirurile (27) converg *toate* uniform în banda $[0, t_1]$, în baza unei teoreme pe care am dat-o în Memoriul [7]. Fie, respectiv,

$$u^0(x, t), u^1(x, t), \ldots., u^{p-1}(x, t)$$

limitele acestor șiruri. Aceste limite sînt, evident funcții calorice. Din egalitatea (26) rezultă, atunci, că șirul $\{u_n(x, t)\}$ converge uniform către funcția

$$u(x, t) = u^0(x, t) + tu^1(x, t) + \ldots + t^{p-1} u^{p-1}(x, t),$$

care este policalorică de ordinul $p$ în banda considerată.

Raționamentul precedent rămîne, evident, valabil, dacă înlocuim peste tot pe $u(x, t)$ prin $\Delta^s u(x, t)$, $(s = 1, 2, \ldots, p-1)$. Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

## § 3. Familii de funcții policalorice într-un domeniu mărginit

**56.** Rezultatele capitolelor III și IV ne vor permite să arătăm că unele proprietăți privitoare la familiile de funcții policalorice într-o bandă infinită $(0, t_1]$, stabilite în punctele 54 și 55 rămîn valabile și în cazul unui domeniu mărginit (în care caz, bineînțeles, condiția de creștere complet regulată cade).

Să considerăm domeniul mărginit $D$ din punctul 24 (fig. 1), în care vom lua $t_1 = 0$ și $t_2 = t_1$. Vom demonstra, în primul rînd următoarea

Teoremă. *Fie $\{u_n\}$ un șir de funcții definite în $D$ și pe Fr $D$, uniform convergent pe frontiera inferioară și laterală a lui $D$. Dacă $\Delta u_n(x, t)$ există pentru orice*

*n şi are derivata* $\frac{\partial \Delta u_n}{\partial x}$ *continuă şi dacă şirul* $\{\Delta u_n\}$ *converge uniform în D către o funcţie* $\varphi(x, t)$ *cu derivata parţială* $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ *continuă, atunci şirul* $\{u_n\}$ *converge uniform în D către o funcţie* $u(x, t)$ *astfel încît*

$$\Delta u(x, t) = \varphi(x, t).$$

Să prelungim, într-adevăr, funcţia continuă $u_n(x, 0)$ definită numai pe segmentul $[a, l]$, printr-o funcţie continuă $\varphi_n(x)$, definită pe toată dreapta. Putem lua, de pildă,

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} u_n(a, 0), & \text{dacă } x \leqq a, \\ u_n(x, 0), & \text{dacă } a < x < b, \\ u_n(b, 0), & \text{dacă } x \geqq b. \end{cases}$$

Şirul $\{u_n(x, 0)\}$ fiind, prin ipoteză uniform convergent pe $[a, l]$, funcţiile acestui şir sînt egal mărginite, de un acelaşi număr $M$. Din definiţia lui $\varphi_n(x)$ rezultă: 1° că şirul $\{\varphi_n(x)\}$ este uniform convergent pe toată dreapta; 2° că avem

$$|\varphi_n(x)| < M,$$

oricare ar fi $n$. Să însemnăm, atunci, cu $u_n^*(x, t)$ funcţia calorică în banda $(0, t_1]$, care, pe axa $Ox$ se reduce la $\varphi_n(x)$.

Vom avea

$$|u_n^*(x, t)| < M,$$

oricare ar fi $n$, deci şirul $\{U_n^*(x, t)\}$ este uniform convergent 7, către o funcţie calorică $u^*(x, t)$. Să punem, acum,

$$U_n(x, t) = u_n(x, t) - u_n^*(x, t) \tag{28}$$

Funcţiile $Un$ se bucură de următoarele proprietăţi:

1° $\Delta U_n = \Delta u_n(x, t)$, deci şirul $\{\Delta U_n(x, t)\}$ este uniform convergent în $D$; 2° şirul $\{U_n\}$ converge uniform pe $\Gamma$, ca diferenţă a două şiruri uniform convergente pe aceste arce; 3° $U_n(x, 0) = 0$ oricare ar fi $n$.

Dacă $G(x, t; \xi, \tau)$ este funcţia lui Green pentru ecuaţia căldurii şi domeniul $D$, putem scrie

$$U_n(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{(\Gamma_1+\Gamma_2)} U_n \frac{\partial G}{\partial \xi} d\tau + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D G(x, t; \xi, \tau)\, \Delta U_n(\xi, \tau)\, d\xi dt.$$

Numărul pozitiv $\varepsilon$ fiind dat, se poate determina un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem simultan pentru $n > N$, $m > N$, $|U_n - U_m| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$, pe $\Gamma_1 + \Gamma_2$;

$|\Delta Un - \Delta U_m| < \frac{\varepsilon}{2M_2}$, în $D$,

unde

$$M_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{(\Gamma_1+\Gamma_2)} \left| \frac{\partial G}{\partial \xi} \right| d\tau, \quad M_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D |G|\, d\xi\, d\tau.$$

Deducem

$$| U_n(x, t) - U_m(x, t) | < \varepsilon, \text{ în } D,$$

pentru $n > N(\varepsilon)$, $m > N(\varepsilon)$, deci șirul $\{U_n(x, t)\}$ converge uniform în $D$, către o funcție $U(x, t)$ și avem

$$U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} U \frac{\partial G}{\partial \xi} d\tau + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D G(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

de unde

$$\Delta U(x, t) = \varphi(x, t).$$

Din (28) rezultă că șirul $\{u_n(x, t)\}$ este și el uniform convergent în $D$. Fie $u(x, t)$ limita acestui șir. Vom avea, trecînd la limită în (28),

$$U(x, t) := u(x, t) - u^*(x, t),$$

de unde

$$\Delta u(x, t) = \Delta U(x, t) = \varphi(x, t)$$

și teorema este complet demonstrată.

**57.** Teoremă. (Extensiunea teoremei lui Harnack pentru domeniile mărginite). *Fie $\{u_n(x, t)\}$ un șir de funcții policalorice de ordinul $p$ în $D$. Dacă șirurile*

$$\{u_n(x, t)\}, \{\Delta u_n(x, t)\}, \ldots, \{\Delta^{p-1} u_n(x, t)\}$$

*converg uniform pe frontiera inferioară și laterală a lui $D$, atunci aceste șiruri converg uniform în interiorul lui $D$, respectiv către o funcție policalorică $u$ și operatorii succesivi $\Delta u, \Delta^2 u, \ldots, \Delta^{p-1} u$.*

Să presupunem teorema adevărată pentru funcțiile policalorice de ordine 1, 2, ..., $p - 1$; vom arăta că teorema este atunci adevărată și pentru funcțiile policalorice de ordinul $p$.

Prin ipoteză, șirul $\{\Delta u_n(x, t)\}$ converge uniform în $D$, către o funcție $\varphi(x, t)$ policalorică de ordinul $p - 1$. Din teorema demonstrată la punctul 56 rezultă atunci imediat că șirul $\{u_n(x, t)\}$ converge uniform în $D$, către o funcție $u(x, t)$ astfel încît

$$\Delta u(x, t) = \varphi(x, t) \text{ în } D,$$

adică

$$\Delta^p u(x, t) = 0 \text{ în } D.$$

Teorema este demonstrată.

## § 4. Funcții subcalorice de diverse ordine

**58.** Fie $u$ o funcție definită în banda $[0, t_1]$, continuă în această bandă și astfel încît

$$| u(x, t) | < Me^{Kx^2}$$

unde $4Kt_1 < 1$. Dacă pentru orice punct $(x, t)$ din această bandă și pentru orice $h$ care verifică relațiile

$$0 < h \leqq t,$$

există o funcție $U_h(x, t)$ calorică în banda $[t - h, t_1]$ majorată în această bandă de funcția $M e^{Kx^2}$ și astfel încît inegalitatea

$$u(x, t - h) \leqq U_h(x, t - h),$$

să atragă după sine inegalitatea

$$u(x, t) \leqq U_h(x, t)$$

vom spune că $u$ este subcalorică în banda $[0, t_1]$.

Teorema I. *Dacă $u(x, t)$ este subcalorică în banda $[0, t_1]$, atunci*

$u(x_0, t_0) \leqq \mu_0(u; h)$, $u(x_0, t_0) \leqq \mu_1(a; h)$, *pentru orice $h$ pozitiv mai mic decît $t_0$.*

Într-adevăr, să construim un șir monoton descrescător de funcții continue $\{\varphi_h^n(x,)\}$, tinzînd către $u(x, t_0 - h)$ și astfel încît

$$| \varphi_n^s(x) | < M e^{Kx^2}$$

pentru orice $n$.

Există o funcție $U_h^n(x, t)$, calorică în banda $[t_0 - h, t_1]$, tinzînd către $\varphi_h^n(x)$ pentru $t \to t_0 - h$. Această funcție verifică și ea inegalitatea

$$| U_h^n(x, t) | < M e^{Kx^2}.$$

Prin definiție, vom avea, în banda $[t_0 - h, t_1]$,

$$u(x_0, t_0) \leqq V_h(x_0, t_0),$$

$V_h(x, t)$ fiind funcția calorică coincizînd cu $u(x, t_0 - h)$ pe dreapta $t = t_0 - h$. Dar din inegalitatea

$$u(x, t_0 - h) < \varphi_h^n(x)$$

rezultă, în baza proprietății de monotonie a funcțiilor calorice,

$$V_h(x, t) \leqq U_h^n(x, t),$$

de unde, cu atît mai mult

$$u(x_0, t_0) \leqq U_h^n(x_0, t_0) = \mu_0(U_h^n; h),$$

pentru orice $n$, deci

$$u(x_0, t_0) \leqq \lim_{n \to \infty} \mu_0(U_h^n; h).$$

Dar șirul $\{U_h^n(x, t_0 - h)\}$ converge uniform către $u(x, t_0 - h)$. Rezultă, în baza unei proprietăți citate [7], că șirul $\{U_h^n(x, t)\}$ converge uniform în banda $[t_0 - h, t_1]$ către o funcție $U_h(x, t)$, calorică în această bandă. Prin urmare

$$\lim_{n \to \infty} \mu_0(U_h^n; h) = \mu_0(U_h; h) = \mu_0(u; h),$$

deci, în definitiv,

$$u(x_0, t_0) \leqq \mu_0(u; h).$$

Mai departe, avem

$$\mu_1(u; h) = \frac{2}{h^2}\int_0^h h' \mu_0(u; h')\, dh' \geqq \frac{2u(x, t_0)}{h^2}\int_0^h h' dh' = u(x_0, t_0)$$

şi cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Teorema II. (Reciproca teoremei precedente). *Dacă avem*

$$u(x_0, t_0) \leqq \mu_0(u; h),$$

*pentru orice punct* $(x_0, t_0)$ *din banda* $[0, t_1]$ *şi pentru orice* $h$ *pozitiv mai mic decît* $t_0$, *atunci funcţia* $u$ *este subcalorică în banda* $[0, t_1]$.

Într-adevăr, să construim, pentru $h$ pozitiv, cu ajutorul formulei lui Poisson, funcţia $U_h(x, t)$ calorică în banda $[t_0 - h, t_1]$ şi astfel încît

$$\lim_{t \to t_0 - h} U_h(x, t) = U(x, t_0 - h) = u(x, t_0 - h). \tag{29}$$

Fie $(x', t')$ un punct din banda $[0, t_1]$, situat deasupra dreptei $t = t_0 - h$, pentru care am avea

$$u(x', t') > U_h(x', t'). \tag{30}$$

Din egalitatea

$$U_h(x', t') = \mu_0[U_h(x, t_0 - h); t' - t_0 + h],$$

deducem, ţinînd seama de (29),

$$U_h(x', t') = \mu_0[u(x, t_0 - h); t' - t_0 + h].$$

Din (30) am deduce atunci

$$u(x', t') > \mu_0[u(x, t_0 - h); h_1] = \mu_0[u(x, t' - h_1); h_1$$

cu $h_1 = t' - t_0 + h$, ceea ce contrazice ipoteza facută, deoarece în punctul $(x't',)$ ar trebui să avem

$$u(x', t') \leqq \mu_0(u; h_1).$$

**59.** Teoremă. *O funcţie* $u(x, t)$ *subcalorică în banda* $[0, t_1]$ *nu-şi poate atinge maximul în interiorul sau pe latura superioară a benzii.*

Fie într-adevăr, $A$ marginea superioară a lui $u(x, 0)$. Dacă $A = +\infty$, teorema este demonstrată. Să presupunem $A < +\infty$. Dacă ar exista un punct $(x_0, t_0)$ în banda $(0, t_1)$ astfel încît

$$u(x_0, t_0) > A,$$

am deduce

$$A < \frac{1}{2\sqrt{\pi t_0}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t_0}} u(\xi, 0)\, d\xi < A.$$

Consecinţă importantă. *Dacă* $u(x, t)$ *este subcalorică în banda* $[0, t_1]$ *şi dacă această funcţie coincide într-un punct interior cu funcţia calorică* $U(x, t)$ *care ia aceleaşi valori ca* $u(x, t)$ *pe latura inferioară a benzii atunci avem*

$$u(x, t) = U(x, t),$$

*identic în* $[0, t_1]$.

Într-adevăr, funcţia

$$v(x, t) = u(x, t) - U(x, t)$$

este subcalorică în $[0, t_1]$ şi nulă pe axa $Ox$.

Ea nu poate, deci, fi nulă într-un punct interior fără să se anuleze identic în $[0, t_1]$. Trebuie să observăm că rezultatele din acest punct, ca şi teoremele I şi II din punctul precedent, extind la funcţiile pe care le-am numit aici subcalorice, proprietăţi bine cunoscute ale funcţiilor subarmonice [13].

**60.** Într-un important memoriu [5], I. G. Petrowski a dat următoarea definiţie pentru funcţiile subcalorice: O funcţie $u(x, t)$ este subcalorică («unterparabolisch» în memoriul său) în domeniul (mărginit sau nu) în care este definită şi continuă, dacă valoarea sa într-un punct $(x, t)$ nu întrece valoarea în acest punct a funcţiei calorice cu care coincide pe laturile $PA$, $AB$, $BQ$ ale trapezului $PABQ$, supus la singura condiţie ca latura sa superioară $PQ$ să conţină punctul $(x, t)$ (fig. 3).

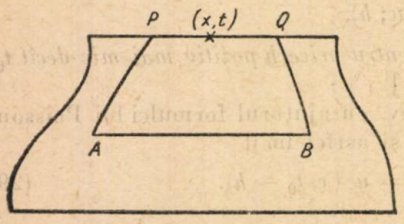


Fig. 3

Vom numi funcţie subcalorică $(P)$ o astfel de funcţie.

Teorema 1. *Dacă o funcţie $u(x, t)$ continuă în banda $[0, t_1]$ şi astfel încît*

$$|u(x, t)| < M e^{Kx^2}$$

*unde $K < \dfrac{1}{4t_1}$, este subcalorică $(P)$ în această bandă, atunci ea este subcalorică în banda considerată.*

Într-adevăr, să considerăm un dreptunghi $PABQ$ conţinut în banda $[0, t_1]$ şi a cărui latură superioară trece prin punctul $[x_0, t_0]$ interior benzii (fig. 4).

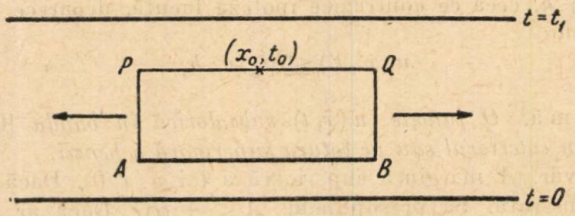


Fig. 4

Fie $2\lambda$ lungimea acestui dreptunghi. Vom presupune că punctul $(x_0, t_0)$ se află în mijlocul segmentului $PQ$. Să însemnăm cu $U_\lambda(x, t)$ funcţia calorică definită în $PABQ$ şi care coincide cu $u(x, t)$ pe laturile $PA$, $AB$, $BQ$ ale dreptunghiului. Prin ipoteză

$$u(x_0, t_0) \leqq U_\lambda(x_0, t_0).$$

Să facem $\lambda \to \infty$, adică să facem laturile $PA$, $BQ$ să tindă către infinit în sensul săgeţilor din figura alăturată. După cum se ştie, în acest caz $U_\lambda(x, t)$ tinde către funcţia calorică $U(x, t)$ dată de formula lui Poisson

$$U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, \tau)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}\, d\xi,$$

unde $\tau$ este ordonata dreptei $AB$.

Inegalitatea precedentă devine deci

$$u(x_0, t_0) \leqq U(x_0, t_0) = \mu_0(u; h),$$

unde $h = t_0 - \tau$; teorema este demonstrată.

Teorema 2. *Dacă $u(x, t)$ este subcalorică în banda $[0, t_1]$ și dacă $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t}$ există și sînt continue în această bandă, atunci $u$ este subcalorică $(P)$ în banda considerată.*

Într-adevăr, în acest caz putem scrie

$$\mu_0(u; h) = u(x, t) + h[\square u(x, t) + \varepsilon]$$

cu $\varepsilon \to 0$ cînd $h \to 0$. Pe de altă parte, prin ipoteză

$$\mu_0(u; h) - u(x, t) \geqq 0,$$

oricare ar fi $h$. Deducem

$$\square u(x, t) \geqq 0.$$

Dar această relație exprimă, după un rezultat al lui Petrowski [5], tocmai condiția de subcaloricitate $(P)$.

**61.** Fie $u(x, t)$ o funcție definită în bandă $[0, t_1]$ și supusă la condiția

$$|u(x, t)| < M e^{Kx^2}, \left(K < \frac{1}{4t_1}\right).$$

În acest caz, putem să formăm mediile succesive

$$\mu_0(u; h), \mu_1(u; h), \ldots, \mu_{p-1}(u; h), \ldots$$

Să punem

$$V\left(1, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2}{p+1}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \ldots\ldots & \frac{2}{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} & \ldots\ldots & \left(\frac{2}{p+1}\right)^{p-1} \end{vmatrix}$$

$$V\left(\mu, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2}{p+1}\right) = \begin{vmatrix} \mu_0 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ \mu_1 & \frac{2}{3} & \ldots\ldots & \frac{2}{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \\ \mu_{p-1} & \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} & \ldots\ldots & \left(\frac{2}{p+1}\right)^{p-1} \end{vmatrix}$$

Vom spune că $u$ este subcalorică de ordinul $p$ în banda $[0, t_1]$ dacă pentru orice punct $(x, t)$ al acestei benzi şi pentru orice $h$ pozitiv posibil

$$u(x,t) \leqq \frac{V\left(1, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2}{p+1}\right)}{V\left(1, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2}{p+1}\right)}. \tag{31}$$

Teoremă. *Dacă $u(x,t)$ are derivate parţiale continue pînă la ordinul în care intervin în formarea operatorului $\Delta^p$ şi dacă toate aceste funcţii sînt majorate de $Me^{Kx^2}$ atunci condiţia necesară şi suficientă ca $u$ să fie subcalorică de ordinul $p$ în banda $[0, t_1]$ este ca să avem*

$$(-1)^p \Delta^p u(x,t) \leqq 0, \tag{32}$$

*în orice punct al acestei benzi.*

Într-adevăr, cu ipotezele admise şi cu notaţiile introduse, putem scrie formula (19) din punctul 52 astfel:

$$u(x,t) - \frac{V\left(1, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2}{p+1}\right)}{V\left(1, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2}{p+1}\right)} = (-1)^p h^p \frac{V\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \ldots, \frac{2}{p+2}\right)}{V\left(1, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2}{p+1}\right)} (\Delta^p u + \varepsilon_p),$$

$\varepsilon_p$ tinzînd către zero odată cu $h$.

Raportul celor doi determinanţi din al doilea termen din dreapta este pozitiv. Deci dacă primul membru este negativ sau nul, oricare ar fi $h > 0$, termenul

$$\Delta^p u(x,t) + \varepsilon_p,$$

trebuie să aibă semnul contrar lui $(-1)^p$.

Cum $\Delta^p u(x,t)$ nu depinde de $h$ şi $\varepsilon_p$ tinde către zero odată cu $h$, inegalitatea (32) rezultă imediat.

**62.** Definiţia dată mai sus nu se aplică unei funcţii definite într-un domeniu mărginit.

Ne vom restrînge în acest caz la funcţiile posedînd derivate parţiale continue pînă la ordinul în care intervin în formarea operatorului $\Delta^p u$ şi vom lua proprietatea din punctul precedent drept definiţie a subcaloricităţii de ordinul $p$.

Adică: O funcţie $u(x,t)$, definită în domeniul mărginit şi închis $D$, posedînd în acest domeniu derivate parţiale continue pînă la ordinul în care intervin în construirea operatorului $\Delta^p$, este subcalorică de ordinul $p$ în acest domeniu dacă în orice punct $(x,t)$ al acestuia avem

$$(-1)^p \Delta^p u \leqq 0.$$

Din această definiţie, rezultă următoarea

Teoremă (Extensiunea teoremei lui Riesz la funcțiile subcalorice de ordinul $p$). *Dacă $u(x, t)$ este subcalorică de ordinul $p$ în domeniul $D$ și dacă $U(x, t)$ este funcția calorică de ordinul $p$ determinată* (în mod unic) *prin condiția de a fi egală împreună cu operatorii $\Delta_u^i$, $(i < p)$, cu $u(x, t)$ și operato ii respectivi pe frontiera inferioară și laterală a domeniului $D$, atunci în orice punct $(x, t)$ interior, sau pe frontiera superioară avem*

$$u(x, t) \leqq U(x, t).$$

*Dacă, într-un punct interior $(x_0, t_0)$ avem*

$$u(x_0, t_0) = U(x_0, t_0),$$

*atunci avem peste tot în $D$*

$$u(x, t) = U(x, t).$$

Într-adevăr, din ipotezele admise și din formulele (37) și (37′) de la punctul 36, rezultă imediat

$$u(x, t) - U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\ }} \iint_D G^p(x, t; \xi, \tau)\, \Delta^p u(\xi, \tau)\, d\xi d\tau.$$

Din definiția lui $G^p(x, t; \xi, \tau)$ dată la punctul 34, rezultă imediat că $G^p(x, t; \xi, \tau)$ are un semn constant oricare ar fi punctele $(x, t)$, $(\xi, \tau)$ în domeniul $D$ și anume semnul lui $(-1)^{p+1}$.

Deci produsul

$$G^p(x, t; \xi, \tau)\, \Delta^p u(\xi, \tau)$$

are în $D$, semnul lui $(-1)^{2p+1}$, adică semnul *minus*. Pe de altă parte, integrala din membrul al doilea al formulei precedente nu se poate anula în $D$ decît dacă produsul precedent este identic nul în $D$, adică dacă

$$\Delta^p u = 0 \quad \text{în } D.$$

Dar atunci, în baza proprietății de monotonie a funcțiilor calorice, din egalitatea funcțiilor $u$ și $U$ pe frontiera inferioară și laterală a lui $D$, rezultă egalitatea lor în orice punct interior.

## ИТЕРИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

### (КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Предметом настоящего сообщения является изучение решений уравнений

$$\Delta^{(p)} u = \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(p)} u = 0, \tag{I}$$

а также и решение некоторых граничных задач, касающихся этих уравнений.

Для более краткого изложения автор называет *калорической* функцией любое решение, упорядоченное в известной области уравнения $\Delta u = 0$, и *поликалорической* функцией порядка $p$ любое упорядоченное решение уравнения (I).

Для упрощения расчетов автор ограничивается случаем с двумя переменными $x$ и $t$.

В разделе I показывается, что любую функцию $u(x, t)$, поликалорическую порядка $p$ в векторной области можно всегда написать только в виде

$$u(x,t) = u_0 + (t - t_0)\, u_1 + \ldots + (t - t_0)^{p-1}\, u_{p-1},$$

причем $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ являются калорическими функциями.

Аналогичное разложение можно произвести и в случае, если вместо $t - t_0$ взять любую линейную функцию от $x$ и $t$, но тогда коэффициенты $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ не определяются более одним и тем же путем.

Формулы (8) в № 5 дают выражение этих коэффициентов для случая вышеописанного разложения.

Важным следствием этой теоремы является то, что любая поликалорическая функция является аналитической относительно $x$ и 2-го класса (в смысле Голмгрена) относительно $t$.

В разделе II указывается следующее распространение известной формулы Пуассона на поликалорические функции порядка $p$.

*Если функции*

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x), \ldots,\ \varphi_{p-1}(x)$$

*удовлетворяют следующим условиям*: 1° $\varphi_K(x)$, $K = 0, 1, \ldots, p-1$, *является классом* $C^{2(p-K-1)}$; 2° *существуют две положительные постоянные* $M$ *и* $K$, *такие, что*

$$|\varphi_k^{(i)}(x)| < Me^{Kx^2},$$

$$(i = 0, 1, 2 \ldots 2\ p-2;\ K = 0, 1, 2, \ldots, p-1),$$

*то тогда существует поликалорическая функция и порядка* $p$ *в полосе* $0 < t < \dfrac{1}{4K}$ *и такая, что*

$$\lim_{t \to o} u(x,t) = \varphi_0(x),$$

$$\lim_{t \to o} \frac{\partial^K u(x,t)}{\partial t^K} = \varphi_K(x),\quad (K = 1, 2, 3 \ldots, p-1).$$

*Эта функция дана формулой (14') в № 13.*

В разделе III указывается другое распространение формулы Пуассона на поликалорические функции порядка $p$:

*Пусть*

$$f_0(x),\ f_1(x), \ldots,\ f_{p-1}(x)$$

*непрерывные р-функции на всей оси и такие, что*

$$|f_i(x)| < Me^{Kx^2},\quad (i = 0, 1, \ldots, p-1),$$

*причем* $M$ *и* $K$ *являются двумя положительными постоянными. В полосе* $\left(0, \dfrac{1}{4K}\right)$, *существует одна и только одна поликалорическая функция порядка* $p$, *такая, что*

$$\lim u(x,t) = f_0(x),\ \lim \Delta^s u(x,t) = f_s(x),$$

$$(s = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Эга функция задана формулой

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\xi,t)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\,d\xi,$$

в которой

$$F(x,t)=f_0(x)-\frac{t}{1}f_1(x)+\frac{t^2}{2!}f_2(x)-\ldots$$

$$\ldots+\frac{(-1)^{p-1}t^{p-1}}{(p-1)!}f_{p-1}(x)$$

В последнем параграфе настоящего раздела вводится понятие параболической аналитичности. Автор называет *аналитической параболической* функцией любую функцию $u(x,t)$, которую в полосе $0<t<\frac{1}{4K}$ можно записать в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}u_n(x,t),$$

в котором $u_n$ суть калорические функции, подвергнутые одному условию

$$|u_n(x,t)|<Me^{Kx^2},\ (n=0,1,2,\ldots).$$

Автор показывает, что параболически аналитическую функцию можно написать только в виде (1). Далее если $t=t_0$ является прямой рассматриваемой полосы, то можно показать, что существует единственный ряд калорических функций

$$u_0^0(x,t),\ u_1^0(x,t),\ldots,\ u_n^0(x,t),\ldots,$$

таких, что

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}u_n^0(x,t). \tag{1'}$$

Раздел IV посвящен граничным задачам для ограниченных областей. В первом параграфе этого раздела дается решение следующей задачи:

*Определить поликалорическую функцию $u(x,t)$ 2-го порядка (бикалорическую) внутри области $D$, ограниченной кривыми*

$$(\Gamma_1):\ x=\gamma_1(t);\ (\Gamma_2):\ x=\gamma_2(t),\ \gamma_1(t)<\gamma_2(t)$$

*и прямыми $t=0$, $t=t_1$, удовлетворяющими следующим начальным условиям*

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t'(x,0)=\psi(x),$$

*а также и следующим краевым условиям*

$$u(x,t)=f_1(t),\ u_x'(x,t)=g_1(t),\ \text{на}\ \Gamma_1$$

$$u(x,t)=f_2(i),\ u_x'(x,t)=g_2(t),\ \text{на}\ \Gamma_2.$$

Показывается, что решение этой задачи приводит к решению системы с четырьмя линейными интегральными уравнениями типа Вольтерра. Представление задачи уравнением потребовало введения и предварительного рассмотрения частной бикалорической функции, обладающей вдоль дуг $\Gamma_1$ или $\Gamma_2$ прерывистостями известного типа. Эта функция была названа «бикалорическим потенциалом», принимая во внимание ее роль в решении вышеуказанной задачи.

3-й параграф посвящен распространению формулы Грина на дифференциальный оператор $\Delta^p$. Это распространение оказалось возможным только благодаря использованию подходящего алгебраического символизма.

В 4-м параграфе вводится понятие «функции Грина порядка $p$» для уравнения (1) и указываются главные свойства этой функции.

Наконец 5-й, последний параграф этого раздела посвящен решению следующей задачи:

*Определить решение уравнения*

$$\Delta^p u\ (x,\ t) = f(x,\ t)$$

*в вышеуказанной области $D$ при известных значениях, которые ряд функций*

$$u,\ \Delta u,\ \Delta^2 u, \ldots, \Delta^{p-1} u$$

*принимает на дугах $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ и на нижней стороне $t = 0$ этой области.*

Опираясь на задачу, решенную в III разделе можно претендовать, чтобы значения, принятые предыдущим рядом на стороне $t = 0$, были нулевыми.

Для упрощенной таким образом задачи решение дано формулой

$$u\ (x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{p-1} \int_{(\Gamma_1+\Gamma_2)} \Delta^i u \frac{\partial G^{i+1}\ (x,\ t;\ \xi,\ \tau)}{\partial \xi}\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D G^p\ (x,\ t;\ \xi,\ \tau)\, f\ (\xi,\ \tau)\ d\xi\, d\tau.$$

Задача имеет единственное решение.

Раздел V является подготовительным для изложения теории, развиваемой в следующем разделе. Он посвящается полностью изучению интеграла

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}} \frac{u\ (\xi,\ t-h)}{\sqrt{h}}\, d\xi, \tag{II}$$

полученного из известного интеграла Пуассона путем замены аргумента $t$ в $t-h$, в зависимости от $u$. Этот интеграл имеет явный смысл в полосе $0 < t < \frac{1}{4K}$, если в этой полосе

$$|u\ (x,\ t)\ | < M.\ e^{Kx^2}$$

Фундаментальным результатом, рассматриваемым в этом разделе, является следующий: если $u$ обладает частными производными, необхо-

димыми для образования дифференциального оператора $\Delta p$ и если эти производные увеличены этой же функцией $Me^{Kx^2}$, тогда интеграл (II), рассматриваемый как функция от $h$, является $p$ раз дифференцируемым в точке $h = 0$ и его последовательные производные будут в этой точке соответственно

$$\Delta u\ (x, t),\ \Delta^2 u\ (x, t), \ldots,\ \Delta^p u\ (x, t).$$

Раздел VI, последний в представленном сообщении, посвящен большей частью свойствам поликалорических функций, определенных в полосе $0 < t < t_1$. Фундаментальный метод этого исследования построен на основании характеристической теоремы среднего, удовлетворяемой любой поликалорической функцией, подчиняющейся некоторым условиям возрастания при $x \to \infty$.

Если обозначить через $\mu_0\ (u; h)$ интеграл (11), могущий быть рассматриваемым как весомое среднее значений $u$ на прямой $t - h$, и если ввести в ряде средних $\{\ _s(u; h)\}$, определенных соотношением рекуррентности (3) в № 46, то можно сформулировать следующую теорему среднего.

1. *Если $u\ (x,t)$ является поликалорической функцией порядка $p$ в полосе $(0, t_1)$ и такой, что*

$$|u(x, t)| < Me^{Kx^2},\ |\Delta_u^i\ (x, t)| < Me^{Kx^2},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p - 1),$$

*с $4Kt_1 < 1$, то при любой точке $(x, t)$, в рассматриваемой полосе и при любом позитивном $h$, меньшем чем $t$, имеем соотношение (7) в № 48.*

II. *Обратно: любая функция $u\ (x, t)$, определенная в полосе $(0, t_1)$, для которой $|u\ (x, t)| < Me^{Kx^2}$ и удовлетворяющая соотношению (7) в № 48 является поликалорической порядка $p$ в рассматриваемой полосе.*

В качестве применения этой теоремы во 2-м параграфе этого раздела указано распространение теоремы Лиувилля на поликалорические функции. Кроме того доказываются следующие свойства:

I. *Предел сходящегося равномерного ряда поликалорических функций того же порядка $p$ в полосе $(0, t_1)$ есть поликалорическая функция порядка $p$ в этой полосе.*

II. *Любое семейство поликалорических функций порядка $p$, одинаково ограниченное в полосе $(0, t_1)$, является нормальным внутри этой полосы.*

Также как применение вышеуказанной теоремы среднего, автор показывает наконец следующее распространение первой теоремы Харнаке на поликалорические функции.

III. *Пусть $\{u_n\ (x, t)\}$ представляет собой ряд поликалорических функций порядка $p$ в полосе $(0, t_1)$, при котором ряды*

$$\{u_n\ (x, 0)\},\ \{\Delta\ u_n\ (x, 0)\},\ \ldots,\ \{\Delta^{p-1}\ u_n\ (x, 0)\}$$

*равномерно сходятся на оси $Ox$. Будем также полагать, что существует позитивное число $M$ и позитивное число $K < \frac{1}{4t_1}$, так что имеем*

$$|\ u_n\ (x, t)| < M.\ e^{Kx^2},\ |\Delta_u^s\ (x, t)| < M.e^{Kx^2} \tag{2}$$
$$(s = 1, 2, \ldots,\ p - 1\ ;\ n = 1, 2, 3 \ldots).$$

равномерно сходятся на нижней и боковой границе области $D$. В этих условиях предшествующие ряды $p$ равномерно сходятся во всей области $D$.

*В этих условиях ряды*

$$\{u_n(x,t)\},\quad \{\square u_n(x,t)\},\ \ldots,\quad \{\square^{p-1} u_n(x,t)\}$$

*равномерно сходятся в любой полосе* $[\varepsilon, t_1]$, *в которой* $\varepsilon > 0$, *соответственно к*

$$u(x,t),\ \square u(x,t),\ \ldots,\ \square^{p-1} u(x,t).$$

*где* $u(x,t)$ *является поликалорической функцией порядка* $p$.

В 3-м параграфе доказывается, что для ограниченной области вышеуказанного типа, теорема III переходит в III′. Пусть $\{u_n(x,t)\}$ представляет собой ряд поликалорических функций порядка $p$ в $D$ такой, что ряды

$$\{u_n(x,t)\},\quad \{\square U_n(x,t)\},\ \ldots,\quad \{\square^{p-1} u_n(x,t)\}$$

4-й параграф посвящен функциям, называемым автором *субкалорическими* (порядка 1, 2, 3,...), определенными в бесконечной полосе $[0, t_1]$. Автор доказывает, что субкалорические функции порядка 1 (обычные субкалорические функции) могут быть характеризуемы одним из следующих неравенств

$$u(x_0,t_0) \leqq u_0(u;h),\quad u(x_0,t_0) \leqq u_1(u;h),$$

в которых $h > 0$ является произвольным.

Доказывается, что субкалорическая функция в полосе $[0, t_1]$ не может достигнуть максимума ни внутри ее, ни на верхней боковой ее стороне. Отсюда выводится следующее важное свойство, распространяющее на субкалорические функции известную теорему Ф. Рисса.

*Если* $u(x,t)$ *является субкалорической функцией в полосе* $[0, t_1]$ *и если эта функция совпадает во внутренней точке с калорической функцией* $U(x,t)$, *принимающей те же значения, что и* $u(x,t)$ *на оси* $Ox$, *то имеем* $u(x,t) = U(x,t)$, *идентичную в* $[0, t_1]$.

В 1953 г И. Г. Петровский дал другое определение субкалорическим функциям. В этом сообщении уточняется связь между этими двумя определениями.

Вводится, наконец, понятие субкалорической функции порядка $p$ и доказывается, что *в классе функций, обладающих частными производными, необходимыми для образования оператора* $\square^p$, *необходимым и достаточным условием, для того чтобы* $y$ *была субкалорическим порядка* $p$, *является то, чтобы*

$$(-1)^p\, \square^p u(x,t) \leqq 0$$

*в любой точке рассматриваемой полосы.*

В случае ограниченной области $D$ вышеуказанного типа предыдущее свойство можно принять за определение субкалорических функций порядка $p$. В этом случае, на основе результатов, указанных в IV разделе можно следующим образом распространить теорему Ф. Рисса на субкалорические функции порядка $p$.

*Если $u(x, t)$ есть субкалорическая функция порядка $p$ в $D$ и если $U(x, t)$ есть поликалорическая функция порядка $p$, уникально определенная условием, согласно которому*

$$U(x, t) = u(x, t), \quad \underline{\Box}^s U(x, t) = \underline{\Box}^s u(x, t)$$
$$(s = 0, 1, 2, \ldots, p-1),$$

*на нижней и боковой границе $D$, то в любой точке, принадлежащей $D$, или на верхней границе, имеем*

$$u(x, t) \leqq U(x, t).$$

*Если во внутренней точке $(x_0, t_0)$ или на верхней границе имеем $u(x_0, t_0) = U(x_0, t_0)$, то $u$ и $U$ совпадают во всей области $D$.*

## L'ÉQUATION ITÉRÉE DE LA CHALEUR

(RÉSUMÉ)

L'objet de ce travail est l'étude des solutions de l'équation

$$\Box^{(p)} u = \left( \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(p)} u = 0, \tag{I}$$

ainsi que la résolution de quelques problèmes de frontière concernant cette équation.

Pour abréger, l'Auteur appelle fonction *calorique* toute solution, régulière dans un certain domaine, de l'équation

$$\Box u = \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

et fonction *polycalorique d'ordre p* toute solution régulière de l'équation (I). Les calculs sont faits pour deux variables $x$ et $t$.

Dans le premier chapitre, on montre que toute fonction $u(x, t)$, polycalorique d'ordre $p$ dans un certain domaine peut toujours être écrite et d'une seule manière sous la forme

$$u(x, t) = u_0(x, t) + (t - t_0)\, u_1(x, t) + \ldots + (t - t_0)^{p-1} u_{p-1}(x, t),$$

$u_0, u_1, \ldots u_{p-1}$ étant des fonctions caloriques.

Un développement analogue peut être écrit en prenant, au lieu de $t - t_0$, une fonction *linéaire* quelconque de $x$ et de $t$, mais dans ce cas les coefficients $u_0, u_1, \ldots u_{p-1}$ ne sont plus *univoquement* déterminés.

Les formules (8) du n° 5 donnent les expressions de ces coefficients dans le cas du développement écrit plus haut.

Une importante conséquence de ce théorème est que toute fonction polycalorique est analytique par rapport à $x$ et de classe 2 (au sens de Holmgren) par rapport à $t$.

Dans le chapitre II, on établit l'extension suivante aux fonctions polycaloriques d'ordre $p$ de la célèbre formule de Poisson:

*Si les fonctions*

$$\varphi_0(x), \ \varphi_1(x), \ \ldots, \ \varphi_{p-1}(x)$$

*vérifient les conditions suivantes:*

1° $\varphi_k(x)$, $k = 0, 1 \ldots, p-1$ *est de classe de dérivabilité* $c^{2(p-k+1)}$.
2° *il existe deux constantes positives* $M$ *et* $K$ *telles que*

$$|\varphi_k^{(i)}(x)| < Me^{Kx^2}$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2p-2;\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1),$$

*alors il existe une fonction* $u(x, t)$, *polycalorique d'ordre* $p$ *dans la bande* $0 < t < \frac{1}{4K}$ *et telle que*

$$\lim_{t\to 0} u(x,\ t) = \varphi_0(x),$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial^k u(x,\ t)}{\partial t^k} = \varphi_k(x),\ (K = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1).$$

*Cette fonction est donnée par la formule* (14') *du* n° 13.

Dans le chapitre III on établit une autre extension de la formule de Poisson aux fonctions polycaloriques d'ordre $p$:

*Soient*

$$f_0(x),\ f_1(x),\ \ldots,\ f_{p-1}(x)$$

$p$ *fonctions continues sur toute la droite et telles que*

$$|f_i(x)| < Me^{Kx^2},\ (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ p-1),$$

$M$ et $K$ *étant deux constantes positives. Il existe une fonction* $u(x, t)$ *et une seule polycalorique d'ordre* $p$, *dans la bande* $\left(0, \frac{1}{4K}\right)$, *telle que*

$$\lim_{t\to 0} u(x,\ t) = f_0(x),\ \lim_{t\to 0} \Delta^s u(x,\ t) = fs\ (x),\ (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1).$$

*Cette fonction est donnée par la formule*

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\ t)\ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\, d\xi.$$

*où*

$$F(x,\ t) = f_0(x) - \frac{t}{1} f_1(x) + \frac{t^2}{2!} f_2(x) - \ldots + \frac{(-1)^{p-1} t^{p-1}}{(p-1)!} f_{p-1}(x).$$

Dans le dernier § de ce chapitre, on introduit la notion d'analyticité parabolique. L'Auteur appelle *paraboliquement analytique* toute fonction $u(x, t)$ qui, dans la bande $0 < t < \frac{1}{4K}$ peut s'écrire sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_n(x,\ t), \tag{1}$$

où $u_n(x, t)$ sont des fonctions caloriques vérifiant l'inégalité

$$|u_n(x,\ t)| < Me^{Kx^2},\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

On montre qu'*une fonction paraboliquement analytique peut être mise d'une seule manière, sous la forme* (1). En second lieu, si $t = t_0$ est une droite quelconque de la bande considérée, on montre qu'*il existe une suite unique de fonctions caloriques*

$$u_0^0(x,\ t),\ u_1^0(x,\ t),\ \ldots,\ u_n^0(x,\ t),\ \ldots$$

*telle que* $u(x, t)$ *puisse s'écrire sous la forme*

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} u_n^0(x, t). \tag{1'}$$

Le chapitre IV est consacré aux problèmes de frontière pour les domaines bornés. Dans le premier § de ce chapitre on résout le problème suivant:

*Déterminer une fonction* $u(x, t)$, *polycalorique d'ordre 2 (bicalorique) à l'intérieur du domaine D limité par les courbes*

$$(\Gamma_1): x = \gamma_1(t), \ (\Gamma_2): x = \gamma_2(t), \ \gamma_1(t) < \gamma_2(t),$$

*et les droites* $t = 0$, $t = T$, *vérifiant les conditions initiales suivantes*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \ u'_t(x, 0) = \psi(x)$$

*et les conditions à la limite suivantes*

$$u(x, t) = f_1(t), \ u'_x(x, t) = g_1(t), \text{ sur } \Gamma_1;$$

$$u(x, t) = f_2(t), \ u'_x(x, t = g_2(t), \text{ sur } \Gamma_2.$$

On montre que la résolution de ce problème revient à la résolution de *quatre* équations intégrales linéaires du type Volterra. La mise en équation du problème exige l'introduction et l'étude d'une fonction bicalorique particulière possédant le long de $\Gamma_1$, ou de $\Gamma_2$ des discontinuités d'un certain type. L'Auteur a appelé cette fonction « potentiel bicalorique » à cause du rôle qu'elle joue dans la résolution du problème ci-dessus.

Le § 3 est consacré à l'extension de la formule de Green à l'opérateur différentiel $\Delta^p$, extension rendue possible uniquement par l'utilisation d'un symbolisme algébrique convenable.

Dans le § 4 on introduit la « fonction de Green d'ordre $p$ » pour l'équation (I), dont on donne les principales propriétés.

Enfin, le § 5, dernier paragraphe de ce chapitre, est consacré à la résolution du problème suivant:

*Déterminer une solution de l'équation*

$$\Delta^p u(x, t) = f(x, t)$$

*dans le domaine D, défini plus haut, connaissant les valeurs que la suite de fonctions*

$$u, \ \Delta u, \ \Delta^2 u, \ \ldots\ldots \ \Delta^{p-1} u$$

*prend sur les arcs* $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ *ainsi que sur le côté inférieur* $t = 0$ *du domaine.*

A l'aide du problème résolu dans le chapitre III, on peut demander que les valeurs prises par la suite précédente sur le côté $t = 0$ soient toutes nulles. Pour le problème ainsi simplifié, la solution est donnée par la formule

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{p-1} \int_{(\Gamma_1+\Gamma_2)} \Delta^i u \frac{\delta G^{i+1}(x, t; \xi, \tau)}{\delta \xi} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_D G^p(x, t; \xi, \tau), \ f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau.$$

*La solution est unique.*

Le chapitre V est un chapitre préparatoire à la théorie développée dans le chapitre suivant. Il est consacré à l'étude de l'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}} \cdot \frac{u(\xi,\ t-h)}{\sqrt{h}}\, d\xi \qquad \text{(II)}$$

obtenue de l'intégrale de Poisson par le changement de l'argument $t$ en $t-h$ dans la fonction $u$. Cette intégrale a évidemment un sens dans la bande

$$0 < t < \frac{1}{4K}$$

si l'on a dans cette bande

$$|u| < Me^{Kx^2}.$$

On démontre, dans ce chapitre, que si la fonction $u$ possède des dérivées partielles continues, nécessaires pour la fonction de l'opérateur différentiel $\Delta^p u$ et si ses dérivées sont majorées par $Me^{Kx^2}$ alors l'intégrale (II), considérée comme fonction de $h$ est $p$ fois dérivable au point $h=0$ et ses dérivées successives en ce point sont

$$\Delta u(x,\ t),\ \Delta^2 u(x,\ t),\ \ldots,\ \Delta^p u(x,\ t).$$

Le chapitre VI, dernier chapitre du travail, est consacré dans sa majeure partie à l'étude des propriétés des fonctions polycaloriques définies dans une bande $0 \leqq t \leqq t_1$. L'instrument fondamental de cette étude est un théorème de moyenne que vérifie toute fonction polycalorique soumise à certaines conditions de régularité pour $x \to \infty$.

Si l'on désigne par $u_0(u;\ h)$ l'intégrale (II) qu'on peut considérer comme une moyenne pondérée des valeurs de $u$ sur la droite $\tau = t-h$, et si l'on introduit la suite de moyennes $\{u_s(u;\ h)\}$, définies par la relation de récurrence (3) du n° 46, alors on peut énoncer le théorème suivant de moyenne:

I. *Si $u(x,\ t)$ est une fonction polycalorique d'ordre $p$ dans la bande $(0,\ t_1)$, et telle que l'on ait*

$$|u(x,\ t)| < Me^{Kx^2},\ |\Delta^i u(x,\ t)| < Me^{Kx^2},$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1),$$

*avec $4Kt_1 < 1$, alors on a, quel que soit le point $(x,\ t)$ dans la bande considerée, et quel que soit $h$ positif, inférieur à $t$, la relation (7) du n° 48.*

II. Réciproquement: *Toute fonction $u(x,\ t)$ définie dans la bande $(0,\ t_1)$ vérifiant l'inégalité $|u(x,\ t)| < Me^{Kx^2}$ et telle que la relation (7) du n° 48 ait lieu identiquement dans la bande considérée, est polycalorique d'ordre $p$, dans la bande considérée.*

Comme applications de ce théorème, on donne au § 2 de ce chapitre l'extension du théorème de Liouville aux fonctions polycaloriques et, de plus, on montre que:

I. *La limite d'une suite de fonctions polycaloriques, d'ordre $p$, uniformément convergente dans la bande $(o,\ t_1)$, est une fonction polycalorique d'ordre $p$ dans cette bande.*

II. *Toute famille de fonctions polycaloriques d'ordre $p$ également bornées dans la bande $(0,\ t_1)$, est normale dans l'intérieur de cette bande.*

Enfin, comme application du même théorème de moyenne, on donne l'extension suivante du premier théorème de Harnack aux fonctions polycaloriques:

III. *Soit* $\{u_n(x, t)\}$ *une suite de fonctions polycaloriques d'ordre p dans la bande* $(0, t_1)$ *et telle que les p suites*

$$\{u_n(x, 0)\}, \{\Delta u_n(x, 0)\}, \ldots, \{\Delta^{p-1} u_n(x, 0)\}$$

*convergent uniformément sur l'axe des x.*

*Supposons en plus, qu'il existe un nombre positif M et un autre nombre positif* $K < \frac{1}{4t_1}$, *tels que l'on ait*

$$|u_n(x, t)| < M.e^{Kx^2}, \quad |\Delta^s u(x, t)| < Me^{Kx^2} \tag{2}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, p-1), \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

*Dans ces conditions les p suites*

$$\{u_n(x, t)\}, \{\Delta u_n(x, t)\}, \ldots, \{\Delta^{p-1} u_n(x, t)\}$$

*convergent uniformément dans toute bande* $[\varepsilon, t_1]$ où $\varepsilon > 0$, *respectivement vers*

$$u(x, t), \Delta u(x, t), \ldots, \Delta^{p-1} u(x, t)$$

$u(x, t)$ *étant une fonction polycalorique d'ordre p.*

Dans le § 3 on montre que pour un domaine borné du type décrit plus haut, le théorème III devient:

III′. *Soit* $\{u_n(x, t)$ *une suite de fonctions polycaloriques d'ordre p dans D et telle que les p suites*

$$\{u_n(x, t)\}, \{\Delta u_n(x, t)\}. \ldots, \{\Delta^{p-1} u_n(x, t)\}$$

*convergent uniformément sur la frontière latérale et inférieure de D. Dans ces conditions, les p suites précédentes convergent uniformément à l'intérieur de D.*

Le § 4, dernier paragraphe de ce chapitre, est consacré aux fonctions que l'Auteur appelle sous-caloriques (d'ordre 1, 2, 3, ...), définies dans une bande infinie $[0, t_1]$. Pour les fonctions sous-caloriques d'ordre 1 (fonctions sous-caloriques ordinaires), on montre que ces fonctions peuvent être caractérisées par l'une ou l'autre des inégalités

$$u(x_0\, t_0) \leqq u_0(u; h), \quad u(x_0, t_0) \leqq u_1(u; h),$$

où $h$ est nombre positif arbitraire.

On démontre ensuite qu'une fonction sous-calorique dans la bande $[0, t_1]$ ne peut atteindre son maximum à l'intérieur ou sur le côté supérieur de la bande. On en déduit l'importante conséquence suivante, qui étend aux fonctions sous-caloriques un théorème connu de Fr. Riesz:

*Si* $u(x, t)$ *est sous-calorique dans la bande* $[0, t_1]$ *et si cette fonction coïncide, en un point intérieur, avec la fonction calorique* $U(x, t)$ *qui prend les mêmes valeurs que* $u(x, t)$ *sur l'axe des x, on a* $u(x, t) = U(x, t)$ *identiquement dans* $[0, t_1]$.

En 1935, I. G. Petrowski a défini les fonctions sous-caloriques d'une autre manière. On précise ici, la relation entre les deux définitions.

Enfin, on introduit la notion de fonction sous-calorique d'ordre $p$ et l'on démontre que, dans la classe des fonctions possédant le nombre de dérivées partielles nécessaires pour la fonction de $\Delta^p u$, *la condition nécessaire et suffisante pour que $u$ soit sous-calorique d'ordre $p$ est que l'on ait*

$$(-1)^p \cdot \Delta^p u(x, t) \leqq 0$$

*en tout point de la bande.*

La propriété précédente peut être prise comme *définition* des fonctions sous-caloriques d'ordre $p$ dans le cas d'un domaine borné. Dans ce dernier cas, on peut, en se basant sur les résultats du chapitre IV, étendre aux fonctions sous-caloriques d'ordre $p$, le théorème de F. Riesz, sous la forme suivante:

*Si $u(x, t)$ est sous-calorique d'ordre $p$ dans $D$ et si $U(x, t)$ est la fonction polycalorique d'ordre $p$ déterminée (univoquement) par la condition que*

$$\Delta^s U(x, t) = \Delta^s u(x, t), \quad (s = 1, 2, \ldots, p-1)$$

*sur les frontières inférieure et latérale de $D$, alors en tout point de $D$, ou de la frontière supérieure, on a*

$$u(x, t) \leqq U(x, t).$$

*Si en un point intérieur $(x_0, t_0)$ on a $u(x_0, t_0) = U(x_0, t_0)$, $u(x, t)$ et $U(x, t)$ coïncident dans tout $D$.*

## BIBLIOGRAFIE


1. L. Schwartz, *Théorie des distributions*. Paris, 1950.
2. Gr. C. Moisil, *Matricele asociate sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale*. Ed. Acad. R.P.R., 1950.
3. Miron Nicolescu, Commentarii Mathematici Helvetici, 1937 vol. 10, p. 3 — 17.
4. W. Sternberg, Mathematische Annalen, 1929, t. 101 p. 394 — 398.
5. I. G. Petrowski, Compositio Mathematica, 1935, vol. I, p. 383 — 419.
6. Miron Nicolescu, Studii şi cercetări matematice, t. III, nr. 1 — 2, ianuarie-iunie, 1952, p. 7 — 42.
7. — Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1930, t. 191, p. 515 — 517.
8. N. Ciorănescu, Bull. de la Soc. Math. de France, 1937, t. 64, p. 41.
9. E. Goursat, *Cours d'Analyse*. Paris, 1923, t. III.
10. A. N. Tihonov, Matematiceskii Sbornik, 1935, t. 42, p. 383 — 419.
11. S. D. Eidelman, Matematiceskii Sbornik, 1935, t. 33, (75) p. 359 — 382.
12. Miron Nicolescu, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., seria matematică, fizică, chimie, t. II, nr. 5, mai, 1950, p. 407 — 415.
13. Tibor Radó, *Subharmonic functions*. Berlin, 1937.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul V, nr. 3—4, 1954

# ASUPRA MIŞCĂRII UNEI PLĂCI PLANE PARALEL CU SOLUL ÎNTR-UN CURENT FLUID VARIABIL CU ÎNĂLŢIMEA

DE

CAIUS IACOB

1. **Introducere.** Problema care formează obiectul prezentei lucrări este următoarea: O placă plană $AB$, normală la sol, se mişcă paralel cu solul, cu o viteză $\vec{v}_0(t)$. Placa se află situată într-un curent fluid incompresibil limitat de solul orizontal. La infinit amonte distribuţia vitezelor în curentul fluid este dată de o funcţie liniară de înălţime. Placa este presupusă de anvergură infinită, aşa ca mişcarea fluidă să poată fi presupusă bidimensională.

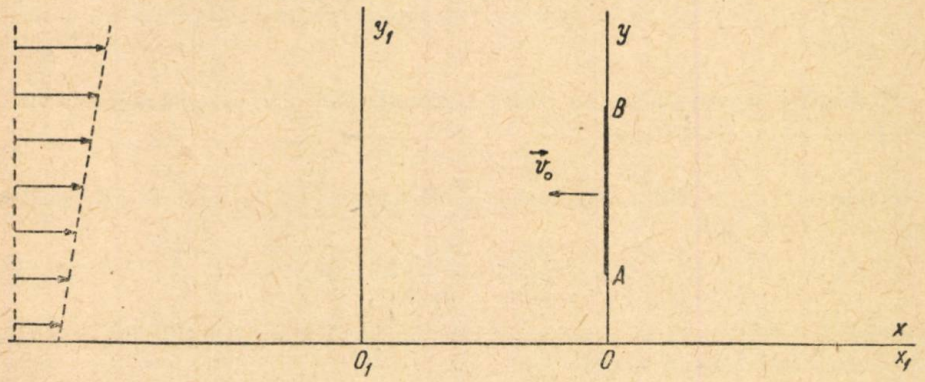



Fig. 1

Fie $O_1x_1y_1$ un sistem de axe fixe, de sens direct, alese aşa ca $y_1 = 0$ să fie ecuaţia solului. Vom adopta un sistem de axe mobile, legate de placa $AB$, axa $Ox$ coincizînd cu $O_1x_1$. Ordonatele constante ale punctelor $A$ şi $B$ sînt respectiv $a > 0$, $b > 0$, $(a < b)$, (fig. 1).

Vom avea

$$x_1 = x_0(t) + x\,,\quad y_1 = y, \tag{1}$$

unde

$$x_0(t) = \int_{t_0}^{t} u_0(t)\,dt, \tag{2}$$

$u_0(t)$ fiind proiecţia vitezei $\vec{v}_0(t)$ pe axa $Ox$.

Fie $\vec{v}$ viteza absolută a unei molecule fluide şi $u_1(x_1, y_1, t)$, $v_1(x_1, y_1, t)$ proiecţiile ei pe axele $O_1x_1$, $O_1y_1$. Distribuţia vitezelor în curentul fluid la infinit în amonte $(x_1 = -\infty)$, este dată de

$$u_\infty = V_\infty(t) + 2\alpha y_1, \quad v_\infty = 0, \tag{3}$$

unde $\alpha$ este o constantă dată.

Mişcările fluide permanente, cu distribuţia de viteze (3), (cu $V_\infty$ independent de $t$), au făcut deja obiectul unor numeroase cercetări. Vom menţiona în special pe acelea ale lui H. von Sanden [1], V. Vâlcovici [2], [3], [4], H. S. Tsien [5], H. T. Nagamatsu [6], Y. H. Kuo [7], precum şi pe acelea, publicate postum, ale lui S. A. Ciaplighin [8] Însă, cu excepţia unei lucrări a lui P. Harrington şi P. Libby [9], aceste cercetări presupun fluidul nelimitat în toate sensurile, neglijîndu-se deci influenţa solului, ceea ce face ca rezultatele obţinute să nu poată fi reţinute decît ca o primă aproximaţie.

Domeniul în care are loc mişcarea considerată de noi este dublu conex Ar fi deci cu totul indicat de a face reprezentarea conformă pe o coroană circulară, utilizînd în acest scop formula dată de H. Villat [10] într-o altă cercetare şi de a rezolva problema lui Dirichlet care se pune cu ajutorul formulei clasice dată de acest autor. Totuşi, pentru ca metoda de tratare a problemei să se poată extinde şi la cazul cînd avem mai multe plăci aliniate, vom da o altă soluţie problemei, care, cu excepţia unei schimbări de axe, nu utilizează nici o reprezentare conformă. De aceea, nu vom recurge nici la utilizarea funcţiilor eliptice pentru exprimarea soluţiei, ci vom stabili numai unele relaţii între integrale eliptice care pot fi uşor generalizate, folosind unele consideraţii dintr-un memoriu anterior [11], [12]. Cu acest prilej se va da o nouă demonstraţie unei relaţii celebre, datorite lui Legendre.

**2. Mişcări nepermanente cu vîrtej constant.** Din (3) reiese că expresia vîrtejului la infinit în amonte este

$$\zeta_\infty = -\alpha. \tag{4}$$

Acest fapt atrage, conform teoremelor lui Helmholtz, că în masa fluidă, vîrtejul este constant şi egal

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right) = -\alpha. \tag{5}$$

De altfel se verifică uşor că ecuaţia (5) este compatibilă cu ecuaţiile mişcării bidimensionale. Într-adevăr, acestea sînt

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - 2\zeta v_1 = \frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + 2\zeta u_1 = \frac{\partial H}{\partial y_1}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \tag{6}$$

unde $H$ este funcţia lui Helmholtz, dată de

$$H = U - \int\frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2}V^2, \quad (V^2 = u_1^2 + v_1^2); \tag{7}$$

$U(x_1, y_1, t)$ reprezintă potenţialul forţelor de masă iar $p$ şi $\rho$ sînt presiunea şi masa specifică. Dacă se elimină $H$ din (6), se obţine condiţia cunoscută

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\zeta}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial\zeta}{\partial y_1}v_1 + \zeta\operatorname{div}\vec{v} = 0, \tag{8}$$

din care se deduce, în virtutea lui (5),

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{9}$$

și această condiție este chiar cea de incompresibilitate.

Din (9) se deduce

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \quad v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \tag{10}$$

unde $\psi(x_1, y_1, t)$ este funcția de curent, care satisface ecuația

$$\Delta_{(x_1, y_1)} \psi = 2\alpha$$

ce rezultă din (5).

Să punem

$$\psi(x_1, y_1, t) = V_\infty(t)\, y_1 + \alpha y_1^2 + \Psi(x_1, y_1, t), \tag{11}$$

funcția $\Psi(x_1, y_1, t)$ fiind deci armonică față de $x_1, y_1$. Fie $-\Phi(x_1, y_1, t)$ o conjugată armonică a lui $\Psi(x_1, y_1, t)$. Din (6) și (10) rezultă

$$H + 2\alpha\psi = \frac{dV_\infty}{dt} x_1 + \frac{\delta \Phi}{\delta t}, \tag{12}$$

cu o alegere convenabilă a funcției de $t$ pe care o putem adăuga lui $\Phi(x_1, y_1, t)$. S-a notat prin $\delta\Phi/\delta t$ derivata parțială a lui $\Phi$ față de $t$ pentru $x_1, y_1$ fixați. Formula (12) se mai scrie, $\rho$ fiind constant,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 - U - 2\alpha\psi + \frac{dV_\infty}{dt} x_1 + \frac{\delta \Phi}{\delta t} = 0 \tag{12'}$$

și ea ne permite calculul presiunii.

Dacă funcția analitică de $z_1 = x_1 + i y_1$

$$F(z_1, t) = \Phi(x_1, y_1, t) + i\, \Psi(x_1, y_1, t), \tag{13}$$

se exprimă cu ajutorul coordonatelor $x, y$, vom avea $F(z_1, t) = F(z, t)$ unde

$$F(z, t) = \Phi(x, y, t) + i\, \Psi(x, y, t) \tag{14}$$

și $F(z, t)$ va fi o funcție analitică de $z = x + i y$. Vom putea scrie atunci

$$\frac{\delta \Phi}{\delta t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - u_0(t) \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{15}$$

$\partial\Phi/\partial t$ fiind derivata parțială a lui $\Phi(x, y, t)$ pentru $x$ și $y$ fixați.

**3. Condițiile la limită.** Fie $u(x, y, t)$ și $v(x, y, t)$ proiecțiile vitezei absolute $\vec{v}$ a unei molecule fluide pe axele mobile. Din (10) rezultă

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{10'}$$

unde $\psi(x, y, t)$ este funcţia de curent exprimată cu ajutorul noilor variabile. Introducînd funcţia $\Phi(x, y, t)$ şi ţinînd seamă de (11) rezultă deci,

$$u = V_\infty(t) + 2\alpha y + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = V_\infty(t) + 2\alpha y + \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$
$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{16}$$

şi

$$-iv = V_\infty(t) + 2\alpha y + \frac{dF}{dz}. \tag{17}$$

Cunoaşterea cîmpului vitezelor revine deci la aceea a lui $F(z, t)$.

Condiţiile la limită ale problemei sînt:

*A*) $$\Psi = 0 \text{ pentru } y = 0, \ -\infty < x < +\infty \tag{18}$$

deoarece solul este o linie de curent;

*B*) Fie $\vec{v_r}(u_r, v_r)$ viteza relativă a unei molecule fluide faţă de axele mobile avînd ca proiecţii pe aceste axe pe $u_r$ şi $v_r$. Avem

$$\vec{v} = \vec{v_0}(t) + \vec{v_r},$$

sau

$$u = u_0(t) + u_r, \ v = v_r;$$

pe placa $AB$ viteza relativă trebuie să fie tangentă, deci $u_r = 0$ sau

$$u = u_0(t) = V_\infty(t) + 2\alpha y + \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

de unde

$$\Psi = C(t) - w_\infty(t)\, y - \alpha y^2 \quad \text{pentru } x = 0, \ a \leqslant y \leqslant b, \tag{19}$$

de ambele laturi ale plăcii, scriind

$$w_\infty(t) = V_\infty(t) - u_0(t); \tag{20}$$

$C(t)$ înseamnă o funcţie de $t$ care urmează să fie determinată.

În definitiv, avem de rezolvat o problemă Dirichlet: *să se determine funcţia* $\psi(x, y, t)$, *armonică faţă de* $x$, $y$, *regulată în domeniul format de semiplanul* $y > 0$ *cu tăietura* $AB$ *pe axa* $Oy$, *astfel ca ea să fie continuă pe frontierele* $Ox$ *şi* $AB$ *şi să verifice condiţiile la limită* (18) *şi* (19).

Domeniul considerat fiind dublu conex, funcţia armonică $\Phi(x, y, t)$ a cărei asociată este $\Psi(x, y, t)$, va fi multiformă, avînd o perioadă $\Gamma$ pentru un drum simplu închis care ocoleşte pe $AB$ şi este parcurs în sensul direct.

**4. Semnificaţia lui $C(t)$ şi a lui $\Gamma$.** Să evaluăm fluxul vitezei relative prin segmentul $OA$. În virtutea lui (18) şi (19), expresia sa este

$$\int_0^a u_r\, dy = \int_0^a \left( w_\infty(t) + 2\alpha y + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dy = C(t),$$

ceea ce ne dă interpretarea lui $C(t)$.

În mod analog, dacă evaluăm circulaţia vitezei absolute, pentru $t$ fix, pe un contur simplu închis, care înconjoară pe $AB$, avem următoarea expresie

$$\Phi\, u\delta x + v\delta y = \oint [(V_\infty(t) + 2\alpha y)\,\delta x + \delta\Phi] = \Gamma - 2\alpha S,$$

unde $S$ este suprafaţa limitată de conturul considerat. Dacă se ia drept contur de integrare chiar tăietura $AB$, care va fi parcursă în ambele sensuri, circulaţia vitezei absolute va fi chiar $\Gamma$. Se constată uşor că ea coincide cu circulaţia vitezei relative pe placă.

**5. Schimbarea de axe.** Pentru rezolvarea problemei la limită, va fi mai comod să trecem de la planul $z = x + iy$ la planul $Z = X + iY$ făcînd schimbarea de axe

$$z = iZ, \tag{21}$$

ceea ce ne va conduce la figura 2, unde axa $OY$ corespunde axei $Ox$ iar segmentul $A'B'$, de pe $OX$, segmentului $AB$. Abscisele punctelor $A'$ şi $B'$ sînt respectiv $a$ şi $b$. Domeniul transformat este astfel semiplanul $X > 0$ cu frontierele $OY$ şi $A'B'$; el va fi notat prin $D$. Funcţia $F(z, t)$ va deveni o funcţie $F(Z, t) = \Phi + i\Psi$, analitică de $Z$, a cărei parte imaginară, uniformă şi regulată în $D$, va verifica condiţiile la limită

$$\begin{aligned} &\Psi = 0, && \text{pentru } X = 0,\ -\infty < Y < +\infty, \\ &\Psi = C(t) - w_\infty(t)\, X - \alpha X^2 = g(X) && \text{pentru } a \leqslant X \leqslant b,\ Y = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

a doua fiind îndeplinită pe ambele laturi ale tăieturii $A'B'$.

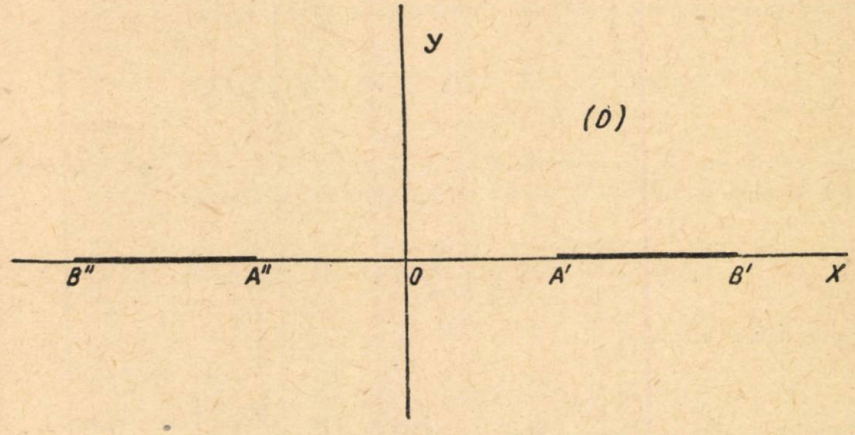



Fig. 2

În virtutea principiului de simetrie al lui Schwarz, $F(Z, t)$ se va prelungi analitic în întreg planul $Z$, prevăzut cu frontierele $B''A''$ şi $A'B'$, punctele $A''$ şi $B''$ fiind respectiv simetricele lui $A'$ şi $B'$ faţă de axa $OY$ (fig. 2), astfel că

$$\Phi(X, Y, t) = \Phi(-X, Y, t), \qquad \Psi(X, Y, t) = -\Psi(-X, Y, t).$$

Funcţia $\Phi(X, Y, t)$ va avea deci în jurul lui $B''A''$, ocolit în sensul trigonometric, o perioadă egală cu $-\Gamma$. Dacă descriem un contur simplu închis, care conţine în interior atît pe $A'B'$ cît şi pe $B''A''$, $F(Z, t)$ va reveni la valoarea iniţială.

Funcţia $F(Z, t)$, presupusă continuă la infinit, va fi regulată în acest punct, conform unei teoreme clasice.

Pe ambele laturi ale lui $B''A''$ vom avea

$$\Psi = -C(t) - w_\infty(t) X + \alpha X^2 = -g(-X) \text{ pentru } -b \leqslant X \leqslant -a,\ Y = 0, \quad (23)$$

ceea ce va permite să rezolvăm problema lui Dirichlet pentru planul cu cele două tăieturi, potrivit unei metode pe care am expus-o anterior [11].

**6. Legătură între fluxul $C(t)$ şi circulaţia $\Gamma$.** Să considerăm funcţia $\sqrt{(Z^2-a^2)(Z^2-b^2)}$ în planul $Z$ prevăzut cu frontierele $A'B'$ şi $B''A''$. Luăm determinaţia radicalului care este pozitivă pentru $Y = 0$, $X > b$; dacă punem pentru prescurtare

$$R(Z) = (Z^2 - a^2)(Z^2 - b^2),$$

avem

$$\sqrt{R(Z)} = \pm i \sqrt{|R(X)|} \text{ pe } A'B', \quad \sqrt{R(Z)} = \mp i \sqrt{|R(X)|} \text{ pe } A''B'',$$

semnul superior convenind marginilor pozitive ale frontierelor, apoi

$$\sqrt{R(Z)} = +\sqrt{R(X)} \quad \text{pentru } -\infty < X < -b,\ b < X < +\infty,\ Y = 0,$$

$$\sqrt{R(Z)} = -\sqrt{R(X)} \quad \text{pentru } -a < X < a,\ Y = 0.$$

Cu aceste precizări, să considerăm integrala de prima specie

$$L_0(Z) = \int_0^Z \frac{dZ}{\sqrt{R(Z)}} = g_0(X, Y) + i h_0(X, Y), \quad (24)$$

pornind cu valoarea $L_0(0) = 0$. Funcţia $L_0(Z)$ are partea reală armonică, uniformă, regulată în domeniul $D$, nulă pe $OY$ şi cu valoarea constantă

$$-\int_0^a \frac{dX}{\sqrt{R(X)}} \text{ pe } A'B'.$$

Să aplicăm formula

$$\int_{(R)} \left( \Psi \frac{dg_0}{dn} - g_0 \frac{d\Psi}{dn} \right) ds = \int_{(C')} \left( \Psi \frac{dg_0}{dn} - g_0 \frac{d\Psi}{dn} \right) ds$$

unde $(R)$ înseamnă conturul format dintr-un semicerc de rază $R$ cu centrul în $O$, situat în $D$ şi din segmentul $Z = -iR$, $Z = iR$ al axei $OY$, iar $(C')$ un contur simplu închis care înconjoară pe $A'B'$. Se vede imediat că dacă $R \to +\infty$, primul membru tinde spre zero, deoarece derivatele normale ale lui $\Psi$ şi $g_0$ sînt de ordinul de mărime al lui $R^{-2}$. Făcînd ca $(C')$ să se deformeze prin continuitate la tăietura $A'B'$, parcursă pe ambele laturi, obţinem

$$\oint_{A'B'} \Psi \frac{dg_0}{dn} ds = \oint_{A'B'} g_0 \frac{d\Psi}{dn} ds \quad (25)$$

contribuția cercurilor cu centrele în $A'$ și $B'$, prin care evităm aceste puncte, tinzînd către zero odată cu razele acestor cercuri conform punctului nr. 7. Dacă orientăm normala spre interiorul lui $D$, avem

$$\frac{dg_0}{dn} = -\frac{dh_1}{dX} = -\frac{1}{\sqrt{|R(X)|}} \quad \text{pe } (A'B')_+$$

$$\frac{dg_0}{dn} = \frac{dh_0}{dX} = \frac{1}{\sqrt{|R(X)|}} \quad \text{pe } (A'B')_-,$$

cu notații care se înțeleg de la sine. Rezultă atunci din (25)

$$\Gamma \int_0^a \frac{dX}{\sqrt{R(X)}} = 2 \int_a^b \frac{g(X)\,dX}{\sqrt{|R(X)|}}. \tag{26}$$

Să punem pentru simplificarea scrisului

$$k = \frac{a}{b},\ k'^2 = 1 - k^2,\ k' = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$$

și

$$\boldsymbol{K}(k) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

$$\boldsymbol{K}'(k) = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k'^2\xi^2)}} = \boldsymbol{K}(k'),$$

$$\boldsymbol{E}(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2\xi^2}{1-\xi^2}}\,d\xi,$$

$$\boldsymbol{E}'(k) = k^2 \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{\xi^2\,d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k'^2\xi^2}{1-\xi^2}}\,d\xi = \boldsymbol{E}(k').$$

Vom utiliza în general notația

$$I_n = \int_0^a \frac{X^n\,dX}{\sqrt{R(X)}},\ I'_n = \int_a^b \frac{X^n\,dX}{\sqrt{|R(X)|}},\ (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{27}$$

radicalul fiind luat cu valoarea aritmetică.

Se vede ușor că

$$I_0 = \frac{1}{b}\boldsymbol{K}(k), \qquad I'_0 = \frac{1}{b}\boldsymbol{K}'(k),$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\log\frac{b+a}{b-a}, \quad I'_1 = \frac{\pi}{2}, \tag{28}$$

$$I_2 = b[\boldsymbol{K}(k) - \boldsymbol{E}(k)],\ I'_2 = b\,\boldsymbol{E}'(k).$$

Ţinînd seama de expresia lui $g(X)$, relaţia (26) ia forma

$$\Gamma I_0 = 2C(t) I_0' - \pi w_\infty(t) - 2\alpha I_2' \tag{29}$$

sau

$$\Gamma \underset{\sim}{K}(k) = 2C(t) K'(k) - \pi b w_\infty(t) - 2\alpha b^2 \boldsymbol{E}'(k). \tag{29'}$$

**7. Rezolvarea problemei la limită.** Pentru a face uniformă soluţia $F(Z,t)$ a problemei, să practicăm în planul $Z$, cu frontierele $A'B'$ şi $B''A''$, tăietura $(-a+a)$ de-a lungul axei reale. Din motive de simetrie putem alege o determinaţie a lui $F(Z,t)$, pe care o vom considera principală, care să verifice pe lîngă condiţiile la limită (22) şi (23), condiţiile suplimentare

$$\Phi = 0 \quad \text{pentru} \quad -\infty < X \leqslant -b,\ b \leqslant X < +\infty,\ Y = 0 \tag{30}$$

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2} \quad \text{pentru} \quad -a \leqslant X \leqslant a,\ Y = +0 \tag{31}$$

condiţia (31) avînd deci loc pe marginea pozitivă a tăieturii, notată prin $Y = +0$, cea negativă fiind notată prin $Y = -0$. Atunci, această determinaţie considerată în semiplanul superior $Y > 0$, se va prelungi în cel inferior $Y < 0$ prin porţiunile $(-\infty, -b)$, $(b, +\infty)$ ale axei reale, conform principiului lui Schwarz, ceea ce va asigura satisfacerea condiţiilor (22) şi (23) şi pe laturile negative ale frontierelor $A'B'$ şi $B''A''$. Pe marginea negativă a tăieturii $(-a, +a)$, se va avea atunci

$$\Phi = -\frac{\Gamma}{2} \quad \text{pentru} \quad -a \leqslant X \leqslant a, \quad Y = -0,$$

deci variaţia lui $\Phi$ pe un contur simplu închis care înconjoară pe $A'B'$ va fi egală cu perioada $\Gamma$ aşa cum trebuia ; de asemenea pentru un contur simplu închis, înconjurînd pe $B''A''$ ea va fi egală cu $-\Gamma$, ambele contururi fiind parcurse în sensul trigonometric.

Noua problemă la limită pentru semiplanul superior admite o singură soluţie mărginită, care se obţine printr-un procedeu cunoscut [11]. Se observă că funcţia

$$\frac{F(Z,t)}{\sqrt{R(Z)}},$$

nulă la infinit, este olomorfă în semiplanul $Y > 0$ şi are partea reală cunoscută, pe frontiera $Y = 0$, ca urmare a condiţiilor (22), (23), (30) şi (31). Rezolvînd această problemă Dirichlet pentru semiplan, rezultă

$$F(Z,t) = \frac{2i}{\pi} Z \sqrt{R(Z)} \left\{ \int_a^b \frac{g(\xi)\, d\xi}{(Z^2 - \xi^2)\sqrt{|R(\xi)|}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\Gamma}{2} \int_0^a \frac{d\xi}{(Z^2 - \xi^2)\sqrt{R(\xi)}} \right\} \tag{32}$$

şi se vede imediat că (32) reprezintă soluţia $F(Z,t)$ şi în semiplanul inferior, dacă $Z$ străbate porţiunile $(-\infty, -b)$, $(b, +\infty)$ ale axei reale. Se verifică imediat că funcţia $F(Z,t)$, dată de (32), satisface condiţiile la limită ale problemei, dar ea nu este regulată la infinit decît dacă relaţia (26), a cărei necesitate a fost stabilită, are loc.

Dacă în locul lui $F(Z, t)$ am fi considerat funcţia $F(Z, t) \mp \frac{\Gamma}{2}$, semnul $-$ corespunzînd lui $Y > 0$, iar $+$ lui $Y < 0$ şi am fi practicat tăieturile $(-\infty, -b)$ şi $(b, +\infty)$ pe axa reală, în loc de tăietura $(-a, +a)$, un procedeu analog ne-ar fi dat formula

$$F(Z,t) \mp \frac{\Gamma}{2} = \frac{2i}{\pi} Z \sqrt{R(Z)} \left\{ \int_a^b \frac{g(\xi)\, d\xi}{(Z^2-\xi^2)\sqrt{|R(\xi)|}} - \frac{\Gamma}{2} \int_b^{+\infty} \frac{d\xi}{(Z^2-\xi^2)\sqrt{R(\xi)}} \right\} \tag{33}$$

pentru a reprezenta aceeaşi determinaţie principală, trecerea de la semiplanul superior la cel inferior fiind de data aceasta făcută prin porţiunea $(-a, +a)$ a axei reale. Din compararea relaţiei (32) cu (33) se vede că avem

$$2Z \int_0^a \frac{d\xi}{(Z^2-\xi^2)\sqrt{R(\xi)}} = \pm \frac{\pi i}{\sqrt{R(Z)}} + 2Z \int_b^{+\infty} \frac{d\xi}{(Z^2-\xi^2)\sqrt{R(\xi)}}, \tag{34}$$

semnul $+$ convenind pentru $Y > 0$, iar $-$ pentru $Y < 0$; această egalitate se verifică şi direct.

Formula (32) rezolvă problema la limită (22) pentru o funcţie $g(X)$ continuă oarecare, $\Gamma$ fiind dat de (26). Dacă ţinem acum seamă de expresia lui $g(X)$ în problema hidrodinamică, formula (32) poate fi transformată pentru a se vedea comportamentul vitezei în punctele $A$ şi $B$.

Integrînd funcţiile de $\zeta$

$$\frac{\zeta}{(Z-\zeta)\sqrt{R(\zeta)}}, \qquad \frac{\alpha\zeta^2 - C(t)}{(Z-\zeta)\sqrt{R(\zeta)}}$$

pe un contur format dintr-un cerc cu centrul în $O$ şi de rază foarte mare, precum şi din frontierele $B''A''$ şi $A'B'$, parcurse pe ambele laturi, se obţine uşor

$$\begin{aligned} &\int_a^b \frac{\xi\, d\xi}{(Z^2-\xi^2)\sqrt{|R(\xi)|}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{R(Z)}} \\ &\int_a^b \frac{[\alpha\xi^2 - C(t)]\, d\xi}{(Z-\xi)\sqrt{|R(\xi)|}} - \int_{-b}^{-a} \frac{[\alpha\xi^2 - C(t)]\, d\xi}{(Z-\xi)\sqrt{|R(\xi)|}} = \pi \left( \frac{\alpha Z^2 - C(t)}{\sqrt{R(Z)}} - \alpha \right). \end{aligned} \tag{35}$$

Cu ajutorul acestor formule, din (33) se deduce

$$\begin{aligned} F(Z,t) \mp \frac{\Gamma}{2} = &- i\,[\alpha Z^2 + w_\infty(t)\, Z - C(t)] + i\alpha\sqrt{R(Z)} - \\ &- \frac{2i}{\pi}\sqrt{R(Z)} \int_{-b}^{-a} \frac{[\alpha\xi^2 - C(t)]\, d\xi}{(Z-\xi)\sqrt{|R(\xi)|}} - \frac{i\Gamma}{\pi} Z\sqrt{R(Z)} \int_b^{+\infty} \frac{d\xi}{(Z^2-\xi^2)\sqrt{R(\xi)}}. \end{aligned} \tag{33'}$$

O transformare analogă ar putea fi aplicată şi lui (32). Se vede astfel că $\frac{dF}{dz}$ deci viteza complexă se comportă ca $[R(Z)]^{-\frac{1}{2}}$ în vecinătatea punctelor $A$ şi $B$.

**8. Reprezentarea integralelor eliptice de prima şi a doua specie ca integrale de funcţii de un parametru.** Să considerăm integralele eliptice

$$L_k(Z) = \int_0^Z \frac{Z^k\, dZ}{\sqrt{R(Z)}}, \quad (k = 0; 2), \tag{36}$$

în planul $Z$ cu frontierele $A'B'$ şi $B''A''$.

Părţile reale ale acestor funcţii sînt uniforme şi satisfac condiţiile la limită

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,\{L_k(Z)\} = -I_k \quad \text{pe } A'B', \\ &\mathrm{Re}\,\{L_k(Z)\} = I_k \quad \text{pe } B''A'', \end{aligned} \qquad (k = 0; 2) \tag{37}$$

şi avem de asemenea

$$\mathrm{Re}\,\{L_k(Z)\} = 0 \quad \text{pe } OY, \qquad (k = 0; 2). \tag{38}$$

Părţile imaginare ale lui $L_k(Z)$, $(k = 0; 2)$, nu sînt uniforme, $\mathrm{Im}\,\{L_k(Z)\}$ are respectiv perioadele $-2I'_k$ în jurul lui $B''A''$ şi $2I'_k$ în jurul lui $A'B'$, relative la contururi simple închise, parcurse în sensul trigonometric, care conţin în interior numai pe $B''A''$ sau pe $A'B'$.

Dacă practicăm, fie tăietura $(-a, +a)$, fie tăieturile $(-\infty, -b)$, $(b, +\infty)$ pe axa reală, $L_k(Z)$ devine uniformă. Pentru a fixa ideile să adoptăm tăietura $(-a, +a)$ şi să considerăm ca determinaţie principală a lui $L_k(Z)$ pe aceea pentru care

$$Lk(Z) = 0 \quad \text{pentru} \quad X = 0, \quad Y = +0. \tag{39}$$

Avem atunci

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}\,\{L_k(Z)\} = 0 \quad \text{pentru } -a \leqslant X \leqslant a,\ Y = +0, \\ &\mathrm{Im}\,\{L_k(Z)\} = -I'_k \quad \text{pentru } -\infty < X \leqslant -b,\ b \leqslant X < +\infty,\ Y = 0, \end{aligned} \tag{40}$$

şi evident

$$\mathrm{Im}\,\{L_k(Z)\} = -2I'_k \text{ pentru } -a \leqslant X \leqslant a,\ Y = -0. \tag{41}$$

Să ne limităm la semiplanul superior. Din condiţiile precedente rezultă că se cunosc pe axa $OX$ valorile părţilor imaginare ale funcţiilor

$$\frac{L_k(Z) + iI'_k}{\sqrt{R(Z)}},$$

care se anulează la infinit. Rezolvînd problema la limită corespunzătoare pentru semiplan, se găseşte

$$L_j(Z) = -iI'_j + \frac{2}{\pi} Z\sqrt{R(Z)} \left\{ I'_j \int_0^a \frac{d\xi}{(Z-\xi)\sqrt{R(\xi)}} - I_j \int_a^b \frac{d\xi}{(Z-\xi^2)\sqrt{|R(\xi)|}} \right\}. \qquad (j = 0,2) \tag{42}$$

Conform relaţiei (34), putem înlocui integrala relativă la intervalul $(0, a)$ printr-o integrală relativă la $(b, +\infty)$. Vom avea astfel

$$L_j(Z) = \frac{2}{\pi} Z\sqrt{R(Z)} \left\{ I'_j \int_b^{+\infty} \frac{d\xi}{(Z^2 - \xi^2)\sqrt{R(\xi)}} - I_j \int_a^b \frac{d\xi}{(Z^2 - \xi^2)\sqrt{|R(\xi)|}} \right\} + \\ + \begin{cases} 0 \\ -2i\, I'_j \end{cases} \tag{43}$$

după cum $Y > 0$ sau $Y < 0$, trecerea la semiplanul inferior fiind făcută prin porţiunea $(-a, +a)$ a axei reale.

**9. Aplicaţie.** Să dezvoltăm în serie în vecinătatea lui $Z = \infty$, ambii termeni ai lui (42), luînd $j = 0$ şi să egalăm coeficienţii puterilor lui $Z$. Se găseşte, limitîndu-ne la termenii în $Z^{-1}$ şi $Z^{-3}$,

$$I_0\, I'_2 - I_2\, I'_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_0\, I'_4 - I_4\, I'_0 = \frac{\pi}{3}(a^2 + b^2) \tag{44}$$

.....

Cu notaţiile (28), prima dintre aceste relaţii conduce la formula bine cunoscută a lui Legendre

$$K(k)\, E'(k) + E(k)\, K'(k) - K(k)\, K'(k) = \frac{\pi}{2}. \tag{45}$$

Luînd $j = 2$, (42) ne conduce în acelaşi mod la relaţia lui Legendre precum şi la alte formule analoge.

**10. Noua formă a soluţiei.** Din (42) se scoate, conform relaţiilor (44),

$$I_0 L_2(Z) - I_2 L_0(Z) = -i\frac{\pi}{2} + Z\sqrt{R(Z)} \int_0^a \frac{d\xi}{(Z^2 - \xi^2)\sqrt{R(\xi)}}, \tag{46}$$

$$I'_0 L_2(Z) - I'_2 L_2(Z) = Z\sqrt{R(Z)} \int_a^b \frac{d\xi}{(Z^2 - \xi^2)\sqrt{|R(\xi)|}}.$$

A doua din aceste relaţii se putea obţine şi din (43). Ea este deci valabilă în planul $Z$ cu frontierele $A'B'$ şi $B''A''$.

În aceste condiţii, (32) ne dă

$$F(Z, t) = -i\, w_\infty(t)\, Z + \frac{2i}{\pi}[C(t) - \alpha Z][I'_0 L_2(Z) - I'_2 L_0(Z)] + \frac{2i\alpha}{\pi} I'_0 Z\sqrt{R(Z)} \\ + \frac{\Gamma}{2} - \frac{i\Gamma}{\pi}[I_0 L_2(Z) - I_2 L_0(Z)]. \tag{47}$$

Această nouă formă a soluţiei este mai avantajoasă pentru calculul vitezei complexe.

**11. Soluţia aciclică.** Dacă luăm $\Gamma = 0$, atunci obţinem soluţia aciclică $F_0(Z, t)$ Fluxul relativ corespunzător $C_0(t)$ scos din (29), va fi dat de

$$2 I_0' C_0(t) = \pi w_\infty (t) + 2\alpha I_2' , \tag{48}$$

deci

$$C_0(t) = \frac{b}{\boldsymbol{K}'(k)}\left[\frac{\pi}{2} w_\infty (t) + \alpha b \boldsymbol{E}'(k)\right]. \tag{48'}$$

Expresia lui $F_0(Z,t)$ este

$$F(Z, t) = - i w_\infty (t) Z + \frac{2i\alpha}{\pi} I_0' Z \sqrt{R(Z)} + \frac{2i}{\pi}[C_0(t) - \alpha Z^2] \int_0^Z \frac{I_0' Z^2 - I_2'}{\sqrt{R(Z)}} dZ. \tag{49}$$

O altă expresie a lui $F_0(Z,t)$ se poate obţine din (33), pentru $\Gamma = 0$.

**12. Soluţia ciclică.** Dacă $\Gamma \neq 0$ este dat, vom pune în (29)

$$C(t) = C_0(t) + C_1 , \tag{50}$$

de unde

$$2 I_0' C_1 = \Gamma I_0, \tag{51}$$

sau

$$C_1 = \frac{\Gamma}{2} \frac{\boldsymbol{K}(k)}{\boldsymbol{K}'(k)}. \tag{51'}$$

Din (47) rezultă

$$F(Z,t) = F_0(Z, t) + F_1(Z) \tag{52}$$

unde, ţinînd seamă de relaţia lui Legendre,

$$F_1(Z) = \frac{\Gamma}{2} - \frac{i\Gamma}{2I_0'} L_0(Z) \tag{53}$$

ceea ce era de aşteptat potrivit consideraţiilor de la punctul 8.

**13. Alegerea circulaţiei $\Gamma$.** Pentru cele ce urmează va fi mai comod de a păstra soluţia sub forma (52). Vom alege pe $\Gamma$ aşa ca viteza fluidă să fie finită în punctul $A$, adică aşa ca $dF/dZ$ să fie finit pentru $Z = a$.

Această condiţie conduce la următoarea valoare a lui $\Gamma$:

$$\Gamma_A = \frac{4}{\pi} I_0' \{\alpha a^2 (a^2 - b^2) I_0' + (C_0(t) - \alpha a^2)(I_0' a^2 - I_2')\} \tag{54}$$

şi atunci, conform relaţiei lui Legendre,

$$\left(\frac{dF}{dZ}\right)_{Z=a} = - i [w_\infty (t) + 2\alpha a],$$

deci viteza absolută în punctul $A$ va fi dată de

$$(u - iv)_A = V_\infty (t) + 2\alpha a + \left(\frac{dF}{dz}\right)_A = u_0 (t), \tag{55}$$

iar viteza relativă va fi nulă.

Totuși, soluția dată aici nu este acceptabilă decît dacă $w_\infty(t) = \text{const.}$ căci, potrivit considerațiilor de la punctul 4, circulația în jurul unui contur închis, ce limitează suprafața $S$ este $\Gamma - 2\alpha S$ și ea trebuie să rămînă constantă în timp, după teorema lui Thompson, dacă conturul este considerat ca loc de molecule fluide. Cum $S$ rămîne constant, fluidul fiind incompresibil, urmează că și $\Gamma = \text{const.}$

Observație. Dacă am fi utilizat pe $F_0(Z, t)$ sub forma dedusă din (33'), am fi obținut o altă expresie a lui $\Gamma_A$, din compararea căreia cu (54) rezultă valoarea integralei

$$J' = \int_a^b \frac{d\xi}{(a+\xi)\sqrt{|R(\xi)|}} = \frac{1}{a(b^2-a^2)}(I_2' - a^2 I_0') = \frac{1}{ab} J_0', \tag{56}$$

de unde

$$J_0' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{(\xi+1)\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}} = \frac{1}{k'^2}[\boldsymbol{E}'(k) - k^2\boldsymbol{K}'(k)]. \tag{57}$$

formulă utilă în aplicații și care nu se găsește în tabelele uzuale.

Acest rezultat se putea obține direct și pe o altă cale. A doua din relațiile (46) ne dă, ținînd seamă de un caz particular al lui (35), pentru $\alpha = 0$,

$$I_2' L_0(Z) - I_0' L_2(Z) = -\frac{\pi}{2} - \sqrt{R(Z)} \int_{-b}^{-a} \frac{d\xi}{(Z-\xi)\sqrt{|R(\xi)|}} \tag{58}$$

Dacă se derivează față de $Z$ și se înmulțește apoi în ambii membrii ai egalității cu $\sqrt{R(Z)}$, se obține, pentru $Z \to a$, egalitatea (56).
La fel, dacă $Z \to b$ se obține

$$J'' = \int_a^b \frac{d\xi}{(b+\xi)\sqrt{|R(\xi)|}} = \frac{1}{b(b^2-a^2)}(I_0' b^2 - I_2') = \frac{1}{b^2} J_0'', \tag{59}$$

de unde

$$J_0'' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{(1+k\xi)\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}} = \frac{1}{k'^2}[\boldsymbol{K}'(k) - \boldsymbol{E}'(k)]. \tag{60}$$

**14. Expresia vitezei complexe.** Din (52) se scoate, pentru $\Gamma$ oarecare,

$$\frac{dF}{dZ} = iw_\infty(t)\left(\frac{Z^2 - \frac{I_2'}{I_0'}}{\sqrt{R(Z)}} - 1\right) + \frac{4\alpha i}{\pi} I_0' \sqrt{R(Z)} + \frac{4\alpha i}{\pi} \frac{Z^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{I_2'^2}{I_0'} + a^2 b^2 I_0'\right)}{\sqrt{R(Z)}} \tag{61}$$

$$+ \frac{4\alpha i}{\pi} Z[I_2' L_0(Z) - I_0' L_2(Z)] - \frac{i\Gamma}{2I_0'} \frac{1}{\sqrt{R(Z)}}.$$

Dacă se ia $\Gamma = \Gamma_A$, această expresie se simplifică și obținem

$$\frac{dF}{dZ} = iw_\infty\left(\sqrt{\frac{Z^2-a^2}{Z^2-b^2}} - 1\right) + \frac{4\alpha i}{\pi} I_0' \sqrt{R(Z)}$$

$$+ \frac{4\alpha i}{\pi} I_2' \sqrt{\frac{Z-a^2}{Z^2-b^2}} + \frac{4\alpha i}{\pi} Z[I_2' L_0(Z) - I_0' L_2(Z)]. \tag{62}$$

Odată calculat

$$\frac{dF}{dz} = -i\frac{dF}{dZ},$$

din (17) se obține expresia vitezei complexe. Este evident că $dF/dZ$ ar fi putut să fie determinat și direct, căutînd condițiile la limită pe care le verifică această funcție și rezolvînd problema la limită corespunzătoare. Acest procedeu a fost utilizat în teoria aripii subțiri de către L. I. Sedov [13]. Procedeul nostru are însă avantajul de a ne da și funcția de curent a mișcării.

**15. Calculul presiunii fluidului asupra obstacolului.** Condițiile de simetrie pe care le verifică soluția $F(Z, t)$ ne arată că de ambele laturi ale plăcii $AB$ viteza absolută (și la fel cea relativă) ia valori egale pentru aceleași $y$, $(a \leqslant y \leqslant b)$. Să notăm cu $R_x$ și $R_y$ proiecțiile pe axele $Ox$ și $Oy$ ale presiunii exercitate de fluid asupra plăcii $AB$. Avem evident

$$R_x = \int_a^b (p_1 - p_2)\, dy, \qquad R_y = 0; \tag{63}$$

unde $p_1$ și $p_2$ sînt respectiv valorile lui $p$ pe $AB$, pe latura spre amonte sau spre aval. Dar pe placă avem

$$\psi = u_0(t)\, y, \quad x_1 = x_0(t), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -w_\infty(t) - 2\alpha y,$$

deci (12′) ne dă

$$\frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_2,$$

de unde

$$R_x = \rho \oint_{AB} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, dy = -i\rho \oint_{AB} \frac{\partial F}{\partial t}\, dz, \tag{64}$$

integrînd în sensul direct pe ambele laturi ale lui $AB$.

În mod cu totul analog se obține ca expresie a momentului rezultant al presiunilor elementare exercitate de fluid asupra plăcii, calculat în punctul $O$,

$$M_0 = \rho \oint_{AB} \frac{\partial F}{\partial t}\, z\, dz. \tag{65}$$

Dacă trecem la planul $Z$, se va avea

$$R_x = \rho \oint_{A'B'} \frac{\partial F}{\partial t}\, dZ = \frac{1}{2}\rho \left( \oint_{B''A''} \frac{\partial F}{\partial t}\, dZ + \oint_{A'B'} \frac{\partial F}{\partial t}\, dZ \right), \tag{64′}$$

deoarece

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \quad \text{pe axa } OY,$$

și prin urmare $\partial\Phi/\partial t$ ia valori egale în puncte simetrice față de această axă.

La fel, (65) devine

$$M_0 = -\rho \oint_{A'B'} \frac{\partial F}{\partial t}\, Z\, dZ. \tag{65′}$$

Aici însă nu putem înlocui integrala din membrul al doilea cu alta extinsă pe frontierele $B''A''$ şi $A'B'$, deoarece $X\,\partial\Phi/\partial t$ ia valori opuse în puncte simetrice faţă de $OY$ şi integrala pe conturul total ar fi evident nulă.

Formulele (64′) şi (65′) arată că $R_x$ şi $M_0$ nu depind de $\alpha$, deoarece termenii care conţin pe $\alpha$ în expresia lui $F(Z, t)$ nu depind de $t$.

Vom considera două cazuri.

A) *Soluţia fără circulaţie pe obstacol* ($\Gamma = 0$). Avem

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -i\frac{dw_\infty}{dt}Z + \frac{2i}{\pi}\frac{dC_r}{dt}[I_0' L_2(Z) - I_2' L_0(Z)]. \tag{66}$$

Reziduul lui $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ la infinit este egal cu

$$\frac{2i}{\pi}\frac{dC_r}{dt}\left(I_2' - \frac{a^2+b^2}{2}I_0'\right),$$

deci, calculînd pe $\dfrac{dC_0}{dt}$ din (48),

$$R_x = -\pi\rho\frac{dw_\infty}{dt}\left(\frac{I_2'}{I_0'} - \frac{a^2+b^2}{2}\right). \tag{67}$$

Pentru calculul lui $M_0$, observăm că din (65′) şi din (66) se scoate

$$M_0 = -\rho\oint_{A'B'} Z\left\{\frac{2i}{\pi}\frac{dC_r}{dt}[I_0' L_2(Z) - I_2' L_0(Z)]\right\}dZ.$$

Însă pe $A'B'$ avem

$$I_0' L_2(Z) - I_2' L_0(Z) = I_0 I_2' - I_2 I_0' \mp i\int_a^X \frac{I_0' X^2 - I_2'}{\sqrt{|R(X)|}}dX = \frac{\pi}{2} \mp iH(X),$$

unde semnul — corespunde marginii pozitive, iar semnul + celei negative; deci

$$M_0 = \frac{4}{\pi}\rho\frac{dC_r}{dt}\int_a^b XH(X)\,dX.$$

Deoarece $H(a) = 0$, $H(b) = 0$, o integrare prin părţi conduce la

$$M_0 = \rho\frac{dw_\infty}{dt}\frac{1}{I_0'}(I_0'^2 - I_0' I_4') = \rho\frac{dw_\infty}{dt}\left[\frac{I_2'^2}{I_0'} - \frac{2}{3}(a^2+b^2)I_2' + \frac{a^2b^2}{3}I_0'\right]. \tag{68}$$

Punctul de aplicaţie al presiunii hidrodinamice pe placă este definit de ordonata

$$y_0 = -\frac{M_0}{R_x} = \frac{1}{\pi}\frac{I_2'^2 - \dfrac{2}{3}(a^2+b^2)I_0'I_2' + \dfrac{a^2b^2}{3}I_0'^2}{I_2' - \dfrac{a+b}{2}I_0'}. \tag{69}$$

Dacă $w_\infty = \text{const.}$ se vede deci că regăsim paradoxul lui D'Alembert, după cum era de aşteptat.

B) *Cazul* $\Gamma \neq 0$. După cum s-a observat la punctul 13, $\Gamma$ este o constantă, deci $\partial F/\partial t$ are tot expresia (66) şi formulele (67) şi (68) rămîn valabile.

Alegerea circulaţiei $\Gamma = \Gamma_A$ prin formula (54), implică să avem $w_\infty = \text{const.}$ şi atunci, cu toată prezenţa acestei circulaţii, paradoxul lui D'Alembert subzistă. Faptul acesta este analog celui semnalat de U. C i s o t t i [14] în studiul mişcării în jurul unei plăci în fluid nelimitat, pentru $\alpha = 0$, dacă placa este perpendiculară pe viteza asimptotică a curentului.

Pentru explicarea rezistenţei întîlnite de placă din partea fluidului este deci necesar să se modifice schema adoptată, introducînd o suprafaţă de discontinuitate a vitezelor în spatele obstacolului.

Schema teoretică prezentată în această lucrare prezintă totuşi interes prin faptul că ea ne dă o distribuţie a vitezelor în faţa plăcii, care este destul de satisfăcătoare, precum şi o expresie a debitului prin $OA$.

## О ДВИЖЕНИИ ПАРАЛЛЕЛЬНО ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ В ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ С ВЫСОТОЙ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ

### (КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Распределение скоростей в течении жидкости дано формулой (1), причем $O_1 x_1$ представляют собой линию земной поверхности. Пластина $AB$, перпендикулярная к земной поверхности, находится в поступательном движении. Сток жидкости с постоянным завихрением определяется уравнениями № 2. Путем выбора осей, связанных с пластиной, получаем краевые условия (18) и (19) для определения гармонической функции $\Psi(x, y, t)$ в полуплоскости $y > 0$ с границами $Ox$ и $AB$; $C(t)$ представляет собой поток относительной скорости через $OA$.

Производим перемену осей (21) и определяем $C(t)$ в зависимости от циркуляции 1 на пластине, при помощи соотношения (26). Далее разрешаем в № 7 краевую задачу либо по формуле (32), либо по формулам (33) или (33′), что позволяет выявить скорость в $A$ и $B$. В № 8 приводится изображение эллиптических инт гралов первого и второго разряда Лежандра, представляемое интегралами с фиксированными пределами функций параметра (42), из которого, между прочим, выводится новое доказательство соотношения Лежандра (45), а также новое выражение решения (47). Из этих последних выводим выражение ациклического решения (49) или циклического решения (52) и определяем $\Gamma$ при условии, чтобы скорость жидкого течения была конечной в $A$. Определяется, наконец, давление, оказываемое течением на пластину (№ 15).

Для решения задачи почти не используются конформные изображения, за исключением перемены осей, что облегчает распространение этого способа на случай, в котором несколько пластин расположены в ряд на оси $Oy$.

# SUR LE MOUVEMENT PARALLÈLE AU SOL D'UNE PLAQUE PLANE DANS UN COURANT FLUIDE VARIABLE AVEC LA HAUTEUR

## (RÉSUMÉ)

La distribution des vitesses dans le courant fluide est donnée par (1), $O_1 x_1$ étant la trace du sol. La plaque $AB$, normale au sol, est animée d'un mouvement de translation. L'écoulement fluide, à tourbillon constant, est régi par les équations du n° 2. En choisissant des axes liés à la plaque, on a les conditions aux limites (18) et (19) pour déterminer la fonction harmonique $\Psi(x, y, t)$ dans le demi-plan $y > 0$, avec les frontières $Ox$ et $AB$; $C(t)$ représente le flux de la vitesse relative à travers $OA$.

On effectue le changement d'axes (21) et l'on détermine $C(t)$, en fonction de la circulation $\Gamma$ sur la plaque, par la relation (26). Cela posé, au n° 7 on résout le problème aux limites, soit par la formule (32), soit par (33) ou (33'), ce qui permet de mettre en évidence le comportement de la vitesse en $A$ ou en $B$. Au n° 8, on donne une représentation remarquable des intégrales elliptiques, de première et de seconde espèce, de Legendre, par des intégrales à limites fixes, de fonctions d'un paramètre [formule (42)], d'où l'on déduit, en passant, une nouvelle démonstration de la relation de Legendre (45), ainsi qu'une nouvelle expression de la solution (47). On en tire l'expression de la solution acyclique (49) ou cyclique (52) et l'on détermine $\Gamma$ par la condition que la vitesse fluide soit finie en $A$. Enfin, on détermine la pression exercée par le courant sur la plaque (n° 15).

Pour la résolution du problème, on n'emploie guère de représentations conformes, sauf un changement d'axes, ce qui facilite l'extension du procédé au cas où l'on aurait plusieurs plaques alignées sur l'axe $Oy$.

## BIBLIOGRAFIE

1. H. von Sanden, Z. für Math. und Phys., 1912, t. 61, p. 225.
2. V. Vâlcovici, Bul. Scient. de l'Académie Roumaine, 1913, t. 2, p. 101 — 107.
3. — Comptes rendus, Paris, 1913, t. 158, p. 169 — 171.
4. — Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, t. 4, nr. 4, octombrie-noiembrie-decembrie 1952, p. 653 — 660.
5. H. S. Tsien, Quarterly of Applied Math., 1943, t. 1, p. 130 — 148.
6. H. T. Nagamatsu, J. of Math. and Phys., 1951, t. 30, p. 131 — 139.
7. Y. H. Kuo, Quarterly of Applied Math., 1943, t. 1, p. 273 — 275.
8. S. A. Ciaplîghin, Sovranie Socinenii, 1948, t. II, p. 567 — 575.
9. P. Harrington-P. Libby, *The shear Flow of a perfect Fluid about a circular Cylinder near a rectilinear Boundary*. Hans Reissner Anniversary Volume, J. W. Edwards, N. Y., 1949.
10. H. Villat, *Leçons sur l'Hydrodynamique*, Gauthier-Villars, Paris, 1929, cap. XX.
11. C. Iacob, Studii şi Cercetări Matematice, vol. I, fasc 2, 1950, p. 393 — 417.
12. — Comptes rendus, Paris, 1949, t. 228, p. 335 — 357.
13. L. I. Sedov, *Ploschie zadaci gidrodinamichi i aerodinamichi*, Moscova, 1950, cap. II.
14. U. Cisotti, Memoriae Pont. Acad. Scient. Novi Lyncaei, 1935, seria II, vol. II, p. 51 — 77.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul V, nr. 3—4, 1954

# O CLASĂ DE ECUAŢII LINIARE CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL AL DOILEA, INTEGRABILE PRIN SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE ORDINARE

DE

NICOLAE CIORĂNESCU

**1.** Cele mai multe din ecuaţiile fizicii matematice se prezintă sub forma de ecuaţii cu derivate parţiale liniare, de ordinul al doilea, cu două sau mai multe variabile.

În cele ce urmează ne propunem să arătăm cum integrarea unei clase particulare de astfel de ecuaţii, în două variabile, pe care le alegem ca fiind variabile polare $r$ şi $\theta$, se pot integra indirect, reducînd problema integrării lor la aceea a unui sistem liniar de două ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea.

Anume este vorba de ecuaţiile de forma

$$E(u) \equiv r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + P(r^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + Q(r^2) r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + R(r^2) r \frac{\partial u}{\partial r} + T(r^2) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \\ + S(r^2) u = 0, \tag{1}$$

unde $P$, $Q$, $R$, $T$ şi $S(r^2)$ sînt serii întregi în $r^2$, fie ele

$$P(r^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k r^{2k}, \; Q(r^2) = \sum_{0}^{\infty} q_k r^{2k}, \; \ldots S(r^2) = \sum_{0}^{\infty} s_k r^{2k},$$

cu toate că unele din concluzii rămîn valabile şi în ipoteze mai largi.

În cele ce urmează vom avea nevoie de unele rezultate deduse de Acad. S. Bernstein în teza sa [1]. Anume, acesta a arătat că integrala generală a unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea în două variabile, care se poate pune sub forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

unde $f(\ldots)$ este o funcţie olomorfă în raport cu cele opt argumente în jurul lui $x = y = 0$, este o funcţie analitică. Cum vom vedea, ipoteza olomorfiei lui $f(\ldots)$ este esenţială, pentru validitatea acestei propoziţii.

În al doilea rînd, în aceeaşi lucrare, S. Bernstein demonstrează următoarea lemă foarte importantă: *dacă* $F(x, y)$ *este o funcţie analitică regulată pentru* $|x \pm iy| \leqslant R$ *şi dacă punem* $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, *ea devine o funcţie de* $r$ *şi* $\theta$ *de forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} [A_n(r^2)\cos n\theta + B_n(r^2)\sin n\theta]\, r^n, \tag{3}$$

*unde*

$$A_n(r^2) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{kn}\, r^{2k}, \quad B_n(r^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{kn}\, r^{2k}, \tag{4}$$

*iar norma funcţiei*

$$\mathfrak{N}(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} [\,|c_{kn}| + |\beta_{kn}|\,]\, r^{n+2k}$$

*converge pentru* $r = R$, *şi reciproc, o dezvoltare la forma* (3), *cu coeficienţi de forma* (4), *iar* $\mathfrak{N}(r)$ *convergent pentru* $r = R$, *reprezintă, trecînd din nou la coordonatele carteziene, o funcţie analitică regulată de* $x$ *şi* $y$, *pentru* $|x \pm iy| \leqslant R$.

Vom numi o expresie de forma

$$[A(r^2)\cos n\theta + B(r^2)\sin n\theta]\, r^n,$$

cu $A(r^2)$ şi $B(r^2)$ serii întregi în $r^2$, un *element de funcţie analitică*; structura lui este specifică.

**2.** Să căutăm o soluţie particulară pentru ecuaţia $E(u) = 0$, de o formă ceva mai generală decît elementul de funcţie analitică, anume de forma

$$u(r, \theta) = r^{\lambda}\,[A(r^2)\cos n\theta + B(r^2)\sin n\theta], \tag{5}$$

cu $A(r^2)$ şi $B(r^2)$ de forma (4), iar $\lambda$ rămînînd să fie determinat. În plus, vom presupune că

$$A^2(0) + B^2(0) \neq 0, \tag{6}$$

deoarece în caz contrar $\lambda$ ar fi înlocuit prin $\lambda + 2k$, $k$ fiind întreg, ceea ce putem presupune că s-a făcut.

Făcînd calculele indicate de operaţia $E(u)$, unde acum $u$ are expresia (5), vom ajunge la o expresie de forma

$$F(r)\cos n\theta + G(r)\sin n\theta = 0, \tag{7}$$

unde

$$r^{-\lambda} F(r) = 4r^4 A'' + 2(2\lambda + 1) r^2 A' + (\lambda^2 - \lambda) A - n^2 AP + n(2r^2 B' + \lambda B) Q + (2r^2 A' + \lambda A) R + n BT + AS$$

şi

$$r^{-\lambda} G(r) = 4r^4 B'' + 2(2\lambda + 1) r^2 B' + (\lambda^2 - \lambda) B - n^2 BP - n(2r^2 A' + \lambda A) Q + (2r^2 B' + \lambda B) R - n AT + BS.$$

Cum relaţia (7) trebuie să aibă loc oricare ar fi $\theta$, aceasta atrage după sine condiţiile

$$F(\theta) = 0; \quad G(\theta) = 0. \tag{8}$$

Aceste relații constituie pentru $A(r^2)$ și $B(r^2)$ un sistem de două ecuații diferențiale liniare de ordinul al doilea, care, dacă punem

$$r^2 = x, \quad A(r^2) = A(x) = y, \quad B(r^2) = B(x) = z, \tag{9}$$

se scriu sub forma

$$4x^2 y'' + 2[R(x) + 2\lambda + 1]xy' + 2n Q(x) xz' + [\lambda R(x) + S(x) - n^2 P(x) + \\ + \lambda^2 - \lambda] y + n[\lambda Q(x) + T(x)] z = 0, \tag{10}$$

$$4x^2 z'' + 2[R(x) + 2\lambda + 1]xz' - 2n Q(x) xy' + [\lambda R(x) + S(x) - n^2 P(x) + \\ + \lambda^2 - \lambda] z - n[\lambda Q(x) + T(x)] y = 0.$$

Vom scrie pentru prescurtare acest sistem sub forma

$$4x^2 y'' + L(x) xy' + 2n Q(x) xz' + M(x) y + N(x) z = 0,$$

$$4x^2 z'' + L(x) xz' - 2n Q(x) xy' + M(x) z - N(x) y = 0. \tag{10'}$$

Dacă ținem seama de (1), se vede că $L(x)$, $M(x)$ și $N(x)$ sînt și ele serii întregi în $x$.

Vom numi sistemul (10), *sistemul diferențial rezolvant* al ecuației $E(u) = 0$, deoarece rezolvarea ecuației (1) depinde de rezolvarea acestui sistem.

Anume, interesează acele soluții ale sistemului (10') care sînt ele însile serii întregi în $x$, fie ele

$$y = \sum_0^\infty c_n x^n, \quad z = \sum_0^\infty \beta_n x^n, \tag{11}$$

pentru care $c_0^2 + \beta_0^2 \neq 0$, după cum arată relația (6). Dacă substituim dezvoltările (11) în (10'), vom avea în primul rînd

$$M(0)\alpha_0 + N(0)\beta_0 = 0, \quad M(0)\beta_0 - N(0)\alpha_0 = 0 \tag{12}$$

și cum $\alpha_0$ și $\beta_0$ nu sînt simultan nuli, rezultă din (12) că

$$\begin{vmatrix} M(0) & N(0) \\ -N(0) & M(0) \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

adică

$$M^2(0) + N^2(0) = 0,$$

ceea ce atrage după sine

$$\text{dar cum} \qquad M(0) = 0, \quad N(0) = 0; \tag{14}$$

$$M(x) = \lambda R(x) + S(x) - n^2 P(x) + \lambda^2 - \lambda; \quad N(x) = n[\lambda Q(x) + T(x)]$$

rezultă că

$$\lambda^2 + (r_0 - 1)\lambda + s_0 - p_0 n^2 = 0, \quad q_0 \lambda + t_0 = 0. \tag{14'}$$

Prima relație ne determină două valori pentru $\lambda$ și de aceea o vom numi *ecuația determinantă*; aceste valori sînt

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1 - r_0 \pm \sqrt{(r_0 - 1)^2 + 4p_0 n^2 - 4s_0}}{2} \tag{15}$$

Vom presupune $p_0 > 0$, deoarece în caz contrar $\lambda_1$, $\lambda_2$ nu pot fi reale, oricare ar fi întregul $n$, aşa cum vom pretinde ulterior. Pentru ca cele două valori $\lambda_1$, $\lambda_2$ să verifice şi a doua relaţie (14'), va trebui ca

$$q_0 = Q(0) = 0, \quad t_0 = T(0) = 0. \tag{16}$$

Dacă $\lambda$ a fost astfel determinat, şi condiţiile (16) sînt verificate, atunci $\alpha_0$ şi $\beta_0$ rămîn complet arbitrare. Mai departe, deducem din (10') şi (11), căutînd coeficientul lui $x$, relaţiile

$$l_0 \alpha_1 + m_0 \alpha_0 + n_1 \beta_0 = 0, \quad l_0 \beta_1 + m_1 \beta_0 - n_1 \alpha_0 = 0,$$

care determină pe $\alpha_1$, şi $\beta_1$, dacă

$$l_0 = L(0) = 2(r_0 + 2\lambda_i + 1) \neq 0.$$

Ceilalţi coeficienţi $\alpha_k$ şi $\beta_k$ $(k \geqslant 2)$ sînt determinaţi din aproape în aproape din relaţii de recurenţă de forma

$$k(l_0 + 4k - 4)\alpha_k + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_{ik} \alpha_i + \sum_{i=1}^{k-1} \nu_{ik} \beta_i = 0,$$

$$k(l_0 + 4k - 4)\beta_k + \sum_{i=1}^{k-1} \mu'_{ik} \alpha_i + \sum_{i=1}^{k-1} \nu'_{ik} \beta_i = 0,$$

ceea ce este posibil dacă

$$l_0 + 4k - 4 \neq 0,$$

adică dacă

$$r_0 \neq -(2\lambda_i + 2k - 1)$$

condiţii ce trebuie satisfăcute numai de $r_0 = R(0)$.

Vom găsi astfel pe $y$ şi $z$ sub forma

$$y = \alpha_0 y_1(x) + \beta_0 y_2(\lambda), \quad z = \alpha_0 z_1(x) + \beta_0 z_2(x), \tag{17}$$

cu $\alpha_0$ şi $\beta_0$ arbitrari, pentru rădăcina $\lambda_1(n)$, a ecuaţiei (14') şi expresii analoge pentru rădăcina $\lambda_2(n)$, astfel încît vom avea în definitiv pe $y$ şi $z$ depinzînd liniar de patru constante arbitrare.

Din aceste soluţii putem reţine numai pe acelea corespunzătoare acelei rădăcini $\lambda_i(n)$ a ecuaţiei (14') care pentru $n \to +\infty$ va tinde şi ea către $+\infty$, soluţiile corespunzătoare fiind finite în jurul lui $r = 0$.

Revenind la vechea variabilă $r^2$, putem spune că pentru un $n$ dat şi $\lambda$ determinat de ecuatia (14'), sistemul (10) ne determină un sistem de soluţii

$$A_n(r^2) = C_n^* A_n^*(r^2) + C_n^{**} A_n^{**}(r^2),$$
$$B_n(r^2) = C_n^* B_n^*(r^2) + C_n^{**} B_n^{**}(r^2), \tag{18}$$

unde $A_n^*(r^2)$ este soluţia corespunzătoare lui $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ etc.

Cu aceste expresii ale lui $A(r^2)$ şi $B(r^2)$ soluţia căutată devine

$$u_n(r, \theta) = r^{\lambda_1(n)} [C_n^* u_n^*(r, \theta) + C_n^{**} u_n^{**}(r, \theta)], \tag{19}$$

unde $$u_n^*(r, \theta) = A_n^*(r^2) \cos n\theta + B_n^*(r^2) \sin n\theta,$$

$$u_n^{**}(r, \theta) = A_n^{**}(r^2) \cos n\theta + B_n^{**}(r^2) \sin n\theta.$$

Cum ecuația $E(u) = 0$ este liniară, rezultă că și

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_1(n)} [C_n^* u_n^*(r, \theta) + C_n^{**} u_n^{**}(r, \theta)] \qquad (20)$$

va fi soluție a ecuației (1), și această soluție poate fi privită, avînd în vedere gradul ei de generalitate, cu integrala ei generală, ce rămîne finită în jurul originii.

**3.** Să studiem cîteva cazuri particulare:

a. *Cazul soluțiilor analitice.* Dacă vrem ca soluția să fie analitică, soluția particulară căutată trebuie să fie un element de funcție analitică, deci ecuația determinată (14′) să admită rădăcina $\lambda = n$, și aceasta pentru orice întreg $n$; trebuie deci să avem

$$(1 - p_0) n^2 + (r_0 - 1) n + s_0 = 0,$$

oricare ar fi $n$. Ca aceasta să aibă loc va trebui ca $p_0 = 1$, $r_0 = 1$, $s_0 = 0$. Dacă ținem seama și de relațiile (16), ecuația (1) se scrie în acest caz

$$E(u) \equiv r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + [1 + r^2 P_1(r^2)] \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + r^3 Q_1(r^2) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + [1 + r^2 R_1(r^2)] r \frac{\partial u}{\partial r} +$$

$$+ r^2 T_1(r^2) \frac{\partial u}{\partial \theta} + r^2 S_1(r^2) u = 0,$$

sau încă, împărțind cu $r^2$,

$$E_1(u) \equiv \Delta u + P_1(r^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + Q_1(r^2) r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + R_1(r^2) r \frac{\partial^2 u}{\partial r} + T_1(r^2) \frac{\partial u}{\partial \theta} +$$

$$+ S_1(r^2) u = 0,$$

unde $\Delta u$ este operatorul lui Laplace iar $P_1(r^2)$, $Q_1(r^2)$, $R_1(r^2)$, $S_1(r^2)$, $T_1(r^2)$ sînt serii întregi în $r^2$ ca și $P, Q, \ldots T$, ceea ce este în concordanță cu rezultatul lui S. Bernstein. Prin urmare, în clasa ecuațiilor $E(u) = 0$, numai ecuațiile de forma $E_1(u) = 0$ admit soluții analitice.

b. *Cazul separării variabilelor.* Dacă $Q(r^2) \equiv T(r^2) \equiv 0$, se vede atunci că sistemul (10) nu mai este un sistem de două ecuații, ci se reduce la o ecuație unică verificată atît de $y$ cît și de $z$, și anume ecuația

$$4x^2 y'' + 2[R(x) + 2\lambda + 1] xy' + [\lambda R(x) + S(x) - n^2 P(x) + \lambda^2 - \lambda] y = 0, \quad (21)$$

ecuația determinată (14′) rămînînd aceeași.

În acest caz, adică în cazul ecuației

$$E_2(u) \equiv r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + P(r^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + R(r^2) r \frac{\partial u}{\partial r} + S(r^2) u = 0,$$

integrarea se poate face și prin metoda separării variabilelor, adică punînd

$$u(r, \theta) = f(r) \varphi(\theta),$$

care substituită în $E_2(u) = 0$ ne dă

$$\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{r^2 f'' + r\,R(r) f' + S(r^2) f = 0,}{P(r^2) f}$$

de unde

$$\varphi(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

iar $f(r)$ va fi soluţie a ecuaţiei

$$r^2 f'' + r\,R(r^2) f' + [S(r^2) - n^2 P(r^2)] f = 0. \tag{22}$$

Se poate trece uşor de la ecuaţia (21) la (22), dacă se ţine seama de semnificaţia lui $x$ şi $y$ din ecuaţia (21). Astfel, de exemplu, dacă luăm

$$P(r^2) = (2p + 1)^2, \quad R(r^2) = -2m + 1, \quad S(r^2) = m^2 + k^2 r^2,$$

unde $p$ este un întreg pozitiv, vom avea ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{(2p+1)^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2m-1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right) u = 0, \tag{23}$$

care generalizează ecuaţia de definiţie a funcţiilor meta-armonice, care corespund lui $p = m = 0$.

Utilizînd ecuaţia rezolvantă (22) sau (21), se găseşte că integrala generală a ecuaţiei (23) este

$$u(r, \theta) = r^m \sum_{n=0}^{\infty} J_{(2p+1)n}(kr)\,[a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta], \tag{24}$$

unde $J_\nu$ înseamnă funcţia lui Bessel de ordinul $\nu$, iar $a_n$ şi $b_n$ constante arbitrare.

c. *Cazul soluţiilor neanalitice.* Să considerăm ecuaţia foarte simplă

$$r^2 \Delta u - k^2 u = 0 \tag{25}$$

sau încă

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} - k^2 u = 0. \tag{25'}$$

Ecuaţia este de forma $E_2(u) = 0$, în care

$$P(r^2) \equiv 1, \quad R(r^2) \equiv 1, \quad S(r^2) \equiv -k^2 \neq 0.$$

Cum $s_0 \neq 0$, condiţiile de analiticitate nu sînt îndeplinite. Într-adevăr, rădăcinile ecuaţiei determinate (14') sînt $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{n^2 + k^2}$.

Ecuaţia rezolvantă (21) se reduce la

$$xy'' + (\lambda_i + 1) y' = 0,$$

de unde

$$y = C_1 x^{-\lambda_i} + C_2$$

şi deci

$$A(r^2) = C_1 r^{-2\lambda_i} + C_2,$$

expresia lui $B(r^2)$ fiind analogă.

Prin urmare, o soluţie particulară va fi

$$u_n(r, \theta) = \left(C_1 r^{-\lambda_i} + C_2 r^{\lambda_i}\right) \cos n\theta + \left(C_1' r^{-\lambda_i} + C_2' r^{\lambda_i}\right) \sin n\theta.$$

Dacă vrem ca soluția să fie finită în jurul lui $r = 0$, vom avea ca integrală generală

$$u(r, \theta) = \sum_0^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\, r^{\sqrt{n^2+k^2}}, \tag{26}$$

soluție ce se prezintă sub forma unei serii Dirichlet în $ln\, r$ sau $\ln\frac{1}{2}$.

Am fi ajuns la același rezultat dacă am fi căutat de la început pentru ecuația (25) soluții în cîmpul funcțiilor de forma

$$u(r, \theta) = r^\alpha \varphi(r, \theta),$$

cu $\varphi(r, \theta)$ funcție analitică, iar $\alpha$ rămînînd să fie determinat.

Aceasta se poate face dacă am lua pentru $\varphi(r, \theta)$ reprezentarea în serie simplă

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{k=0}^\infty \varphi_k(r, \theta)\, r^{2k}, \tag{27}$$

unde $\varphi_k(r, \theta)$ sînt funcții armonice regulate, dezvoltare pe care am dat-o într-o lucrare mai veche [2] Substituind dezvoltarea (27) în (25), găsim că funcțiile armonice $\varphi_k(r, \theta)$ trebuie să satisfacă în plus condițiile

$$2\alpha\left(r\frac{\partial \varphi_0}{\partial r}\right) + \alpha^2 - k^2)\,\varphi_0 = 0,$$

$$2(\alpha + 2k)\, r\frac{\partial \varphi_k}{\partial r} + [(\alpha + 2k)^2 - k^2]\,\varphi_k = 0;$$

prima ne dă pentru $\alpha$ condiția $\alpha^2 + 2n\alpha - k^2 = 0$ și $\varphi_0 = (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\, r^n$, iar celelalte ne dau $\varphi_k \mid r, \theta) \equiv 0$. Deci, și pe această cale, găsim ca element de soluție tot pe cel de mai sus iar ca integrală generală mărginită în jurul originii, tot expresia (26).

Rezultatul se explică prin aceea că scriind ecuația (25) sub forma $\Delta u = \frac{k^2}{r^2}\, u$, și comparînd cu (2), partea a doua nu este olomorfă în jurul originii.

## КЛАСС ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПРИ ПОМОЩ СИСТЕМЫ ОРДИНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### (КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении автор рассматривает уравнения следующего вида

$$E(u) \equiv r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + P(r^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + Q(r^2)\, r\frac{\partial^2 u}{\partial r\, \partial\theta} + \\ + R(r^2)\, r\frac{\partial u}{\partial r} + T(r^2)\frac{\partial u}{\partial \theta} + S(r^2)\, u = 0 \tag{1}$$

где $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$ являются целыми рядами в $r^2$ для которых отыскиваются частные решения вида

$$u(r, \theta) = r^{\lambda} [A(r^2) \cos n\theta + B(r^2) \sin n\theta], \tag{2}$$

где $A(r^2)$ и $B(r^2)$ являются целыми рядами в $r^2$, а $\lambda$ подлежит определению. Подставляя их в (1) находим для $A(r^2) = A(x) = y$ и $B(r^2) = B(x) = z$ следующую систему

$$\begin{aligned} 4x^2 y'' + 2[R(x) + 2\lambda + 1]\, xy' + 2nQ(x)\, xz' + [\lambda R(x) + S(x) - n^2 P(x) + \\ + \lambda^2 - \lambda]\, y + n[\lambda Q(x) + T(x)]\, z = 0, \qquad (3) \\ 4x^2 z'' + 2[R(x) + 2\lambda + 1]\, xz' - 2nQ(x)\, xy' + [\lambda R(x) + S(x) - n^2 P(x) + \\ + \lambda^2 - \lambda]\, z - n[\lambda Q(x) + T(x)]\, y = 0. \end{aligned}$$

Эта система допускает регулярные решения вокруг $x = 0$, не аннулирующиеся одновременно, если

$$\lambda^2 + (r_0 - 1)\lambda + s_0 - p_0 n^2 = 0, \quad q_0 = t_0 = 0 \tag{4}$$

или

$$p_0 = P(o), \quad q_0 = Q(0) \ldots \quad t_0 = T(o).$$

Если $\lambda$ является корнем уравнения (4), система (3) определяет решения

$$A_n(r^2) = C_n^* A_n^*(r^2) + C_n^{**} A_n^{**}(r^2), \quad B_n(r^2) = C_n^* B_n^*(r^2) + C_n^{**} B_n^{**}(r^2), \tag{5}$$

и получается общий интеграл в виде простого ряда

$$u(r, \theta) = \sum_{o}^{\infty} r^{\lambda_1(n)} [C_r^* u_n^*(r, \theta) + C_n^{**} u_n^{**}(r, \theta), \tag{6}$$

где $u_n^*(r, \theta) = A_n^*(r^2) \cos n\theta + B_n^*(r^2) \sin n\theta$ и т. д.

Уравнение (1) допускает аналитические решения тогда и только тогда, когда

$$p_0 = 1, \quad r_0 = 1, \quad s_0 = 0.$$

Автор рассматривает разные случаи не аналитических решений, в частности уравнение:

$$r^2 \Delta u - k^2 u = 0$$

общим интегралом которого является

$$u(r, \theta) = \sum_{0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\, r^{\sqrt{n^2 + k^2}}.$$

# UNE CLASSE D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE INTÉGRABLES À L'AIDE D'UN SYSTÉME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

(RÉSUMÉ)

Il s'agit des équations de la forme suivante:

$$E(u) = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + P(r^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + Q(r^2) r \frac{\partial^2 u}{\partial r \, \partial \theta} + R(r^2) r \frac{\partial u}{\partial r} + \\ + T(r^2) \frac{\partial u}{\partial \theta} + S(r^2) u = 0 \tag{1}$$

où $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$ sont des séries entières en $r^2$, pour lesquelles on cherche des solutions particulières de la forme

$$u(r, \theta) = r^{\lambda} [A(r^2) \cos n\theta + B(r^2) \sin n\theta] \tag{2}$$

où $A(r^2)$ et $B(r^2)$ sont des séries entières en $r^2$ et $\lambda$ reste à déterminer. En substituant en (1) on trouve pour $A(r^2) = A(x) = y$ et $B(r^2) = B(x) = z$ le système suivant

$$4x^2 y'' + 2[R(x) + 2\lambda + 1] xy' + 2n Q(x) xz' + [\lambda R(x) + S(x) - n^2 P(x) + \\ + \lambda^2 - \lambda] y + n[\lambda Q(x) + T(x)] z = 0, \tag{3}$$

$$4x^2 z'' + 2[R(x) + 2\lambda + 1] xz' - 2n Q(x) xy' + [\lambda R(x) + S(x) - n^2 P(x) + \\ + \lambda^2 - \lambda] z - n[\lambda Q(x) + T(x)] y = 0.$$

Ce système admet des solutions régulières autour de $x = 0$ qui ne s'annulent pas simultanément si:

$$\lambda^2 + (r_0 - 1)\lambda + s_0 - p_0 n^2 = 0, \quad q_0 = t_0 = 0$$

où (4)

$$p_0 = P(0), \quad q_0 = Q(0) \ldots t_0 = T(0).$$

Si $\lambda$ est la racine de l'équation (4), le système (3) détermine des solutions:

$$A_n(r^2) = C_n^* A_n^*(r^2) + C_n^{**} A_n^{**}(r^2) \; B_n(r^2) = C_n^* B_n^*(r^2) + C_n^{**} B_n^{**}(r^2) \tag{5}$$

et l'on obtient l'intégrale générale sous forme de série simple:

$$u(r, \theta) = \sum_0^{\infty} r^{\lambda_1 (n)} [C_n^* u_n^*(r, \theta) + C_n^{**} u_n^{**}(r, \theta)] \tag{6}$$

où: $u_n^*(r, \theta) = A_n^*(r^2) \cos n\theta + B_n^*(r^2) \sin n\theta$ etc.

L'équation (1) admet des solutions analytiques si et seulement si:

$$p_0 = 1, \quad r_0 = 1, \quad s_0 = 0$$

On examine divers cas de solutions non analytiques, en particulier l'équation:

$$r^2 \Delta u - k^2 u = 0$$

dont l'intégrale générale est:

$$u(r, \theta) = \sum_0^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\, r^{\sqrt{n^2+k^2}}.$$

## BIBLIOGRAFIE

1. S. Bernstein, Mathematische Annalen, 1904, t. 59, p. 20.
2. N. Ciorănescu, Bulletin de la Société mathématique de France, 1937, t. LXV, p. 41.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul V, nr. 3—4, 1954

# O TEORIE A FUNCŢIILOR DE O VARIABILĂ HIPERCOMPLEXĂ ÎN SPAŢIUL CU TREI DIMENSIUNI*)

DE

MARCEL N. ROŞCULEŢ

## I. VARIABILA HIPERCOMPLEXĂ

Să considerăm mulţimea numerelor hipercomplexe de forma

$$\omega = x + \alpha y + \beta z$$

$x$, $y$, $z$ aparţinînd corpului numerelor reale, iar $\alpha$ şi $\beta$ fiind elemente hipercomplexe cu legile de înmulţire

$$\alpha^2 = \beta \quad , \quad \beta^2 = \alpha \quad , \quad \alpha\beta = \beta\alpha = 1, \tag{1}$$

care pot fi grupate în tabloul următor:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\alpha$ | $\beta$ |
| $\alpha$ | $\beta$ | 1 |
| $\beta$ | 1 | $\alpha$ |

(2)

şi care conduc la

$$\alpha^3 = 1 \quad , \quad \beta^3 = 1. \tag{3}$$

Un astfel de număr hipercomplex va putea fi scris şi în modul următor,

$$\omega = x + \theta y + \theta^2 z$$

cu

$$\theta^3 = 1 \tag{4}$$

aceasta fiind forma ce o vom păstra tot parcursul expunerii.

Operaţiile algebrice cu numere hipercomplexe sînt definite, precum se ştie, în modul următor:

Suma şi diferenţa a două numere hipercomplexe este tot un număr hipercomplex,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= x_1 + \theta y_1 + \theta^2 z_1 \\ \omega_2 &= x_2 + \theta y_2 + \theta^2 z_2 \\ \omega_1 \pm \omega_2 &= x_1 \pm x_2 + \theta (y_1 \pm y_2) + \theta^2 (z_1 \pm z_2) \end{aligned} \tag{5}$$

*) *Lucrarea de faţă a fost prezentată şi susţinută la 28 iunie 1949, pentru obţinerea titlului de doctor în ştiinţele matematice.*

Produsul a două numere hipercomplexe este complet determinat prin relaţia

$$\theta^3 = 1$$

deci

$$\omega_1 \omega_2 = (x_1 + \theta y_1 + \theta^2 z_1)\ (x_2 + \theta y_2 + \theta^2 z_2) = \tag{6}$$

$$= x_1x_2 + y_1z_2 + y_2z_1 + \theta\,(y_1x_2 + x_2y_1 + z_1z_2) + \theta^2(x_1z_2 + x_2z_1 + y_1y_2)$$

Inversul unui număr hipercomplex este definit în modul următor

$$\frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{x_1 + \theta y_1 + \theta^2 z_1} = \frac{x_1^2 - y_1z_1 + \theta\,(z_1^2 - x_1y_1) + \theta^2\,(y_1^2 - z_1x_1)}{x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 - 3x_1\,y_1\,z_1} \tag{7}$$

cu condiţia ca $\omega_1$ să nu fie un divizor al lui zero.

Algebra numerelor $\omega$ este în consecinţă distributivă, asociativă şi comutativă.

Mulţimea numerelor $\omega$ formează un inel comutativ care admite două clase de divizori ai lui zero,

$$\delta_1 = 1 - \theta$$

$$\delta_2 = 1 + \theta + \theta^2 \tag{8}$$

Acest inel admite două ideale: $(1 - \theta)$ şi $(1 + \theta + \theta^2)$, de divizori ai lui zero, obţinuţi înmulţind numerele $\delta_1$ şi $\delta_2$ cu un număr hipercomplex oarecare.

Divizorii lui zero sînt deci

$$\begin{aligned} \delta_1\omega &= x - z + \theta\,(y - z) + \theta^2\,(z - y) \\ \delta_2\omega &= x + y + z + \theta\,(x + y + z) + \theta^2\,(x + y + z) \end{aligned} \tag{9}$$

Interpretarea lor geometrică este următoarea: orice număr hipercomplex, afixul unui punct de pe prima bisectoare $(D_0)$ a triedrului axelor, sau din planul $(\mathfrak{S}_0)$ care trece prin origine şi este perpendicular pe dreapta $(D_0)$, este un divizor al lui zero. Intersecţia lor este afixul lui zero.

*Modul.* Vom numi modul al numărului hipercomplex cantitatea reală

$$\|\,\omega\,\| = (x^3 + y^3 + z^3 - 3x\,yz)^{\frac{1}{3}} \tag{10}$$

care se mai poate scrie

$$\|\,\omega\,\|^3 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x + y + z)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right] \tag{11}$$

Se observă că cele două clase de divizori ai lui zero corespund celor două posibilităţi ca modulul să fie nul.

Ecuaţia $$x + y + z = 0$$

reprezintă planul $P_0$, iar ecuaţia

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$$

dreapta

$$x = y = z$$

În sfîrșit, relația

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ z_1 & x_1 & y_1 \\ y_1 & z_1 & x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ y_2 & z_2 & x_2 \end{vmatrix} = \tag{12}$$

$$\begin{vmatrix} x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2 & y_1x_2 + y_2x_1 + z_1z_2 & z_1x_2 + z_2x_1 + y_1y_2 \\ z_1x_2 + z_2x_1 + y_1y_2 & x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2 & y_1x_2 + y_2x_1 + z_1z_2 \\ y_1x_2 + y_2x_1 + z_1z_2 & z_1x_2 + z_2x_1 + y_1y_2 & x_1x_2 + y_1z_2 + y_2z_1 \end{vmatrix}$$

ne spune că modulul produsului a două numere hipercomplexe este egal cu produsul modulelor

$$\| \omega_1 . \omega_2 \| = \| \omega_1 \| \cdot \| \omega_2 \| \tag{12'}$$

Ținînd seama de divizorii lui zero

$$\omega' = (1 - \theta)\,\omega = (x - z) + \theta\,(y - x) + \theta^2(z - y)$$
$$\omega'' = (1 + \theta + \theta^2)\,\omega = (1 + \theta + \theta^2)\,(x + y + z)$$

și notînd

$$x - z = \lambda$$
$$y - x = \mu$$
$$z - y = -(\lambda + \mu)$$
$$x + y + z = \nu$$

numărul hipercomplex se poate scrie

$$\omega = \omega' + \omega'' = \lambda + \theta\mu - \theta^2(\lambda + \mu) + (1 + \theta + \theta^2)\,\nu \tag{13}$$

Căutînd elementul idempotent al idealului $(\omega')$,

$$\left[\lambda + \theta\mu - \theta^2(\lambda + \mu)\right]^2 = \lambda + \theta\mu - \theta^2(\lambda + \mu)$$

obținem sistemul

$$\lambda^2 - 2\lambda\mu - 2\mu^2 = \lambda$$
$$\lambda^2 + 4\lambda\mu + \mu^2 = \mu$$
$$-\mu^2 + 2\lambda^2 + 2\lambda\mu = \lambda + \mu$$

Aceste trei ecuații nu sînt independente, ultima fiind identică cu suma primelor două.

Rezolvînd sistemul, obținem

$$\lambda = \frac{\mu - 3\mu^2}{6\mu + 1}$$

$$\mu\,(27\mu^3 + 18\,\mu^2 + 6\mu + 1) = 0$$

care ne conduc la soluțiile reale

$$\lambda = \mu = 0 \quad \text{și} \quad \mu = -\frac{1}{3}, \ \lambda = \frac{2}{3}$$

Elementul idempotent aparținînd idealului $(\omega')$ este

$$e_1 = \frac{1}{3}(2 - \theta - \theta^2). \tag{14}$$

Elementul idempotent aparținînd idealului $(\omega'')$ este

$$e_2 = \frac{1}{3}(1 + \theta + \theta^2), \tag{15}$$

Căutînd numărul $e_1 i$ care satisface relația

$$(e_1 i)^2 = -e_1$$

obținem

$$e_1 i = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^2). \tag{16}$$

În consecință, ori ce număr hipercomplex se poate scrie sub forma

$$\omega = e_1(x + iy) + e_2 z \tag{17}$$

Înlocuind pe $e_1$, $e_1 i$ și $e_2$, obținem numărul hipercomplex

$$\omega = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z + \theta\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z\right) + \theta^2\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z\right]$$

Modulul numărului $\omega$, sub această formă, are expresia

$$\| \omega \|^3 = z(x^2 + y^2). \tag{18}$$

În concluzie, inelul numerelor hipercomplexe este suma directă a inelelor reale și complexe. Orice număr $\omega$ fiind de forma

$$\omega = e_1(x + iy) + e_2 z$$

suma sau diferența a două astfel de numere este un număr de aceeași natură, iar produsul lor, ținînd seama de relațiile

$$e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$$

este

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = \left[e_1(x_1 + iy_1) + e_2 z_1\right]\left[e_1(x_2 + iy_2) + e_2 z_2\right] =$$

$$e_1(x_1 + iy_1)\ (x_2 + iy_2) + e_2 z_1 z_2$$

Sistemul de numere hipercomplexe considerat este echivalent cu sistemul de matrice ale bazei

$$1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \theta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \theta^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{19}$$

și se vede imediat că legile de înmulțire din tabloul (2) sînt satisfăcute, deoarece avem

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

și

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Un număr din sistem este așadar de forma

$$\omega = x + \theta y + \theta^2 z$$

sau, sub forma matricială,

$$\omega = \begin{Vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & x & y \end{Vmatrix} \tag{20}$$

Produsul a două numere din sistem $\omega_1$, $\omega_2$, se obține ușor înmulțind matricele respective

$$\omega_1 \omega_2 = \begin{Vmatrix} x_1 & z_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 & z_1 \\ z_1 & y_1 & x_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_2 & z_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 & z_2 \\ z_2 & y_2 & x_2 \end{Vmatrix} = \tag{21}$$

$$= \begin{Vmatrix} x_1x_2 + y_1z_2 + y_2z_1 & x_1z_2 + y_1y_2 + z_1x_2 & x_1y_2 + y_1z_2 + z_1z_2 \\ x_1y_2 + y_1z_2 + z_1z_2 & x_1x_2 + y_1z_2 + y_2z_1 & x_1z_2 + y_1y_2 + z_1x_2 \\ x_1z_2 + y_1y_2 + z_1x_2 & x_1y_2 + y_1z_2 + z_1z_2 & x_1x_2 + y_1z_2 + y_2z_1 \end{Vmatrix}$$

deci

$$\omega_1\omega_2 = x_1x_2 + y_1z_2 + y_2z_1 + \theta(x_1y_2 + y_1x_2 + z_1z_2) + \theta^2(x_1z_2 + y_1y_2 + z_1x_2)$$

adică tocmai (6).

Inversul lui $\omega$ se obține luînd inversul matricei (20), care ne conduce imediat la expresia acestui invers sub forma matricială

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{D} \begin{Vmatrix} x^2 - yz & y^2 - zx & z^2 - xy \\ z^2 - xy & x^2 - yz & y^2 - zx \\ y^2 - xz & z^2 - xy & x^2 - yz \end{Vmatrix} \tag{22}$$

unde $D$ este determinantul

$$D = \begin{Vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$$

deci numerele $\omega$, pentru care

$$x+y+z \neq 0$$

sau

$$x \neq y \neq z,$$

au întotdeauna un invers dat de (22). În sfîrșit, se observă că matricele

$$\delta_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\delta_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

sînt divizori ai lui zero deoarece $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$ și produsul lor este matricea nulă

$$\delta_1\delta_2 = \delta_2\delta_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Numerele

$$\Omega_1 = \omega\,\delta_1 = \begin{Vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x-z & z-y & y-x \\ y-x & x-z & z-y \\ z-y & y-x & x-z \end{Vmatrix}$$

și

$$\Omega_2 = \omega\,\delta_2 = \begin{Vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ x+y+z & x+y+z & x+y+z \end{Vmatrix}$$

determină în inel două ideale. Cum se poate verifica imediat, avem întotdeauna, oricare ar fi $\omega$,

$$\Omega_1\ \Omega_2 = 0$$

## II. CONVERGENȚĂ. SERII

Vom numi un șir de numere hipercomplexe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \tag{1}$$

pseudomărginit atunci cînd modulul termenului general $a_n$ este mărginit.

În caz contrar, vom spune că șirul nu este pseudomărginit.

În mod analog seria

$$a_1 + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) + \ldots \tag{2}$$

este pseudomărginită cînd șirul (1) este pseudomărginit.

Din cauza existenței divizorilor lui zero, seriile pseudomărginite definite mai sus se împart în două categorii distincte:

Considerînd șirul (1) și termenul său general

$$a_n = b_n + \theta c_n + \theta^2 d_n$$

al cărui modul este

$$|a_n|^3 = (b_n + c_n + d_n)(\Sigma b_n^2 - \Sigma b_n c_n)$$

putem avea neegalitatea

$$-M < ||a_n||^3 < M$$

dacă avem simultan neegalitățile

$$-\varepsilon < b_n + c_n + d_n < \varepsilon_n \tag{3}$$

$$b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 - b_n c_n - c_n d_n - d_n b_n > N$$

sau

$$b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 - b_n c_n - c_n d_n - d_n b_n < \varepsilon \tag{4}$$

$$-N > b_n + c_n + d_n > N$$

Neegalitățile (4) și (3) ne spun că afixul numărului $a_n$ se apropie respectiv pentru $n > N$ de elementele de la infinit ale dreptei sau planului divizorilor lui zero.

O a doua categorie de șiruri pseudomărginite sînt șirurile al căror termen general $a_n = b_n + \theta C_n + \theta^2 d_n$ satisface condiția

$$-N < b_n,\ c_n,\ d_n < N. \tag{5}$$

Considerațiile de mai sus ne conduc la definirea pseudoconvergenței, divergenței și convergenței.

Astfel, un șir de numere hipercomplexe

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \qquad\qquad a_n = b_n + \theta c_n + \theta^2 d_n$$

va fi numit pseudoconvergent către $A\ (A = b + \theta c + \theta^2 d)$ cînd pentru $\varepsilon > 0$ și arbitrar de mic putem găsi un rang $N$, astfel încît să avem pentru orice $n > N$

$$-\varepsilon < ||a_n - A|| < \varepsilon$$

Șirul va fi numit divergent cînd pentru $n$ arbitrar de mare putem găsi un rang $N$, astfel încît să avem pentru orice $n > N$

$$-M > ||a_n - A|| > M$$

În sfîrșit, șirul va fi numit convergent cînd pentru $\varepsilon > 0$ și arbitrar de mic putem găsi un rang $N$ astfel încît pentru ori ce $n > N$ să avem

$$|b - b_n| < \varepsilon,\ |c - c_n| < \varepsilon\ ,\ |d - d_n| < \varepsilon$$

Deosebirea între seriile pseudoconvergente şi convergente este esenţială şi o vom semnala.

Dacă adunăm sau scădem la o serie pseudoconvergentă o cantitate oarecare hipercomplexă, seria devine divergentă.

Seriile reale parţiale ale unei serii pseudoconvergente pot fi divergente.

Lanţul poligonal infinit imaginea geometrică a unei serii pseudoconvergente rămîne continuu în interiorul unei suprafeţe

$$-\rho < \| A \| < \rho$$

însă se apropie pentru $n > N$ de elementele de la infinit ale dreptei sau planului divizorilor lui zero.

Comportarea seriilor convergente este analogă seriilor convergente de variabilă reală sau complexă. Seriile reale parţiale sînt convergente şi bineînţeles însumarea unei cantităţi oarecare hipercomplexe de elemente reale finite nu schimbă convergenţa.

Denumirile de convergenţă, continuitate, uniform convergentă şi continuitate uniformă se referă la componentele reale ale funcţiei

$$\Omega = X + \theta\, Y + \theta^2 Z$$

De cîte ori vom vorbi de limită, o vom înţelege în sensul obişnuit al topologiei spaţiului euclidian tridimensional.

Dacă considerăm variabila hipercomplexă $\omega$ sub forma

$$\omega = e_1\,(x + iy) + e_2\, z$$

o serie oarecare de $\omega$ se descompune în două serii distincte de variabilele $e_1(x+iy)$ şi $e_2 z$

$$S(\omega) = e_1 S'(x+iy) + e_2 S''(z)$$

$$\| S(\omega) \|^3 = S''.\, S'^2$$

unde $S'$ este modulul sumei seriei de variabilă complexă $x + iy$ şi $S''$ suma seriei de variabilă reală $z$.

Seria $S(\omega)$ este divergentă cînd seriile $S'$ şi $S''$ sînt divergente.

Seria $S(\omega)$ este convergentă cînd seriile $S'$ şi $S''$ sînt convergente.

Seria $S(\omega)$ este pseudoconvergentă cînd una din seriile $S'$ sau $S''$ este divergentă şi produsul sumelor mărginit.

*Funcţia exponenţială.* Pentru determinarea unei serii întregi $f(\omega)$, convergentă în tot spaţiul, care să satisfacă relaţia funcţională

$$f(\omega + \omega_1) = f(\omega).f(\omega_1)$$

şi

$$f(0) = 1$$

procedăm pe calea obişnuită *) şi obţinem

$$f(\omega) = 1 + \frac{a_1}{1!}\omega + \frac{a_1^2}{2!}\omega^2 + \ldots + \frac{a_1^n}{n!}\omega^n + \ldots$$

serie convergentă în tot spaţiul pentru că seriile reale parţiale sînt convergente pentru $x$, $y$, $z$ finite.

*) E. Goursat, *Cours d'An. Math.*, Paris, 1942, t. II, p. 26.

Făcînd $a_1 = 1$, obținem

$$f(\omega) = 1 + \frac{\omega}{1!} + \frac{\omega^2}{2!} + \ldots + \frac{\omega^n}{n!} + \ldots$$

$$f(\omega) = e^{\omega} = e^{x+\theta y+\theta^2 z} = e^x \; e^{\theta y} \; e^{\theta^2 z} \tag{6}$$

Folosind funcțiile lui Paul Appell

$$\text{ap } y = 1 + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^6}{6!} + \ldots + \frac{y^{3n}}{(3n)!} + \ldots \tag{7}$$

$$\text{cp } y = \frac{y^2}{2!} + \frac{y^5}{5!} + \ldots + \frac{y^{3n-1}}{(3n-1)!} + \tag{8}$$

$$\text{sp } y = \frac{y}{1!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots + \frac{y^{3n-2}}{(3n-2)!} + \ldots \tag{9}$$

Funcția $e^{\omega}$ se scrie sub forma

$$e^{\omega} = e^x (\text{ap } y + \theta \text{ sp } y + \theta^2 \text{ cp } y)(\text{ap } z + \theta \text{ cp } z + \theta^2 \text{ sp} z) \tag{10}$$

Funcțiile lui Paul Appell fiind legate prin relația

$$\text{ap}^3 \varphi + \text{cp}^3 \varphi + \text{sp}^3 \varphi - 3 \text{ap } \varphi \text{ cp } \varphi \text{ cp } \varphi = 1$$

numerile hipercomplexe $e^{\theta y}$ și $e^{\theta^2 z}$ au modulul egal cu 1.

Funcția $e^{\omega}$ are modulul $e^x$; $y$ și $z$ vor fi numite argumentele sale.

Revenind la numărul hipercomplex $\omega$ observăm că el este bine determinat prin relația

$$\omega = \rho \, e^{\theta \varphi} \, e^{\theta^2 \psi}$$

cu

$$\begin{aligned} x &= \rho \left( \text{ap } \varphi \text{ ap } \psi + \text{cp } \varphi \text{ cp } \psi + \text{sp } \varphi \text{ sp } \psi \right) \\ y &= \rho \left( \text{cp } \varphi \text{ sp } \psi + \text{ap } \varphi \text{ cp } \psi + \text{sp } \varphi \text{ ap } \psi \right) \\ y &= \rho \left( \text{sp } \varphi \text{ cp } \psi + \text{cp } \varphi \text{ sp } \psi + \text{ap } \varphi \text{ sp } \psi \right) \end{aligned} \tag{11}$$

Pentru un $\varphi$ și $\psi$ dat $x$, $y$, $z$ sînt unic determinați. Reciproca nu este adevărată pentru că $x$, $y$, $z$ fiind dați, $\rho$ este unic determinat prin $\rho = \| \omega \|$; $\varphi$ și $\psi$ sînt însă dați de formulele

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}, \quad \psi = \psi_0 - \frac{2k\pi}{\sqrt{3}} \tag{12}$$

Într-adevăr avem $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \rho^3$, deci $x$, $y$, $z$ sînt puncte de pe suprafața de $\| \omega \| = \rho$.

Ecuațiile parametrice

$$\begin{aligned} x &= \rho \text{ ap } \varphi \\ y &= \rho \text{ sp } \varphi \\ z &= \rho \text{ cp } \varphi \end{aligned} \tag{13}$$

reprezintă curba $\psi = 0$, situată pe suprafața de modul constant.

Ecuaţiile parametrice

$$\begin{aligned} x &= \rho \ \mathrm{ap}\ \psi \\ y &= \rho \ \mathrm{cp}\ \psi \\ z &= \rho \ \mathrm{sp}\ \psi \end{aligned} \tag{14}$$

reprezintă de asemenea curba $\varphi = 0$, situată pe suprafaţa de modul constant.

Aceste două curbe fac parte din cele două familii de curbe asimptote ale suprafeţei de modul constant, pentru că în punctele de pe curbă planul tangent la suprafaţă este şi planul osculator al curbei.

Pentru demonstraţie, să considerăm ecuaţiile unei curbe situate pe suprafaţă, obţinute din ecuaţiile parametrice ale suprafeţei făcînd $\psi = \psi_0$.

$$\begin{aligned} x &= \rho\ (\mathrm{ap}\ \varphi\ \mathrm{ap}\ \psi_0 + \mathrm{cp}\ \varphi\ \mathrm{cp}\ \psi_0 + \mathrm{sp}\varphi\ \mathrm{sp}\psi_0) \\ y &= \rho\ (\mathrm{sp}\ \varphi\ \mathrm{ap}\ \psi_0 + \mathrm{cp}\ \varphi\ \mathrm{sp}\ \psi_0 + \mathrm{ap}\ \varphi\ \mathrm{cp}\ \psi_0) \\ z &= \rho\ (\mathrm{ap}\ \varphi\ \mathrm{sp}\ \psi_0 + \mathrm{cp}\ \varphi\ \mathrm{ap}\ \psi_0 + \mathrm{sp}\ \varphi\ \mathrm{cp}\ \psi_0) \end{aligned} \tag{14'}$$

Determinantul transformării este

$$\rho^3 \begin{vmatrix} \mathrm{ap}\ \psi_0 & \mathrm{cp}\ \psi_0 & \mathrm{sp}\ \psi_0 \\ \mathrm{cp}\ \psi_0 & \mathrm{sp}\ \psi_0 & \mathrm{ap}\ \psi_0 \\ \mathrm{sp}\ \psi_0 & \mathrm{ap}\ \psi_0 & \mathrm{cp}\ \psi_0 \end{vmatrix} = -\rho^3$$

şi este diferit de zero cu excepţia punctelor de pe dreapta şi planul divizorilor lui zero.

În sfîrşit, se observă că planele osculatoare ale curbei $\varphi_0$ şi $\psi_0$ sînt identice între ele şi identice cu planul tangent al suprafeţei în punctul considerat.

Luînd derivatele parţiale ale lui $x$, $y$, $z$ în funcţie de $\varphi$ obţinem

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = z\ , \frac{\partial y}{\partial \varphi} = x\ , \frac{\partial z}{\partial \varphi} = y\ , \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} = y\ , \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = z\ ; \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = x$$

iar ecuaţia planului osculator la curba $d\psi = 0$ este

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = 0$$

Ecuaţia planului tangent se obţine, ţinînd seama de

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = z\ , \frac{\partial y}{\partial \varphi} = x, \frac{\partial z}{\partial \varphi} = y, \frac{\partial x}{\partial \psi} = y\ , \frac{\partial y}{\partial \psi} = z\ , \frac{\partial z}{\partial \psi} = x$$

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = 0$$

Două curbe $d\varphi = 0$ și $d\psi = 0$ se intersectează într-o infinitate de puncte de coordonate

$$\varphi = \psi = \frac{2k\pi}{\sqrt{3}} \tag{15}$$

$k$ fiind un număr întreg pozitiv sau negativ.

Tangentele într-un punct de intersecție împreună cu raza vectoare din punctul respectiv formează un triedru tridreptunghi în sens Paul Appell. Fiind curbe asimptote, tangentele au cu curba un contact de ordinul doi.

Dacă un punct parcurge curba între două puncte $\frac{2\pi k}{\sqrt{3}}$ și $\frac{2\pi(k+1)}{\sqrt{3}}$ revenind la poziția inițială pe curbă, inelînd dreapta asimptotă (dreapta divizorilor lui zero) argumentele variază astfel

$$\varphi \text{ cu } +\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \text{ și } \psi \text{ cu } -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

În consecință, variabila hipercomplexă scrisă sub forma

$$\omega = \rho\, e^{\theta\varphi}\; e^{\theta^2\psi}$$

admite simultan perioadele $+\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}$ pentru $\varphi$ și $-\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}$ pentru $\psi$, iar expresia

$$e^{\theta\varphi}\; e^{\theta^2\psi} = e^{\theta\left(\varphi+\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}\right)}\; e^{\theta^2\left(\psi-\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}\right)} \tag{16}$$

Revenind la funcțiile lui Paul Appell, formula lui Moivre de multiplicare a argumentelor este de asemenea valabilă

$$(\mathrm{ap}\,\varphi + \theta\,\mathrm{sp}\,\varphi + \theta^2\,\mathrm{cp}\varphi)^n = \mathrm{ap}\,(n\varphi) + \theta\,\mathrm{sp}\,(n\varphi) + \theta^2\,\mathrm{cp}\,(\theta\varphi) \tag{17}$$

Funcțiile de argument negativ sînt date de relațiile

$$\mathrm{ap}\,(-\varphi) = \mathrm{ap}^2\varphi - \mathrm{sp}\,\varphi\,\mathrm{cp}\,\varphi,$$

$$\mathrm{sp}\,(-\varphi) = \mathrm{cp}^2\,\varphi - \mathrm{sp}\,\varphi\,\mathrm{ap}\,\varphi,$$

$$\mathrm{cp}\,(-\varphi) = \mathrm{sp}^2\,\varphi - \mathrm{cp}\,\varphi\,\mathrm{ap}\,\varphi.$$

*Serii de puteri.* Înainte de a prezenta o teoremă analogă primei teoreme a lui Abel relativă la seriile de puteri, să cercetăm cînd este posibilă dezvoltarea în serie a expresiei

$$S = \frac{1}{1-\omega} = 1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^n \tag{18}$$

atît de necesară în teoria funcțiilor.

Este evident că dezvoltarea este posibilă pentru mulțimea punctelor $\omega$ pentru care seria $S$ este convergentă și mulțimea acestor puncte constituie regiunea de convergență a seriei $S$.

Pentru aceasta, să considerăm suma primilor $n$ termeni.

$$S_n = \frac{\omega^{n+1} - 1}{\omega - 1}$$

și diferența

$$S - S_n = \frac{\omega^{n+1}}{1-\omega}$$

Ținînd seama de formulele (11), seria este convergentă cînd

$$|\rho^{n+1}[\mathrm{ap}\,(n+1)\varphi.\,\mathrm{ap}\,(n+1)\,\psi+\mathrm{cp}\,(n+1)\varphi.\mathrm{cp}\,(n+1)\psi+\mathrm{sp}\,(n+1)\varphi.\mathrm{sp}(n+1)\,\psi]|<\varepsilon$$

$$|\rho^{n+1}[\mathrm{cp}\,(n+1)\,\varphi\ \mathrm{sp}\,(n+1)\,\psi+\mathrm{ap}\,(n+1)\varphi\mathrm{cp}\,(n+1)\psi+\mathrm{sp}\,(n+1)\varphi.\mathrm{ap}(n+1)\,\psi]|<\varepsilon$$

$$|\rho^{n+1}[\mathrm{sp}\,(n+1)\,\varphi\ \mathrm{cp}\,(n+1)\,\psi+\mathrm{cp}\,(n+1)\varphi.\mathrm{ap}\,(n+1)\psi+\mathrm{ap}\,(n+1)\varphi.\mathrm{sp}(n+1)\,\psi]|<\varepsilon$$

Aceste trei condiții sînt echivalente cu

$$-1 < \rho\epsilon^{\varphi+\psi} < 1, \tag{19}$$

$$\rho^2\, e^{-\varphi-\psi} < 1. \tag{20}$$

În concluzie, dezvoltarea în serie a expresiei (18) este posibilă cînd $\omega$ satisface condițiile (19) și (20) a căror interpretare geometrică este următoarea.

Neegalitatea (19) spune că $\omega$ trebuie să se găsească între două plane paralele cu planul divizorilor lui zero și distanțate de acesta cu $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Neegalitatea (20) spune că $\omega$ trebuie să se găsească și în interiorul cilindrului definit de ecuația

$$\rho^2\, e^{-\varphi}\, e^{-\psi} = 1,$$

care are ca axă dreapta divizorilor lui zero și raza $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Domeniul de convergență este un cilindru de rază $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ și înălțime $\frac{2}{\sqrt{3}}$ avînd centrul în origine și generatoarele paralele cu prima bisectoare a triedrului axelor (raza și înălțimea măsurate euclidian).

Putem enunța acum o teoremă a lui Abel pentru seriile de puteri de o variabilă hipercomplexă analogă teoremei din cazul variabilei complexe.

Seria

$$a_0 + a_1\omega + \ldots + a_n\omega^n + \ldots \tag{21}$$

dacă pentru $\omega = \omega_0$ și pentru toate valorile întregi și pozitive ale lui $n$ avem

$$-M < ||\, a_n\omega^n\,||\, \epsilon^{\varphi n+\psi n}\, \epsilon^{n(\varphi_0+\psi_0)} < M, \tag{22}$$

$$||\, a_n\omega_0^n\,||^2 \cdot e^{-(\varphi n+\psi n)}\, e^{-n(\varphi_0+\psi_0)} < M,$$

$M$ fiind un număr pozitiv oarecare dat, va fi convergentă pentru toate valorile lui $\omega$ care satisfac neegalitățile

$$-||\,\omega_0\,||\,\epsilon^{\varphi_0+\psi_0} < ||\,\omega\,||\,\epsilon^{\varphi+\psi} < ||\,\omega_0\,||\,\epsilon^{\varphi_0+\psi_0} \tag{23}$$

$$||\,\omega\,||^2\, e^{-\varphi-\psi} < ||\,\omega_0\,||^2\, e^{-\varphi_0-\varphi_0},$$

ceea ce ne spune că dacă seria este convergentă într-un punct din interiorul cilindrului de convergență, seria este convergentă pentru toate punctele interioare cilindrului.

Pentru demonstrație, observăm că

$$|| a_n \omega^n || e^{\varphi n+\psi n} e^{n\varphi+n\psi} = || a_n \omega_0^n || e^{\varphi n+\psi n} e^{n(\varphi_0+\psi_0)} \cdot \frac{|| \omega^n || e^{n(\varphi+\psi)}}{|| \omega_0 || e^{n(\varphi_0+\psi_0)}}$$

deci

$$-M r^n < || a_n \omega^n || e^{\varphi n+\psi n} e^{n(\varphi+\psi)} < M r^n,$$

unde $r^n$ este termenul general al unei serii geometrice de rație mai mică decît 1.

În consecință avem întotdeauna necgalitățile

$$-M < || \omega || e^{\varphi+\psi} < M$$

$$|| \omega ||^2 e^{-\varphi-\psi} < M,$$

și seria este convergentă în condițiile de mai sus.

## III. FUNCȚII DE O VARIABILĂ HIPERCOMPLEXĂ

Vom spune că cantitatea hipercomplexă «$f$» este funcție de o variabilă hipercomplexă $\omega = x + \theta y + \theta^2 z$ dacă valorile lui «$f$» depind de $\omega$. Funcția «$f$» poate fi scrisă și sub forma

$$f(\omega) = P(x, y, z) + \theta Q(x, y, z) + \theta^2 R(x, y, z)$$

funcțiile $P$, $Q$ și $R$ fiind funcții reale de $x$, $y$, $z$ pe care le vom numi funcții conjugate.

Punînd condiția ca $f(\omega)$ să admită o derivată unică în fiecare punct, adică raportul

$$\frac{df}{d\omega} = \frac{dP + \theta\, dQ + \theta^2 dR}{dx + \theta\, dy + \theta^2 dz}$$

să aibă o limită finită și bine determinată cînd $dx$, $dy$, $dz$ tind simultan către zero, obținem relațiile pe care trebuie să le satisfacă derivatele parțiale ale funcțiilor conjugate

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \theta \frac{\partial Q}{\partial x} + \theta^2 \frac{\partial R}{\partial x} = \theta^2 \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \theta \frac{\partial R}{\partial y} = \theta \frac{\partial P}{\partial z} + \theta^2 \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

care ne conduc la condițiile de monogeneitate, analoge condițiilor lui Cauchy,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y} \end{aligned} \qquad (1)$$

*Derivata funcției* $f(\omega)$. Scriind funcția $f(\omega)$ sub forma

$$f(\omega) = P(x,y,z) + + \theta Q(x, y, z) + \theta^2 R(x, y, z)$$

avem

$$\lim \frac{\Delta f(\omega)}{\Delta \omega} = f'(\omega) = \frac{\partial P}{\partial x} + \theta \frac{\partial Q}{\partial x} + \theta^2 \frac{\partial R}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial y} + \theta \frac{\partial R}{\partial y} + \theta^2 \frac{\partial P}{\partial y} = \tag{2}$$

$$= \frac{\partial R}{\partial z} + \theta \frac{\partial P}{\partial z} + \theta^2 \frac{\partial Q}{\partial z}$$

Condițiile de monogeneitate stabilite mai sus conduc la ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0, \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} = 0 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = 0, \tag{3}$$

care sînt satisfăcute simultan de $P$, $Q$ și $R$.

Derivînd încă odată aceste ecuații în raport cu $x$, $y$, $z$, respectiv și adunîndu-le, obținem ecuația lui Pierre Humbert

$$\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 P}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 P}{\partial z^3} - 3 \frac{\partial^3 P}{\partial x \partial y \partial z} = 0 \tag{4}$$

În consecință, toate funcțiile conjugate $P$, $Q$ și $R$ sînt soluții ale ecuației lui Pierre Humbert. Reciproca nu este însă adevărată, ecuația diferențială cu derivate (4) parțiale admițînd și alte soluții.

Funcțiile de o variabilă hipercomplexă $f(\omega)$, ale căror funcții conjugate satisfac condițiile de monogeneitate, le vom numi funcții monogene ($H$), în inelul $R(\theta)$. O clasă importantă din aceste funcții, analoge funcțiilor olomorfe din studiul funcțiilor de o variabilă complexă, sînt funcțiile ce le numim olomorfe ($H$), definite în modul următor:

1. În domeniul $D$ de existență, pentru fiecare punct corespunde o valoare unică și bine determinată a lui $f(\omega)$.
2. Funcția $f(\omega)$ este continuă în domeniul $D$.
3. Funcția $f(\omega)$ admite derivate continue în domeniul $D$.

În consecință, o funcție olomorfă ($H$) este uniformă și regulată în domeniul $D$.

Dacă considerăm variabila hipercomplexă sub forma

$$\omega = e_1 (x + iy) + e_2 z$$

putem scrie

$$f(\omega) = e_1 [P(x, y) + i Q(x, y)] + e_2 R(z)$$

Condițiile de monogenitate se obțin din

$$df(\omega) = f'(\omega)\, d\omega$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = [e_1(\varphi + i\psi) + e_2 \chi][e_1(dx + i\, dy) + e_2 dz],$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}\right) e_1 + \frac{\partial R}{\partial x} e_2 = (\varphi + i\psi) e_1,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y}\right) e_1 + \frac{\partial R}{\partial y} e_2 = (\varphi + i\psi)\, i e_1,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z} + i \frac{\partial Q}{\partial z}\right) e_1 + \frac{\partial R}{\partial z} e_2 = \chi e_2$$

care se reduc la

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{5}$$

și

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\chi(z)$$

În concluzie, funcția monogenă de o variabilă hipercomplexă este suma directă a unei funcții monogene de o variabilă complexă și a unei funcții arbitrare de $z$.

*Tripletele lui Paul Appell.* Condițiile de monogeneitate sînt valabile pentru tripletul trirectangular de referință, nefiind însă variabile pentru un sistem trirectangular oarecare din spațiu. Sistemul de trei drepte incidente față de care relațiile de monogeneitate se păstrează îl vom numi triplet de monogeneitate și este în general format dintr-un sistem trirectangular în sens Paul Appell, adică din trei drepte care fac unghiuri egale între ele și sînt egal înclinate față de prima bisectoare a triedrului axelor (unghiurile măsurate euclidian).

Ecuațiile planelor care le determină sînt sub forma cea mai generală,

$$\begin{aligned} X &= a_1(x-p)+a_2(y-q)+a_3(z-r)\\ Y &= a_2(x-p)+a_3(y-q)+a_1(z-r)\\ Z &= a_3(x-p)+a_1(y-q)+a_2(z-r) \end{aligned} \tag{6}$$

$$X+\theta Y+\theta^2 Z=(a_1+\theta a_2+\theta^2 a_4)[x-p+\theta(y-q)+\theta^2(z-r)]$$

Într-adevăr, dacă considerăm funcția $f(\omega)=P(x,\ y,\ z)+\theta Q(x,\ y,\ z)+\theta^2 R(x,\ y,\ z)$ și facem în relațiile de monogenitate transformarea de mai sus, avem

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial Z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial Z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial R}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial R}{\partial Z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}$$

înlocuind pe $\frac{\partial X}{\partial x}=a_1, \frac{\partial Y}{\partial x}=a_2$ etc., observăm că avem de asemenea

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial z}\ \text{etc.}$$

Dacă considerăm suprafața $\Gamma$ (de modul constant) și un punct $M$ de pe ea, raza vectoare și tangentele la cele două curbe asimptote care trec prin punctul $M$ formează un triplet de monogeneitate.

Ecuațiile planelor care determină cele trei drepte sînt

$$\begin{aligned} &\mathrm{ap}(\varphi,\psi)(x-x_0)+\mathrm{sp}(\varphi,\psi)(y-y_0)+\mathrm{cp}(\varphi,\psi)(z-z_0)=0,\\ &\mathrm{cp}(\varphi,\psi)(x-x_0)+\mathrm{ap}(\varphi,\psi)(y-y_0)+\mathrm{sp}(\varphi,\psi)(z-z_0)=0,\\ &\mathrm{sp}(\varphi,\psi)(x-x_0)+\mathrm{cp}(\varphi,\psi)(y-y_0)+\mathrm{ap}(\varphi,\psi)(z-z_0)=0, \end{aligned} \tag{7}$$

coordonatele punctului $M$ fiind $x_0,\ y_0,\ z_0$.

Relațiile (7) sînt de forma (6) și demonstrația este evidentă.

Relațiile (6) și (7) ne mai spun că transformările acestea nu influențează relațiile de monogeneitate. Determinantul transformării este expresia

$$-(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - 3\ a_1\ a_2\ a_3),$$

iar pentru relațiile (7) acest determinant este egal cu unitatea.

Transformările (7) sînt singurele care se bucură de această proprietate, întrucît funcțiile lui Paul Appell satisfac la:

$$\mathrm{ap}^3(\varphi, \psi) + \mathrm{sp}^3(\varphi,\psi) + \mathrm{cp}^3(\varphi,\psi) - 3\,\mathrm{ap}\,(\varphi,\psi).\,\mathrm{sp}\,(\varphi,\psi)\,\mathrm{cp}\,(\varphi\,\psi) = 1$$

În sfîrșit, transformările funcțiilor conjugate prin funcții conjugate ne conduc la funcții care de asemenea satisfac condițiile de monogeneitate.

Fie funcțiile $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ care satisfac condițiile de monogeneitate și transformările

$$X = P_1(x, y, z)$$
$$Y = Q_1(x, y, z)$$
$$Z = R_1(x, y, z)$$

funcțiile $P_1(x, y, z)$, $Q_1(x, y, z)$ și $R_1(x, y, z)$ satisfăcînd de asemenea condițiile de monogeneitate.

Luînd derivatele parțiale

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} \text{ etc.}$$

în virtutea celor afirmate avem însă

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial Q}{\partial Y} = \frac{\partial R}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial Q}{\partial Z} = \frac{\partial R}{\partial X}$$

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{\partial Q}{\partial X} = \frac{\partial R}{\partial Y}$$

și

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

Pentru ca să avem $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ etc., trebuie să avem egalitatea elementelor din partea a doua, și, ținînd seamă de relațiile de mai sus, obținem

$$\frac{\partial P}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x}$$

ceea ce demonstrează enunțiul.

În consecință,

dacă

$$f(\omega) = P(x, y, z) + \theta Q(x, y, z) + \theta^2 R(x, y, z)$$

este o funcție monogenă $(H)$, prin transformarea

$$\Omega = f_1(\omega)$$

funcția $f(\omega)$ fiind de asemenea o funcție monogenă $(H)$, obținem funcția

$$f[f_1(\omega)] = f(\Omega) = F(\omega) \tag{8}$$

care de asemenea este o funcție monogenă conform demonstrației de mai sus.

Funcțiile $P$, $Q$ și $R$ reprezintă trei suprafețe în spațiu care se bucură de următoarele proprietăți:

Tangentele, normalele și binormalele într-un punct comun al acestor trei suprafețe la curbele de intersecție formează un triplet de monogeneitate.

Ecuațiile planelor tangente la suprafețele $P(x, y, z)$ $Q(x, y, z)$ și $R(x, y, z)$ în punctul $M(x, y, z)$ sînt

$$\begin{aligned}
&(T_p)\ (X-x)\,P'_x(x,y,z) + (Y-y)\,P'_y(x, y, z) + (Z-z)\,P'_x(x, y, z) = 0\\
&(T_q)\ (X-x)\,Q'_x(x, y, z) + (Y-y)\,Q'_y(x, y, z) + (Z-z)\,Q'_z(x, y, z) = 0\\
&(T_r)\ (X-x)\,R'_x(x, y, z) + (Y-y)\,R'_y(x, y, z) + (Z-z)\,R'_z(x, y, z) = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

care sînt de forma (6), dacă ținem seamă de relațiile de monogeneitate. Ecuațiile normalelor la suprafețele respective sînt

$$\begin{aligned}
&\frac{X-x}{P'_x} = \frac{Y-y}{P'_y} = \frac{Z-z}{P'_z}\\
&\frac{X-x}{P'_y} = \frac{Y-y}{P'_z} = \frac{Z-z}{P'_x}\\
&\text{și}\\
&\frac{X-x}{P'_z} = \frac{Y-y}{P'_x} = \frac{Z-z}{P'_y}
\end{aligned} \tag{10}$$

și formează în consecință un triplet de monogeneitate.

Tangentele la cele trei puncte în punctul de incidență formează un triplet de monogeneitate.

Parametrii directori ai tangentei la curba $(PQ)$ în punctul $M$ sînt

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial P}{\partial z},$$

$$C = -\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial P}{\partial y}, \tag{11}$$

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}$$

Parametrii directori ai tangentei la curba $(QR)$ în punctul $M$ sînt

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}, \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}, \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{12}$$

Parametrii directori ai tangentei la curba $(RP)$ în punctul $M$ sînt

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial P}{\partial y}, \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}, \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}, \tag{13}$$

iar ecuațiile tangentelor în punctul $M$ sînt de forma

$$\frac{X-x}{B} = \frac{Y-y}{C} = \frac{Z-z}{A},$$

$$\frac{X-x}{A} = \frac{Y-y}{B} = \frac{Z-z}{C}, \tag{14}$$

$$\frac{X-x}{C} = \frac{Y-y}{A} = \frac{Z-z}{B}$$

ceea ce demonstrează enunțiul.

Normalele principale ale curbelor $(PQ)$, $(QR)$ și $(RP)$ într-un punct normal formează un triplet de monogeneitate.

Parametrii directori ai normalei principale sînt expresii proporționale cu cantitățile

pentru curba $(PQ)$,

$$\frac{dB}{ds}, \frac{dC}{ds}, \frac{dA}{ds},$$

pentru curba $(QR)$,

$$\frac{dA}{ds}, \frac{dB}{ds}, \frac{dC}{ds},$$

pentru curba $(RP)$,

$$\frac{dC}{ds}, \frac{dA}{ds}, \frac{dB}{ds},$$

și, prin urmare ecuațiile lor au expresii analoge cu (14) ($ds$ este elementul de arc euclidian).

Pentru demonstrație în cazul binormalelor folosim următoarea observație.

Fie două triedre Paul Appell $T_1$ și $T_2$, cu același centru; al treilea triplet $T_3$, cu axele respectiv perpendiculare pe axele tripletelor $T_1$, și $T_2$, este tot un triplet Paul Appell.

Într-adevăr, ecuațiile planelor ce determină triedrele $T_1$ și $T_2$ sînt

$(T_1)$
$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0$$
$$C_1 x + A_1 y + B_1 z = 0$$
$$B_1 x + C_1 y + A_1 z = 0$$

$(T_2)$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0$$
$$C_2 x + A_2 y + B_2 z = 0$$
$$B_2 x + C_2 y + A_2 z = 0$$

Tripletul $T_3$ este determinat de planele

$(T_3)$
$$A_3^1 x + B_3^1 y + C_3^1 z = 0$$
$$A_3^2 x + B_3^2 y + C_3^2 z = 0$$
$$A_3^3 x + B_3^3 y + C_3^3 z = 0$$

unde avem

$$A_3^1 = B_3^2 = C_3^3 = k(B_1 C_2 - B_2 C_1),$$
$$B_3^1 = C_3^2 = A_3^3 = k(C_1 A_2 - A_1 C_2),$$
$$C_3^1 = A_3^2 = B_3^3 = k(A_1 B_2 - A_2 B_1).$$

În consecință și $T_3$ este un triplet de monogeneitate.

Binormalele fiind perpendiculare respectiv pe tangentele și normalele principale, care formează două triplete Paul Appell, determină de asemenea un triplet Paul Appell, în virtutea observației de mai sus.

*Integrale de funcții de o variabilă hipercomplexă luată între limite de numere hipercomplexe.* Integralele de funcții de o variabilă hipercomplexă se descompun într-o sumă de integrale de funcții reale

$$\int_{AB} f(\omega)\, d\omega = \int_{AB} [P(x, y, z) + \theta Q(x, y, z) + \theta^2 R(x, y, z)]\, [dx + \theta\, dy + \theta^2 dz]$$

$$= \int_{AB} P(x, y, z)\, dx + R(x, y, z)\, dy + Q(x, y, z)\, dz +$$

$$+ \theta \int_{AB} P(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz + Q(x, y, z)\, dx +$$

$$+ \theta^2 \int_{AB} P(x, y, z) dz + R(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy;$$

demonstrația este analogă celei din cazul variabilei complexe.

*Integralele de-a lungul unui contur închis.* Fiind dată o funcție olomorfă $(H)$ în interiorul unui domeniu $D$ mărginit de suprafața $S$, integrală

$$\int_C f(\omega)\, d\omega = 0$$

luată de-a lungul unei curbe închise $C$ situate în acest domeniu este nulă.

Scriind pe $f(\omega)$ sub forma

$$f(\omega) = P(x, y, z) + \theta Q(x, y, z) + \theta^2 R(x, y, z)$$

funcțiile $P$, $Q$ și $R$ fiind continue și admițînd derivate continue, integrala se scrie

$$\int_C f(\omega)\, d\omega = \int_C P\, dx + Q\, dz + R dy + \theta \int_C P dy + Q dx +$$

$$+ R dz + \theta^2 \int_C P dz + Q dy + R dx$$

aplicînd formula bine cunoscută, putem scrie

$$\int_C f(\omega)\, d\omega = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dydz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dzdx + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdy +$$

$$+ \theta \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dydz + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dxdy +$$

$$+ \theta^2 \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial z}\right) dzdx + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy.$$

Integralele duble sînt nule în virtutea condițiilor de monogeneitate și enunțiul este astfel demonstrat.

Integrala $\int_C f(\omega) d\omega$ a fost luată de-a lungul unei curbe $C$, oarecare, situată în domeniul $D$ de monogeneitate. Proprietatea se menține dacă integrala se efectuează

de-a lungul mai multor curbe $C_i$ situată în domeniul $D$, cu condiția ca sensul de parcurs să fie precizat. Fie pentru aceasta $n$ drepte $D_1, D_2, \ldots, D_n$ paralele cu dreapta $D_0$ (prima bisectoare a triedrului axelor de referință) și având toate punctele cu domeniul $D$.

Curba $\Gamma$ este formată din curba $C$ care inelează toate dreptele $D_i$ și curbele $C_i$ $(1 = 1,2\ldots,n)$ care inelează respectiv dreptele $D_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Sensul de parcurs este direct cînd privind spre direcțiile pozitive rotația se face în sensul inversului acelor unui ceasornic.

Conform integralei, avem

$$\int_{\nearrow C} f(\omega)\, d\omega + \int_{\nwarrow C_1} f(\omega)\, d\omega + \int_{\nwarrow C_2} f(\omega)\, d\omega + \ldots + \int_{\nwarrow C_n} f(\omega)\, d\omega = 0,$$

Conturul multiplu fiind transformat într-un contur simplu cu ajutorul segmentelor de dreaptă infinit vecine care leagă curba $C$ de fiecare curbă $C_i$. Integralele pe segmentele de dreaptă fiind luate de două ori, în sensuri diferite, se anulează.

În sfîrșit relația de mai sus se scrie, luînd integralele în același sens,

$$\int_C f(\omega)\, d\omega = \int_{C_1} f(\omega)\, d\omega + \int_{C_2} f(\omega)\, d\omega + \ldots + \int_{C_n} f(\omega)\, d\omega$$

Această proprietate admite o reciprocă corespunzătoare teoremei lui Morera din cazul variabilei complexe din plan.

Dacă o funcție $f(\omega)$ de o variabilă hipercomplexă $\omega$ este continuă într-un domeniu $D$ din spațiu și dacă integrala

$$\int_C f(\omega)\, d\omega$$

luată de-a lungul unui contur închis oarecare $C$, situat în $D$, este nulă, $f(\omega)$ este o funcție olomorfă $(H)$ în $D$.

Într-adevăr, integrala definită

$$F(\omega) = \int_{\omega_0}^{\omega} f(\omega)\, d\omega$$

luată între două puncte $\omega_0$ și $\omega$ situate în $D$, de-a lungul unei curbe $C'$ oarecare situate în $D$, are o valoare determinată, independentă de curba $C'$.

Avem de asemenea $\omega_0 + h$

$$F(\omega_0 + h) - F(\omega_0) = \int_{\omega_0}^{\omega_0 + h} f(\omega)\, d\omega$$

Dacă în loc de curba $C'$ considerăm segmentul de dreaptă dintre punctele $\omega_0$ și $\omega + h$ — ceea ce nu restrînge generalitatea — și dacă cele două puncte sînt foarte apropiate, adică dacă

$$h = \rho\, e^{\theta\varphi}\, e^{\theta\psi}$$

avem simultan

$$-\eta_1 < \rho\, e^{\varphi+\psi} < \eta_1$$

$$\rho^2\, e^{-\varphi-\psi} < \eta_2$$

putem scrie

$$f(\omega_0 + h) = f(\omega_0) + \eta(\omega)$$

$$\frac{F(\omega_0 + h) - F(\omega_0)}{h} = f(\omega_0) + \frac{1}{h}\int_{\omega_0}^{\omega_0+h} \eta(\omega)\, d\omega$$

Raportul are ca limită $f(\omega_0)$ cînd $h$ tinde către zero. $F(\omega)$ este prin urmare o funcție olmorfă $(H)$ de $\omega$, avînd ca derivată $f(\omega)$, deci și $f(\omega)$ este o funcție olomorfă $(H)$.

## IV. TEOREME GENERALE ȘI APLICAȚII

Fie $f(\omega)$ o funcție olomorfă $(H)$ într-un domeniu $D$ mărginită de o suprafață $S$. Dacă $\tau$ este un punct aparținînd domeniului $D$ funcția

$$\frac{f(\omega)}{\omega - \tau} \tag{1}$$

este olomorfă $(H)$ în același domeniu, în afară de punctul $\omega = \tau$ și de punctele $\omega$ pentru care $\omega = \tau$ este un divizor al lui zero.

Din punctul $\tau$ ca centru construim suprafața $\Gamma$ (de modul $\rho$); funcția precedentă este olomorfă $(H)$ într-un domeniu $D_1$, al spațiului, limitat de suprafața $S$ și suprafața $\Gamma$ și îi putem aplica teorema stabilită mai sus

$$\int_C \frac{f(\omega)d\omega}{\omega - \tau} = \int_\gamma \frac{f(\omega)\, d\omega}{\omega - \tau} \tag{2}$$

unde $C$ este o curbă în domeniul $D$, care *inelează* dreapta paralelă cu prima bisectoare a triedrului axelor și trece prin punctul $\tau$. Curba $\gamma$ fiind formată din două porțiuni ale curbelor asimptote cuprinse între două puncte de intersecție consecutive.

Dacă $\rho$ este suficient de mic, valoarea lui $f(\omega)$ diferă foarte puțin de $f(\tau)$ în virtutea continuității și putem scrie

$$f(\omega) = f(\tau) + \eta(\omega) \tag{3}$$

Înlocuind în integralele de mai sus obținem

$$\int_\gamma \frac{f(\omega)\, d\omega}{\omega - \tau} = f(\tau)\int_\gamma \frac{d\omega}{\omega - \tau} + \int_\gamma \frac{\eta(\omega)\, d\omega}{\omega - \tau}$$

Pentru calculul integralei întîia din membrul al doilea să punem

$$\int_\gamma \frac{d\omega}{\omega - \tau} = \int_{\gamma_1} \frac{d\omega}{\omega - \tau} + \int_{\gamma_2} \frac{d\omega}{\omega - \tau}$$

și să observăm că porțiunile de curbă $\gamma_1$ și $\gamma_2$ au ecuațiile parametrice

$$\omega_1 = \rho\, e^{\theta\varphi}$$

$$\omega_2 = \rho\, e^{\theta i\psi}$$

$\varphi$ și $\psi$ variind de la 0 la $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ și de la $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ la 0 respectiv.

Cu aceste observații putem scrie

$$\int_{\gamma_1} \frac{d\omega}{\omega - \tau} = \theta \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} d\varphi = \theta \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \tag{4}$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{d\omega}{\omega - \tau} = \theta^2 \int_{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}^{0} = -\theta^2 \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \tag{4'}$$

Integrala a doua $\eta \int_{\gamma} \frac{d\omega}{\omega - \tau}$ este nulă cînd $\omega = \tau$ întrucît funcția este continuă pentru $\omega = \tau$.

În sfîrșit ținînd seamă de aceste elemente obținem formula fundamentală

$$\int_c \frac{f(\omega)}{\omega - \tau} d\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} (\theta - \theta^2) f(\tau) \tag{5}$$

Repetînd procedeul clasic și presupunînd că $f(\omega)$ este derivabilă de cîte ori este nevoie, obținem pentru derivata întîia expresia

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}} (\theta - \theta^2) f'(\tau) = \int_c \frac{f(\omega)}{(\omega - \tau)^2} d\omega \tag{6}$$

iar pentru derivata de ordinul « $n$ »

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}} (\theta - \theta^2) f^{(n)}(\tau) = n! \int_c \frac{f(\omega)}{(\omega - \tau)^{n+1}} d\omega \tag{7}$$

*Dezvoltarea în serie, analogă seriei lui Taylor.* Fie $f(\omega)$ o funcție olomorfă $(H)$ în interiorul unui cilindru $D$ de centru $a$ și cu generatoarea paralelă cu prima bisectoare a triedrului axelor. Într-un punct oarecare $\tau$ din acest cilindru avem egalitatea

$$(1 - \theta) f(\tau) = (1 - \theta) \left[ f(a) + \frac{\tau - a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(\tau - a)^n}{n!} f^{(n)}_{(a)} + \ldots \right] \tag{8}$$

Presupunem pentru demonstrație că funcția $f(\omega)$ este olomorfă $(H)$ și pe suprafața cilindrului. Dacă $\tau$ este un punct în interiorul lui $D$, după formula fundamentală avem

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}} (\theta - \theta^2) f(\tau) = \int_c \frac{f(\omega)}{\omega - \tau} d\omega,$$

$C$ fiind cercul bazei cilindrului.

Înlocuind pe $\frac{1}{\omega - \tau}$ dezvoltat în serie (II, 18), obținem

$$(1 - \theta) f(\tau) = (1 - \theta) [a_0 + (\tau - a) a_1 + \ldots + (\tau - a)^n a_n + \ldots]$$

cu

$$n! \frac{2\pi}{\sqrt{3}} (\theta - \theta^2) a^n = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot (\theta - \theta^2) f^{(n)}(a) = n! \int_c \frac{f(\omega)}{(\omega - a)^{n+1}} d\omega \tag{9}$$

coeficienții $a_n$ fiind bineînțeles determinați în afară de un multiplu al lui $1+\theta+\theta^2$. Tot astfel obținem o dezvoltare în serie, analogă seriei lui Laurent.

Fie $f(\omega)$ o funcție olomorfă într-un domeniu mărginit de doi cilindrii de ecuații

$$\begin{aligned} \rho_1^2\, e^{-\varphi}\, e^{-\psi} &= R_1 \\ \rho_2^2\, e^{-\varphi}\, e^{-\psi} &= R_2. \end{aligned} \tag{10}$$

și de planele

$$\begin{aligned} \rho_1\, e^{\varphi+\psi} &= \pm R_1 \\ \rho_2\, e^{\varphi+\psi} &= \pm R_2 \qquad\qquad R_1 > R_2 \end{aligned} \tag{10'}$$

Expresia $(\theta-\theta^2)\, f(\omega)$ într-un punct oarecare $\tau$ din acest domeniu (care se obține rotind un patrat în jurul primei bisectoare a triedrului axelor) este egală cu suma a două serii convergente, una ordonată după puterile pozitive ale lui $(\tau-a)$, cealaltă după puterile pozitive ale lui $\dfrac{1}{\tau-a}$.

Vom presupune că funcțiunea $f(\omega)$ este olomorfă $(H)$ și pe suprafața care mărginește domeniul. Descriem în jurul punctului $l$ $\tau$ o curbă $\gamma$ care inelează dreapta ce trece prin punctul $\tau$ și este paralelă cu prima bisectoare a triedrului axelor.

Considerăm în sfîrșit cercurile definite de ecuațiile

$$(C_1)\quad \begin{aligned} \rho_1^2\, e^{-\varphi-\psi} &= R_1 \\ \rho_1\, e^{\varphi-\psi} &= R_1 \end{aligned} \qquad \text{și} \qquad (C_2)\quad \begin{aligned} \rho_2^2\, e^{-\varphi-\psi} &= R_2 \\ \rho_2\, e^{\varphi+\psi} &= R_2 \end{aligned}$$

și aplicăm relația

$$\int_c \frac{f(\omega)d\omega}{\omega-\tau} = \int_{c_1} \frac{f(\omega)\,d\omega}{\omega-\tau} + \int_{c_2} \frac{f(\omega)\,d\omega}{\omega-\tau}$$

integralele fiind luate în același sens.

Cele trei integrale au următoarele valori obținute folosind procedeul clasic

$$\int_c \frac{f(\omega)}{\omega-\tau}\, d\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(\theta-\theta^2) f(\tau) \tag{11}$$

$$\int_{c_1} \frac{f(\omega)}{\omega-\tau}\, d\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(\theta-\theta^2)\left[a_0 + \sum_1^\infty a_n(\omega-a)^n\right]$$

cu (12)

$$n!\,(\theta-\theta^2)\, a_n = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(\theta-\theta^2)\, f^{(n)}(a) = n!\int_{c_1} \frac{f(\omega)\,d\omega}{(\omega-\tau)^{n+1}}$$

$$\int_{c_2} \frac{f(\omega)}{\omega-\tau}\, d\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\theta(1-\theta)\left[\sum_{n=1}^\infty a'_n \frac{1}{(\tau-a)^n}\right] \tag{13}$$

cu

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}(\theta-\theta^2)\, a'_n = \int_{c_2} (\omega-a)^{n-1} f(\omega)\, d\omega \tag{14}$$

Adunînd cele două integrale astfel dezvoltate, obținem pentru $(1-\theta)f(\tau)$ expresia

$$(1-\theta)f(\tau) = (1-\theta)\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (\omega - a)^n\right]$$

Coeficientul $a_n$ are ca expresie oricare ar fi semnul lui $n$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}(\theta-\theta^2)a_n = \int_C \frac{f(\omega)}{(\omega-a)^{n+1}} d\omega \tag{15}$$

## V. CARACTERISTICI

Fie $f(\omega)$ o funcție olomorfă de o variabilă hipercomplexă $\omega$, care considerată ca funcție de $x$, $y$, $z$, satisface relațiile

$$\frac{\partial f(\omega)}{\partial x} = \theta^2 \frac{\partial f(\omega)}{\partial y} = \theta . \frac{\partial f(\omega)}{\partial z} \tag{1}$$

Scrisă sub forma

$$f(\omega) = P(x, y, z) + \theta Q(x, y, z) + \theta^2 R(x, y, z)$$

funcțiile conjugate $P$, $Q$ și $R$ satisfac la condițiile de monogeneitate

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y}. \tag{2}$$

Studiul acestor sisteme intră în studiul cazului general al sistemelor de $(n+1)$ variabile $x_0, x_1, \ldots x_n$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\mu} = \sum_j \alpha_{\mu ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_0} \quad (\mu = 1, 2 \ldots n) \tag{3}$$

Să facem o schimbare de variabile, și fie $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ noile variabile, avem

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{x}_\mu} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial x_0}{\partial \bar{x}_\mu} + \sum_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\mu} \quad (\nu = 1, 2 \ldots n) \tag{4}$$

și

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{x}_0} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial x_0}{\partial \bar{x}_0} + \sum_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_0}$$

deci

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{x}_\mu} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial x_0}{\partial \bar{x}_\mu} + \sum_{\nu,j} \frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\mu} \alpha_{\nu ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_0} \tag{5}$$

și

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{x}_0} = \sum_j \left(\delta_{ij} \frac{\partial x_0}{\partial \bar{x}_0} + \sum_\nu \alpha_{\nu ij} \frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_0}\right) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_0}$$

care permit rezolvarea şi determinarea lui $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0}$ în funcţie $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \overline{x}_0}$ cînd matricea

$$\left\{\delta_{ij}\frac{\partial x_0}{\partial \overline{x}_0}+\sum_{\nu}\alpha_{\nu ij}\frac{\partial x_\nu}{\partial \overline{x}_0}\right\} \tag{6}$$

admite un invers, deci cînd determinantul

$$\left|\delta_{ij}\frac{\partial x_0}{\partial \overline{x}_0}+\sum_{\nu}\alpha_{\nu ij}\frac{\partial x_\nu}{\partial \overline{x}_0}\right|=0$$

Caracteristicile sînt definite de determinantul

$$\left|\delta_{ij}\frac{\partial x_0}{\partial \overline{x}_0}+\sum_{\nu}\alpha_{\nu ij}\frac{\partial x_\nu}{\partial \overline{x}_0}\right|=0 \tag{7}$$

şi sînt sisteme de $n+1$ funcţii legate prin această relaţie.

Aplicînd cele de mai sus la sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\theta^2\frac{\partial f}{\partial y}=\theta\frac{\partial f}{\partial z} \tag{8}$$

şi făcînd transformarea

$$\overline{x}=\overline{x}(x,\ y,\ z),\ \overline{y}=\overline{y}(x,\ y,\ z),\ \overline{z}=\overline{z}(x,\ y,\ z)$$

unde

$$\omega=x+\theta y+\theta^2 z$$

sistemul se transformă prin

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}=\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial \overline{x}},\ \frac{\partial f}{\partial \overline{y}}=\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial \overline{y}},\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}}$$

în

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{y}}=\theta\frac{\frac{\partial \omega}{\partial \overline{y}}}{\frac{\partial \omega}{\partial \overline{x}}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \overline{x}},\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\theta^2\frac{\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}}}{\frac{\partial \omega}{\partial \overline{x}}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \overline{x}} \tag{9}$$

Pentru ca împărţirea cu $\frac{\partial \omega}{\partial \overline{x}}$ să fie posibilă este necesar ca $\frac{\partial \omega}{\partial \overline{x}}$ să nu fie un divizor al lui zero.

Pentru aceasta, $\frac{\partial \omega}{\partial \overline{x}}$, avînd expresia

$$\frac{\partial \omega}{\partial \overline{x}}=\frac{\partial x}{\partial \overline{x}}+\theta\frac{\partial y}{\partial \overline{x}}=\theta^2\frac{\partial z}{\partial \overline{x}}, \tag{10}$$

este necesar să nu fie satisfăcute relaţiile

$$\frac{\partial x}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial y}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial z}{\partial \overline{x}}=0, \tag{11}$$

sau

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} \tag{12}$$

Derivînd pe $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ în raport cu $\bar{x}$ obținem

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} = 1 \\
&\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} = 0 \\
&\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

ținînd seamă de relația (11) ecuațiile (13) devin

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial y}\right) \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}\right) \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} = 1 \\
&\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}\right) \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial z}\right) \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} = 0 \\
&\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right) \frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\right) \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

sau, ținînd seama de ecuațiile (12)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}\right] = 1 \\
&\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial z}\right] = 0 \\
&\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\right] = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

Pentru ca ecuațiile (14) să fie compatibile este necesar să avem

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial x} - \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial y} & \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial x} - \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial z} \\
\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x} - \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial y} & \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x} - \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial z}
\end{vmatrix} = 0$$

care este ecuația caracteristicilor.

Se observă imediat că această ecuație este identică cu determinantul funcțional al următoarelor trei funcții

$$\begin{aligned}
&\bar{y}\,(x,\ y,\ z) = a \\
&\bar{z}\,(x,\ y,\ z) = b \\
&x + y + z = c
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \end{vmatrix}$$

prin urmare curbele caracteristice sînt situate în planul divizorilor lui zero.

Relațiile (15) sînt compatibile cînd

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$$

Acest sistem admite soluțiile

$$\bar{y} = \varphi(x - y,\ y - z)$$

$$\bar{z} = \psi(x - y,\ y - z) \tag{17}$$

care reprezintă cilindrii cu generatoarele paralele cu prima bisectoare a triedrului axelor. Ecuațiile lor reprezintă intersecția acestor cilindri, adică drepte paralele cu dreapta divizorilor lui zero.

## VI. TRANSFORMĂRI CONFORME PAUL APPELL ÎN SPAȚIU

Pentru a realiza transformări de suprafețe și volume în spațiu, în cadrul teoriei funcțiunilor de o variabilă hipercomplexă, este necesară introducerea de noțiuni noi conform metricei speciale introduse de Paul Appell.

*Arc de curbă, pe o suprafață.* Dacă

$$x = X(u,\ v),\quad y = Y(u,\ v),\quad z = Z(u,\ v) \tag{1}$$

sînt coordonatele parametrice ale unei suprafețe $S$, pentru orice deplasare infinitezimală pe suprafață avem

$$dx = \frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv$$

$$dy = \frac{\partial Y}{\partial u}du + \frac{\partial Y}{\partial v}dv$$

$$dz = \frac{\partial Z}{\partial u}du + \frac{\partial Z}{\partial v}dv$$

$u$ și $v$ fiind funcții de un parametru $t$. Elementul de arc este dat de

$$d\sigma^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\,dxdydz =$$
$$\left[\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^3 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^3 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^3 - 3\frac{\partial X}{\partial u}\cdot\frac{\partial Y}{\partial u}\cdot\frac{\partial Z}{\partial u}\right] du^3 +$$
$$+3\left[\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2\frac{\partial X}{\partial v} - \sum\frac{\partial X}{\partial u}\cdot\frac{\partial Y}{\partial u}\cdot\frac{\partial Z}{\partial v}\right]du^2\,dv +$$
$$3\left[\sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2\frac{\partial X}{\partial u} - \sum\frac{\partial X}{\partial u}\cdot\frac{\partial Y}{\partial v}\cdot\frac{\partial Z}{\partial v}\right]du\,dv^2 + \tag{2}$$
$$+\left[\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^3 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^3 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^3 - 3\frac{\partial X}{\partial v}\cdot\frac{\partial Y}{\partial v}\cdot\frac{\partial Z}{\partial v}\right]dv^3$$

care, printr-o notație convenabilă, se mai scrie astfel

$$d\sigma^3 = A\,du^3 + 3B\,du^2\,dv + 3\,C\,dudv^2 + D\,dv^3 \tag{2'}$$

Dacă $(u)$ și $(v)$ sînt curbele parametrice avem

$$d\sigma_1^3 = Adu^3;\quad d\sigma_2^3 = D\,dv^3 \tag{3}$$

iar unghiul aceloraşi curbe este dat de expresiile

$$ap\,(u,\ v) = \frac{B}{\sqrt[3]{AD^2}};\quad ap\,(v,\ u) = \frac{C}{\sqrt[3]{A\,D}}; \tag{4}$$

curbele sînt ortogonale în sens Paul Appell cînd $B = C = 0$.

Unghiul a două curbe oarecare trasate pe suprafață este dat de expresia

$$ap\,(d,\ \delta) = \frac{Adu\,\delta u^2 + B\,du\,\delta v^2 + C\,dv\,\delta u^2 + Ddv\,\delta v^2 +}{(A\delta u^3 + 3\,B\delta u^2\,\delta v + 3\,C\delta u\delta v^2 + P\delta v^3]^{\frac{2}{3}}.}$$
$$\frac{+\,2\,B\,\delta u\,\delta v\,dv + 2C\,dv\,\delta u\,\delta v}{(Adu^3 + 3\,Bdu^2\,dv + 3\,Cdu\,dv^2 + Pdv^3]^{\frac{1}{3}}} \tag{5}$$

pentru $ap\ (\delta,\ d)$ se permută $\delta$ cu $d$ în expresia de mai sus.

Presupunem acum că două suprafețe $S$ și $\overline{S}$ de expresii $A$, $B$, $C$, $D$ și $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, definite mai sus, au ecuațiile parametrice, funcții de aceiași parametrii $u$ și $v$. Se observă că pentru a avea unghiul a două curbe orecare egal este suficient să avem proporționalitatea

$$\frac{A}{\overline{A}} = \frac{B}{\overline{B}} = \frac{C}{\overline{C}} = \frac{D}{\overline{D}}$$

care ne conduce la proporționalitatea elementelor de arc.

Proprietatea este reciprocă.

Fie $\Omega$ o funcție de o variabilă hipercomplexă $\omega$

$$\Omega = f(\omega) = \mathfrak{X}\,(x,\ y,\ z) + \theta\,Q\,(x,\ y,\ z) + \theta^2\,R\,(x,\ y,\ z)$$

definită într-un domeniu $V$ din spaţiul cu trei dimensiuni care realizează o transformare între spaţiile $\Omega$ şi $\omega$. Să considerăm în spaţiul $(\omega)$ o curbă

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \end{aligned} \tag{6}$$

Cînd $\omega$ descrie această curbă, $\Omega$ parcurge curba

$$\begin{aligned} X &= P\,[x(t),\ y(t),\ z(t)] \\ Y &= Q\,[x(t),\ y(t),\ z(t)] \\ Z &= R\,[x(t),\ y(t),\ z(t)] \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \end{aligned} \tag{7}$$

Funcţia $f(\omega)$ să o presupunem monogenă în fiecare punct al domeniului $V$. Iacobianul transformării are expresia, ţinînd seamă de condiţiile de monogeneitate

$$\frac{D(P, Q, R)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$\frac{D(C, Q, R)}{D(x, y, z)} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^3 + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^3 - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = \|f'(\omega)\|^3 \tag{8'}$$

deci, iacobianul transformării este diferit de zero dacă derivata lui $f(\omega)$ nu este nulă în punctul considerat sau nu este un divizor al lui zero.

Fie curba $(\gamma)$ în $(\omega)$ şi transformata sa $(\Gamma)$ în spaţiul lui $(\Omega)$, transformarea fiind realizată de

$$\Omega = f(\omega) \tag{9}$$

cu

$$\| f'(\omega) \| \neq 0$$

un punct $M$ pe $(\gamma)$ şi $M'$ transformatul său pe $(\Gamma)$. Fie de asemenea $(N)$ un punct vecin lui $M$, tot pe $(\gamma)$ şi $N'$, transformatul său pe $(\Gamma)$ avem

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \| MN \|\, e^{\theta\alpha_1 + \theta^2\alpha_2} \\ \Delta\Omega &= \| M'N' \|\, e^{\theta\beta_1 + \theta^2\beta_2} \end{aligned} \tag{10}$$

La limită obţinem

$$\lim \frac{\Delta\Omega}{\Delta\omega} = f'(\omega) = \frac{dS}{ds}\, e^{\theta(\psi - \psi') + \theta^2(\varphi - \varphi')} \tag{11}$$

unde $ds$, $dS$ sînt respectiv elementul de arc în sens Paul Appell pe curbele $(\gamma)$ și $(\Gamma)$ iar, $\psi$, $\psi'$, $\varphi$, $\varphi'$ limitele argumentelor $\beta_1$, $\alpha_1$, $\beta_2$, $\alpha_2$, cînd punctele $N$ și $N'$ tind către $M$ și $M'$ respectiv. Dacă socotim argumentele determinate fără multiplu de perioade și dacă notăm

$$f'(\omega) = \rho(x, y, z)\, e^{\theta\chi + \theta^2\tau}$$

obținem

$$\begin{aligned} \frac{dS}{ds} &= \rho(x, y, z) \\ \chi &= \psi - \psi' \\ \tau &= \varphi - \varphi' \end{aligned} \tag{12}$$

prin urmare, local, prin transformarea (9) elementele de arc sînt proporționale, factorul de proporționalitate fiind modulul derivatei funcției de transformare. Argumentele tangentei în punctul transformat se amplifică cu argumentul derivatei funcției de transformare (9) deci pentru două curbe, care trec printr-un punct $M$, tangentele în acest punct și tangentele la curbele transformate în punctul transformat $M'$ fac aceleași unghiuri în sens Paul Appell.

Să considerăm acum problema inversă și anume să determinăm transformările

$$\begin{aligned} X &= P(x, y, z) \\ Y &= Q(x, y, z) \\ Z &= R(x, y, z) \end{aligned}$$

care păstrează unghiurile în sens Paul Appell.

Fie un punct $M$ în spațiu și $(\gamma)$, $(\Gamma)$ două curbe ce trec prin $M$, iar $M'$ $(\gamma')$ și $(\Gamma')$ transformatele lor. Notînd cu $d$, deplasările pe $(\gamma)$ și cu $\delta$ deplasările pe $(\Gamma)$ putem scrie

$$\begin{aligned} \text{ap}(\gamma, \Gamma)_M &= \frac{1}{ds^2\delta s}[(dx^2 - dydz)\,\delta x + (dy^2 - dzdx)\,\delta y + (dz^2 - dxdy)\,\delta z] \\ \text{cp}(\gamma, \Gamma)_M &= \frac{1}{ds^2\delta s}[(dy^2 - dzdx)\,\delta x + (dz^2 - dxdy)\,\delta y + (dx^2 - dydz)\,\delta z] \\ \text{sp}(\gamma, \Gamma)_M &= \frac{1}{ds^2\delta s}[(dz^2 - dxdy)\,\delta x + (dx^2 - dydz)\,\delta y + (dy^2 - dxdz)\,\delta z] \end{aligned} \tag{13}$$

iar pentru curbele $(\gamma', \Gamma')$ avem

$$\begin{aligned} \text{ap}(\gamma', \Gamma') &= \frac{1}{dS^2\delta s}[(dX^2 - dYdZ)\,\delta X + (dY^2 - dZdX)\,\delta Y + (dZ^2 - dXdY)\,\delta Z] \\ \text{cp}(\gamma', \Gamma') &= \frac{1}{dS^2\delta S}[(dY^2 - dZdX)\,\delta X + (dZ^2 - dXdY)\,\delta Y + (dX^2 - dYdZ)\,\delta Z] \\ \text{sp}(\gamma', \Gamma') &= \frac{1}{dS^2\delta S}[(dZ^2 - dXdY)\,\delta X + (dX^2 - dYdZ)\,\delta Y + (dY^2 - dZdX)\,\delta Z] \end{aligned} \tag{14}$$

Deoarece trebuie să avem

$$\begin{aligned} \mathrm{ap}\,(\gamma, \Gamma)_M &= \mathrm{ap}\,(\gamma', \Gamma')_{M'} \\ \mathrm{cp}\,(\gamma, \Gamma)_M &= \mathrm{cp}\,(\gamma', \Gamma')_{M'} \\ \mathrm{sp}\,(\gamma, \Gamma)_M &= \mathrm{sp}\,(\gamma', \Gamma')_{M'} \end{aligned} \tag{15}$$

oricare ar fi $dx$, $dy$, $dz$ și $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ identificînd coeficienții lui $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, din prima relație obținem

$$\frac{dx^2 - dydz}{ds^2 \delta s} = \frac{1}{dS\,\delta S}\left[(dX^2 - dYdZ)\frac{\partial X}{\partial x} + (dY^2 - dZdX)\frac{\partial Y}{\partial x} + (dZ^2 - dXdY)\frac{\partial Z}{\partial x}\right]$$

$$\frac{dy^2 - dzdx}{ds^2 \delta s} = \frac{1}{dS^2\,\delta s}\left[(dX^2 - dYdZ)\frac{\partial X}{\partial y} + (dY^2 - dZdX)\frac{\partial Y}{\partial y} + (dZ^2 - dXdY)\frac{\partial Z}{\partial y}\right] \tag{16}$$

$$\frac{dz^2 - dxdy}{ds^2 \delta s} - \frac{1}{dS^2\,\delta s}\left[(dX^2 - dYdZ)\frac{\partial X}{\partial z} + (dY^2 - dZdX)\frac{\partial Y}{\partial z} + (dZ^2 - dXdY)\frac{\partial Z}{\partial z}\right]$$

și înmulțind respectiv în (16) cu $dx$, $dy$ și $dz$ obținem

$$\frac{ds^3}{ds^2 \delta s} = \frac{dS^3}{dS \cdot \delta S}$$

deci

$$\frac{ds}{\delta s} = \frac{dS}{\delta S}, \quad \frac{dS}{ds} = \frac{\delta S}{\delta s} \tag{17}$$

Același rezultat îl obținem dacă identificăm în (16) coeficienții lui $\delta_x$, $\delta_y$, $\delta_z$ din ultimele două relații. Deci dacă relațiile (15) sînt satisfăcute și elementele de arc în sens Paul Appell sînt proporționale. Urmează să găsim legăturile între $X$, $Y$, $Z$, pentru care avem

$$dX^3 + dY^3 + dZ^3 - 3\,dXdYdZ = \rho^3(x, y, z)\,[dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\,dxdydz] \tag{18}$$

care se mai poate scrie

$$(dX + \theta dY + \theta^2 dZ)\,(dX + \theta\mu\,dY + \theta^2\mu^2\,dZ)\,(dX + \theta\mu^2 dY + \theta^2\mu\,dZ) =$$

$$\rho^3(x, y, z)\,(dx + \theta dy + \theta^2 dz)\,(dx + \theta\mu dy + \theta^2\mu^2 dz)\,(dx + \theta\mu^2 dy + \theta^2\mu dz) \tag{19}$$

unde $\mu$ este rădăcina complexă a unității.

Următoarea combinație

$$\begin{aligned} dX + \theta dY + \theta^2 dZ &= \rho_1\,(dx + \theta dy + \theta^2 dz) \\ dX + \theta\mu dY + \theta^2\mu^2\,dZ &= \rho_2\,(dx + \theta\mu dy + \theta^2\mu^2 dz) \\ dX + \theta\mu^2 dY + \theta^2\mu dZ &= \rho_3\,(dx + \theta\mu^2 dy + \theta^2\mu dz) \end{aligned} \tag{20}$$

ne conduce la

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

deci $f(\omega)$ este monogenă $(H)$ în $V$.

Transformarea precedentă (9) se bucură de o proprietate care face legătura cu transformarea conformă din plan.

Fie suprafețele

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

și

$$\psi(x, y, z) = 0$$

asupra cărora făcînd transformarea

$$x = \mathfrak{P}(x, y, z)$$

$$y = Q(x, y, z)$$

$$z = R(x, y, z)$$

se transformă în $\varphi_1(x, y, z)$ și $\psi_1(x, y, z)$.

Fie $M$ un punct oarecare pe curba comună suprafețelor $\varphi$ și $\psi$, iar $M_1$ transformatul său pe curba comună suprafețelor $\varphi_1$ și $\psi_1$.

Planele care trec prin $M$ și $M_1$ taie respectiv cele două perechi de suprafețe după curbele $C_\varphi$, $C_\psi$ și $C_{\varphi_1}$ și $C_{\psi_1}$ respectiv.

*Curbele $C_\varphi$ și $C_\psi$ fac în $M$ același unghi, în sens euclidian, ca $C_{\varphi_1}$ și $C_{\psi_1}$ în $M_1$,* dacă cele două plane sînt perpendiculare pe prima bisectoare a triedrului axelor.

Ecuațiile planelor tangente în punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ la cele două suprafețe $\varphi$ și $\psi$ sînt

$$\varphi'_{x_0}(x-x_0) + \varphi'_{y_0}(y-y_0) + \varphi'_{z_0}(z-z_0) = 0$$

$$\psi'_{x_0}(x-x_0) + \psi'_{y_0}(y-y_0) + \psi'_{z_0}(z-z_0) = 0$$

Iar ecuațiile tangentelor conținute în planul

$$x - x_0 + y - y_0 + z - z_0 = 0$$

sînt

$$(T, \varphi_0) \qquad \frac{x-x_0}{\varphi'_{y_0} - \varphi'_{z_0}} = \frac{y-y_0}{\varphi'_{z_0} - \varphi'_{x_0}} = \frac{z-z_0}{\varphi'_{x_0} - \varphi'_{y_0}}.$$

$$(T, \psi_0) \qquad \frac{x-x_0}{\psi'_{y_0} - \psi'_{z_0}} = \frac{y-y_0}{\psi'_{z_0} - \psi'_{x_0}} = \frac{z-z_0}{\psi'_{x_0} - \psi'_{y_0}}$$

cosinusul unghiului celor două drepte este

$$\cos(T\varphi_0, T\psi_0) = \frac{\Sigma(\varphi'_{x_0} - \varphi'_{y_0})(\psi'_{x_0} - \psi'_{y_0})}{\sqrt{[\Sigma(\varphi'_{x_0} - \varphi'_{y_0})^2][\Sigma(\psi'_{x_0} - \psi'_{y_0})^2]}}$$

Efectuînd acum transformarea menţionată, ţinînd seamă de relaţiile între derivatele parţiale ale lui $P$, $Q$ şi $R$ obţinem

$$\varphi'_x = \frac{\partial\varphi}{\partial P}\cdot\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial Q}\cdot\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial R}\cdot\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\varphi'_y = \frac{\partial\varphi}{\partial P}\cdot\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial Q}\cdot\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial R}\cdot\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\varphi'_z = \frac{\partial\varphi}{\partial P}\cdot\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial Q}\cdot\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial R}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}$$

pentru funcţia $\psi$ se înlocuieşte $\varphi$ cu $\psi$.

Ecuaţiile tangentelor respective se obţin imediat şi sînt

$(T, \varphi_1)$

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial\varphi}{\partial P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)_M + \frac{\partial\varphi}{\partial Q}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_M + \frac{\partial\varphi}{\partial R}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)_M} =$$

$$\frac{y - y_0}{\frac{\partial\varphi}{\partial P}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)_M + \frac{\partial\varphi}{\partial Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)_M + \frac{\partial\varphi}{\partial R}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_M} =$$

$$\frac{z - z_0}{\frac{\partial\varphi}{\partial P}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_M + \frac{\partial\varphi}{\partial Q}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)_M + \frac{\partial\varphi}{\partial R}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)_M}$$

pentru curba $C_{\varphi_0}$ se înlocuieşte $\varphi$ cu $\psi$.

Cosinusul unghiului celor două tangente se poate scrie folosind notaţiile

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)_M = X_p,\ \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_M = Z_p,\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} = Y_p$$

Astfel numărătorul are expresia

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial P}\cdot X_p + \frac{\partial\varphi}{\partial Q}Z_p + \frac{\partial\varphi}{\partial R}Y_p\right]\left[\frac{\partial\psi}{\partial P}X_p + \frac{\partial\psi}{\partial Q}Z_p + \frac{\partial\psi}{\partial R}Y_p\right] +$$

$$+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial P}Y_p + \frac{\partial\varphi}{\partial Q}X_p + \frac{\partial\varphi}{\partial R}Z_p\right]\left[\frac{\partial\psi}{\partial P}Y_p + \frac{\partial\psi}{\partial Q}X_p + \frac{\partial\psi}{\partial R}Z_p\right] +$$

$$+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial P}Z_p + \frac{\partial\varphi}{\partial Q}Y_p + \frac{\partial\varphi}{\partial R}X_p\right]\left[\frac{\partial\psi}{\partial P}Z_p + \frac{\partial\psi}{\partial Q}Y_p + \frac{\partial\psi}{\partial R}X_p\right]$$

care dezvoltat capătă forma

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial P}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial P}+\frac{\partial\varphi}{\partial Q}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial Q}+\frac{\partial\varphi}{\partial R}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial R}\right)(X_p^2+Y_p^2+Z_p^2)+$$

$$+\left[\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial P}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial Q}+\frac{\partial\varphi}{\partial Q}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial P}\right)\right][X_p\,Y_p+Y_p\,Z_p+Z_p\,X_p]$$

ținînd seama de identitatea

$$X_p^2+Y_p^2+Z_p^2=-2\,X_p\,Y_p-2\,Y_p\,Z_p-2\,Z_p\,X_p$$

obținută din

$$(X_p+Y_p+Z_p)^2=0$$

Numărătorul are valoarea

$$\frac{1}{2}\left[2\sum\frac{\partial\varphi}{\partial P}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial P}-\sum\frac{\partial\varphi}{\partial P}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial Q}\right][X_p^2+Y_p^2+Z_p^2]$$

Se observă ținîndu-se seamă de egalitățile și identitățile de mai sus că numitorul are expresia

$$\frac{1}{2}\left[\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial P}-\frac{\partial\varphi}{\partial Q}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial P}-\frac{\partial\psi}{\partial Q}\right)^2\right][X_p^2+Y_p^2+Z_p^2]$$

în sfîrșit cosinusul curbelor $C_{\varphi_1}$ și $C_{\psi_1}$ rămîne

$$\cos\,(T,\,C_{\varphi_1};\;TC_{\psi_1})=\frac{\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial P}-\frac{\partial\varphi}{\partial Q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial P}-\frac{\partial\psi}{\partial Q}\right)}{\left[\left[\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial P}-\frac{\partial\varphi}{\partial Q}\right)^2\right]\left[\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial P}-\frac{\partial\psi}{\partial Q}\right)^2\right]\right]^{\frac{1}{2}}}$$

ceea ce demonstrează enunțul.

Dacă considerăm funcția de variabilă hipercomplexă sub forma

$$f(\omega)=e_1\,(P(x,\,y)+i\,Q(x,\,y))+e_2\,R(z)$$

transformările de mai sus în planul divizorilor lui zero, sînt transformările conforme din planul variabilei complexe întrucît $R(z)=0$.

## VII. FUNCȚII CONJUGATE

Dacă considerăm o funcție de o variabilă hipercomplexă

$$f(\omega)=P(x,y,z)+\theta\,Q(x,y,z)+\theta^2\,R(x,y,z) \tag{1}$$

condițiile de monogeneitate ne conduc la următoarele legături între funcțiile conjugate $P$, $Q$ și $R$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial z}\\ &\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}\\ &\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial y}\end{aligned} \tag{2}$$

și funcțiile $P$, $Q$, $R$ sînt soluții ale următorului sistem de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}&=0\\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}&=0\\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}&=0\end{aligned}\tag{3}$$

Soluțiile $U$ ale sistemului (3) deci și funcțiile conjugate $P$, $Q$ și $R$ satisfac următoarele relații integrale

$$\int_C \frac{\partial U}{\partial x}dy+\frac{\partial U}{\partial y}dz+\frac{\partial U}{\partial z}dx=0 \tag{4}$$

și

$$\int_C \frac{\partial U}{\partial x}dz+\frac{\partial U}{\partial y}dx+\frac{\partial U}{\partial z}dy=0 \tag{4'}$$

$C$ fiind o curbă închisă, rectificabilă, situată într-un domeniu $(D)$ din spațiu unde $U$ este continuă și admite derivate parțiale continui.

Dacă $U$ și $V$ sînt două soluții ale sistemului (3) continue și avînd derivate parțiale continue într-un domeniu $D$ din spațiu avem

$$\begin{aligned}&\int_C U\left(\frac{\partial V}{\partial x}dy+\frac{\partial V}{\partial y}dz+\frac{\partial V}{\partial z}\partial x\right)-V\left(\frac{\partial U}{\partial x}dy+\frac{\partial U}{\partial y}dz+\frac{\partial U}{\partial z}dx\right)=\\ &\iint_S\left(\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\right)dy\,dx+\\ &\qquad+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy\end{aligned}\tag{5}$$

și

$$\begin{aligned}&\int_C U\left(\frac{\partial V}{\partial x}dz+\frac{\partial V}{\partial y}dx+\frac{\partial V}{\partial z}dy\right)-V\left(\frac{\partial U}{\partial x}dz+\frac{\partial U}{\partial y}dx+\frac{\partial U}{\partial z}dy\right)=\\ &\iint_S\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy\,dz+\\ &\qquad+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dz\,dx\end{aligned}\tag{5'}$$

$C$ fiind o curbă închisă, iar $S$ o porțiune de suprafață mărginită de $C$, satisfăcînd condițiilor de aplicabilitate ale formulelor stockiene, și situate în $D$.

Vom da relației (4) o formă nouă introducînd cîteva elemente noi ale spațiului variabilei hipercomplexe. Astfel în spațiul variabilei complexe vom spune că distanța între două puncte $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$ este dată

$$\|M_1M_2\|=\sqrt[3]{(x_2-x_1)^3+(y_2-y_1)^3+(z_2-z_1)^3-3(x_2-x_1)(y_2-y_1)(z_2-z_1)}$$

elementul de arc este dat de

$$ds = \sqrt[3]{dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\,dx\,dy\,dz} \tag{6}$$

iar direcția $\overrightarrow{M_1M_2}$ din acest spațiu este determinată de trei funcții

$$\begin{aligned} \text{ap}\,(M_1M_2) &= \frac{x_2 - x_1}{||\,M_1M_2\,||} \\ \text{sp}\,(M_1M_2) &= \frac{y_2 - y_1}{||\,M_1M_2\,||} \\ \text{cp}\,(M_1M_2) &= \frac{z_2 - z_1}{||\,M_1M_2\,||} \end{aligned} \tag{7}$$

care pot fi considerate tot niște cosinuși ai lui Paul Appell deoarece verifica relația

$$\Sigma \text{ap}^3\,(M_1M_2) - 3\,\text{ap}\,(M_1M_2)\,\text{cp}\,(M_1M_2)\,\text{sp}\,(M_1M_2) = 1$$

însă ținînd seama de faptul că $x_t, y_t, z_t$ sînt funcții de două argumente $\varphi$ și $\psi$, urmează că funcțiile (7) astfel definite, sînt funcții de două argumente.

Cu ajutorul funcțiilor (7) avem

$$\begin{aligned} dx &= \text{ap}\,(M_1M_2)\,ds \\ dy &= \text{sp}\,(M_1M_2)\,ds \\ dz &= \text{sp}\,(M_1M_2)\,ds \end{aligned} \tag{8}$$

În acest spațiu se poate defini și derivata după o direcție $L$ [ap $(L)$, cp $(L)$, sp $(L)$] obținîndu-se după metoda de calcul obișnuită

$$\lim_{M' \to M} \frac{U(M') - U(M)}{||\,M'M\,||} = \frac{dU}{dL} = \frac{\partial U}{\partial x}\,\text{ap}\,(L) + \frac{\partial U}{\partial y}\,\text{sp}\,(L) + \frac{\partial U}{\partial z}\,\text{cp}\,(L) \tag{9}$$

Acestea fiind spuse, să considerăm tripletul de monogeneitate asociat unui punct $M$, format de raza vectoare $OM$ și tangentele la curbele asimptote $(d\psi = 0)$ și $(d\varphi = 0)$ dirijate în sensul de creștere al argumentelor. Ținînd seamă de formulele (I, 14'), $(d\psi = O)$, urmează că cosinușii (7) ai direcției $n_\varphi$ $(d\psi = 0)$ și ai lui $n_\psi$ $(d\varphi = 0)$ sînt

$$\begin{aligned} \text{ap}\,(\varphi) &= \frac{z}{\rho} \\ \text{sp}\,(\varphi) &= \frac{x}{\rho} \quad (n_\varphi) \\ \text{cp}\,(\varphi) &= \frac{y}{\rho} \end{aligned} \tag{10}$$

şi

$$\text{ap}\,(\psi) = \frac{y}{\rho}$$

$$\text{sp}\,(\psi) = \frac{z}{\rho} \qquad (n_\psi) \tag{11}$$

$$\text{cp}\,(\psi) = \frac{x}{\rho}$$

Avînd în vedere şi relaţiile (8) şi (9), urmează că relaţiile integrale (4), (4'), (5) şi (5') se pot scrie succesiv

$$\int_C \frac{dU}{dn_\psi} = 0 \tag{12}$$

$$\int_C \frac{dU}{dn_\varphi} = 0 \tag{12'}$$

şi

$$\int_C \left(U\,\frac{dv}{dn_\psi} - V\,\frac{dU}{dn_\psi}\right) ds = \iint_S \left(\frac{\partial U}{\partial z}\,\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial V}{\partial z}\right) dx\,dy +$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}\,\frac{\partial V}{\partial x}\right) dy\,dz + \iint_S \left(\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dz$$

$$\int_C \left(U\,\frac{dV}{dn_\varphi} - V\,\frac{dU}{dn_\varphi}\right) ds = \iint_S \left(\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}\,\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\,dy +$$

$$+ \iint_S \left(\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial V}{\partial y}\right) dy\,dz + \iint_S \left(\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}\,\frac{\partial V}{\partial y}\right) dz\,dx$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (3) conduce la relaţia (12) sau (12') şi invers.

## О ТЕОРИИ ФУНКЦИИ ГИПЕРКОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

### (КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Рассматривается гиперкомплексная переменная

$$\omega = x + \theta y + \theta^2 z$$

с $\theta^3 = 1$. Определенное таким образом кольцо $R(\theta)$ допускает два класса нулевых делителей $D_1 = (1 - \theta)\,\omega$, $D_2 = (1 + \theta + \theta^2)\,\omega$, определяющих в $R(\theta)$ два идеала.

Модуль гиперкомплексного числа $\omega$ есть

$$\| \omega \|^3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)\,[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2],$$

являющийся нулевым для точек, лежащих на прямой

$$x = y = z$$

и в плоскости

$$x + y + z = 0,$$

являющихся месторасположением точек $D_1$ и $D_2$.

Гиперкомплексная переменная $\omega$ может иметь следующее выражение

$$\omega = \rho e^{\theta\varphi + \theta^2\psi},$$

где $\rho = \| \omega \|$ и $\varphi, \psi$ являются двумя аргументами.

Функция гиперкомплексной переменной

$$f(\omega) = P\ (x, y, z) + \theta Q\ (x, y, z) + \theta^2\ R\ (x, y, z)$$

является моногенной в точке $M\ (x, y, z)$, если функции действительного переменного $P$, $Q$, $R$ связаны соотношениями

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

приводящими к

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$$

и к уравнению Пьера Гумберта

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 0.$$

В областях, правильно выбранных, функция $(1 - \theta) f(\omega)$ допускает разложение в ряд Тэйлора или Лорана.

Посредством голоморфных функций $(H)$ получаем наконец преобразования кривых в пространстве, для которых элемент дуги в смысле П. Аппелля является пропорциональным и аргументы $\varphi$ и $\psi$ сохраняются.

# UNE THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE HYPERCOMPLEXE DANS L'ESPACE À TROIS DIMENSIONS

(RÉSUMÉ)

On considère la variable hypercomplexe

$$\omega = x + \theta y + \theta^2 z$$

avec $\theta^3 = 1$. L'anneau $R(\theta)$ ainsi défini admet deux classes de diviseurs de zéro $D_1 = (1 - \theta)\omega$, $D_2 = (1 + \theta + \theta^2)\omega$, qui déterminent en $R(\theta)$ deux idéaux.

Le module du nombre hypercomplexe $\omega$ est

$$\| \omega \|^3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \tfrac{1}{2}(x + y + z)\,[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$

qui est nul pour les points situés sur la droite

$$x = y = z$$

et dans le plan

$$x + y + z = 0$$

qui sont les lieux des points $D_1$ et $D_2$.

La variable hypercomplexe $\omega$ peut avoir l'expression suivante

$$\omega = \rho\, e^{\theta\varphi + \theta^2\psi}$$

où $\rho = \| \omega \|$ et $\varphi$, $\psi$ sont deux arguments.

Une fonction de variable hypercomplexe

$$f(\omega) = P(x, y, z) + \theta\, Q(x, y, z) + \theta^2\, R(x, y, z)$$

est monogène en un point $M(x, y, z)$ si les fonctions réelles $P$, $Q$, $R$ sont liées par les relations

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

qui conduisent à

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$$

et à l'équation de Pierre Humbert

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}-3\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial y\partial z}=0$$

Dans des domaines convenablement choisis, la fonction $(1-\theta)\,f\,(\omega)$ admet des péveloppements en séries de Taylor ou de Laurent.

Enfin, par les fonctions holomorphes $(H)$, on obtient des transformations de courbes dans l'espace, pour lesquelles l'élément d'arc au sens de P. Appell est proportionnel et les arguments $\varphi$ et $\psi$ se conservent.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul V, nr. 3—4, 1954

# ASUPRA GEOMETRIEI GONOMETRICE A FAMILIILOR DE CERCURI

DE

MARIUS I. STOKA

Matematicianul sovietic V. F. K a g a n [1] a arătat că în geometria diferenţială metrică, se poate considera o dualitate asemănătoare cu aceea ce se întîlneşte în geometria proiectivă considerînd ca dual al distanţei între două puncte unghiul între două drepte sau curbe. Printre curbele ce joacă un rol important în teoria dualităţii metrice sînt cercurile.

Plecînd de la o expunere făcută de Prof. G. V r ă n c e a n u la Institutul de Matematică [2] despre dualitatea metrică dezvoltată de K a g a n şi şcoala sa de geometrie din Moscova, am ajuns la unele rezultate asupra congruenţelor de cercuri şi a suprafeţelor ce li se pot asocia. Aceste rezultate sînt prezentate în prezenta lucrare.

Fie $E_3$ un spaţiu euclidian cu trei dimensiuni, de coordonate carteziene ortogonale $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$.

Vom numi sfera de ecuaţie

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \tag{1}$$

sfera de bază, iar planul $z = 0$, planul ecuatorial.

Proiecţia stereografică din Polul Sud $S$ (0,0, — 1,1) a sferei de bază pe planul ecuatorial stabileşte o corespondenţă biunivocă între punctele din $E_3$ şi cercurile $K$ din planul ecuatorial [3].* Astfel, punctului $Y(y_1, y_2, y_3, y_4)$ îi corespunde în planul ecuatorial cercul

$$(y_3 + y_4)(x^2 + y^2) - 2y_1x - 2y_2y + y_4 - y_3 = 0 \tag{2}$$

şi reciproc, $y_i\,(i = 1,2,3,4)$ fiind coordonatele tetraciclice ale cercului (2).

Vom considera în spaţiul $E_3$ suprafaţa definită de ecuaţiile

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = \varphi(u, v) \\ z = \psi(u, v) \end{cases} \tag{3}$$

*) p. 244.

Acestei suprafeţe îi corespunde în planul ecuatorial congruenţa de cercuri $\mathfrak{K}_2$ *)

$$[1+\psi(u,v)](x^2+y^2)-2f(u,v)\,x-2\varphi(u,v)\,y+1-\psi(u,v)=0$$

sau, presupunînd că suprafaţa (3) este diferită de planul $z=-1$,

$$\left[x-\frac{f(u,v)}{1+\psi(u,v)}\right]^2+\left[y-\frac{\varphi(u,v)}{1+\psi(u,v)}\right]^2=\frac{S^2}{[1+\psi(u,v)]^2}, \tag{4}$$

unde am pus

$$f^2(u,v)+\varphi^2(u,v)+\psi^2(u,v)-1=S^2, \tag{5}$$

$S^2+1$ fiind tocmai patratul distanţei de la origină la punctul respectiv al suprafeţei. Rezultă că cercul asociat unui punct $(u_0, v_0)$ al suprafeţei (3) este real sau imaginar, după cum $S^2>0$ sau $S^2<0$.

Dacă suprafaţa (3) este sfera de bază, congruenţa de cercuri care-i corespunde este compusă din puncte, conţinînd totalitatea punctelor planului ecuatorial.

*Deci, planul ecuatorial este o congruenţă de cercuri* $\mathfrak{K}$ *cu* $S=0$.

Scriind ecuaţia sferei de bază sub forma [4] **)

$$\begin{cases} x=\dfrac{2u}{1+u^2+v^2} \\ y=\dfrac{2u}{1+u^2+v^2}, \\ z=\dfrac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2} \end{cases} \tag{6}$$

obţinem ecuaţia (4) a congruenţei $\mathfrak{K}_2$, corespunzătoare planului ecuatorial

$$(x-u)^2+(y-v)^2=0 \tag{7}$$

Considerînd două cercuri de ecuaţii

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\rho^2(\xi,\eta),$$

$$[x-(\xi+d\xi)]^2+[y-(\eta+d\eta)]^2=\rho^2(\xi+d\xi,\eta+d\eta),$$

K a g a n obţine o formulă care ne dă unghiul $d\theta$ dintre aceste două cercuri [5] ***)

$$\cos d\theta=\frac{(x-\xi)(x-\xi-d\xi)+(y-\eta)(y-\eta-d\eta)}{\sqrt{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2][(x-\xi-d\xi)^2+(y-\eta-d\eta)^2]}}=\frac{1+\alpha}{\sqrt{1+2\alpha+\beta}},$$

unde

$$\alpha=-\frac{(x-\xi)\,d\xi+(y-\eta)\,d\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}=\frac{d\rho}{\rho},\quad \beta=\frac{d\xi^2+d\eta^2}{\rho^2}.$$

Dezvoltînd în serie pe $\cos d\theta$, obţinem

$$1-\frac{d\theta^2}{2}+\ldots=(1+\alpha)\left[1-\frac{1}{2}(2\alpha+\beta)+\frac{3}{8}(2\alpha+\beta)^2+\ldots\right].$$

*) K a g a n numeşte congruenţă de cercuri $\mathfrak{K}_2$ orice familie de cercuri depinzînd de doi parametri [5], p. 303.

**) p. 339.

***) p. 302.

Deci, considerînd numai infiniţii mici din ordinul doi, avem

$$d\theta^2 = \beta - \alpha^2,$$

sau

$$d\theta^2 = \frac{d\xi^2 + d\nu^2 - d\rho^2}{\rho^2}.$$

Calculînd unghiul $d\theta^2$ dintre două cercuri infinit vecine ale congruenţei $\mathfrak{K}_2$ (4) cu ajutorul acestei formule obţinem, presupunînd $S \neq 0$,

$$d\theta^2 = \frac{ds^2 - dS^2}{S^2}, \tag{8}$$

unde

$$ds^2 = E\,du^2 + F\,du dv + G dv^2 \tag{9}$$

este forma lui Gauss a suprafeţei (3).

Dacă punem

$$d\omega^2 = ds^2 - dS^2, \tag{10}$$

formula (8) devine

$$d\theta^2 = \frac{d\omega^2}{S^2}. \tag{11}$$

*Deci, cele două forme pătratice $d\theta^2$ şi $d\omega^2$ sînt conforme.*

Pentru a da o interpretare geometrică formei pătratice $d\omega^2$, vom introduce noţiunea de *congruenţă de cercuri* $\mathfrak{K}_1$.

*Numim o congruenţă de cercuri $\mathfrak{K}_1$ familia de cercuri cu un parametru.*

*O astfel de congruenţă corespunde unei curbe din spaţiul $E_3$.*

Într-adevăr, fie în spaţiul $E_3$ o curbă de ecuaţie

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \varphi(t) \\ z = \psi(t) \end{cases}. \tag{12}$$

Acestei curbe îi corespunde în planul ecuatorial familia de cercuri

$$[1 + \psi(t)](x^2 + y^2) - 2f(t)\,x - 2\varphi(t)\,y + 1 - \psi(t) = 0, \tag{13}$$

deci, o congruenţă de cercuri $\mathfrak{K}_1$.

Vom demonstra acum

T e o r e m a 1. *Nu există nici o congruenţă de cercuri $\mathfrak{K}_2$ ale cărei cercuri să fie toate tangente între ele, însă fiecare cerc al unei astfel de congruenţe face parte din două congruenţe $\mathfrak{K}_1$, care aparţin congruenţei $\mathfrak{K}_2$ şi ale căror cercuri sînt toate tangente între ele. Cele două congruenţe de cercuri $\mathfrak{K}_1$ sînt reale şi distincte, confundate sau imaginare.*

Într-adevăr, pentru ca toate cercurile congruenţei $\mathfrak{K}_2$ (4) să fie tangente între ele, trebuie să avem

$$d\theta^2 = 0$$

pentru orice $u$ şi $v$.

Deci, relaţia

$$d\omega^2 = (E - S_u^2)\, du^2 + 2\,(F - S_u\, S_v)\, du\, dv + (G - S_v^2)\, dv^2 = 0$$

trebuie să fie identic satisfăcută. De aici rezultă

$$E - S_u^2 = F - S_u\, S_v = G - S_u^2 = 0, \tag{14}$$

ceea ce ne conduce la relaţia

$$EG - F^2 = 0.$$

Dar această relaţie este imposibilă, avînd în vedere că forma pătratică (9) este pozitiv definită.

Deci, $d\theta^2$ nu poate fi nulă pentru orice $u$ şi $v$, ceea ce constituie prima parte a teoremei.

Forma pătratică $d\theta^2$ se anulează însă pentru anumite curbe ale suprafeţei (3) şi anume pentru toate curbele date de ecuaţia diferenţială

$$(E - S_u^2)\, du^2 + 2\,(F - S_u\, S_v)\, du\, dv + G - S_v^2)\, dv^2 = 0, \tag{15}$$

sau

$$\frac{dv}{du} = \frac{S_u\, S_v - F \pm \sqrt{(S_u\, S_v - F)^2 - (E - S_u^2)\,(G - S_v^2)}}{G - S_v^2} \tag{16}$$

Deci prin fiecare punct al suprafeţei (3) trec două curbe pentru care $d\theta^2$ este nul.

Vom numi curbele integrale ale ecuaţiei (16) *curbe de unghi nul.*

Avînd în vedere corespondenţa stabilită mai sus între curbele din spaţiul $E$ şi congruenţa de cercuri $\mathcal{K}_1$, rezultă a doua parte a teoremei de mai sus.

Dacă suprafaţa (3) este o sferă cu centrul în origine, deci dacă $S = \text{const}$, atunci curbele de unghi nul coincid cu liniile de lungime nulă.

K a g a n numeşte *congruenţă de cvazicircumferinţe* familia de curbe obţinută dintr-o congruenţă de cercuri printr-o transformare conformă [5] *.

Avînd în vedere că o transformare conformă conservă unghiurile, teorema 1 devine

T e o r e m a 2. *Nu există nici o congruenţă de cvazicircumferinţe depinzînd de doi parametri, ale cărei toate cvazicircumferinţe să fie tangente între ele, dar orice cvazicircumferinţă dintr-o astfel de congruenţă face parte din două congruenţe, depinzînd de un parametru (reale şi distincte, confundate sau imaginare) care sînt conţinute în congruenţă cu doi parametri, şi ale căror toate cvazicircumferinţe sînt tangente între ele.*

Se ştie că singurele transformări din plan care lasă invariantă mulţimea cercurilor propriu zise** sînt similitudinile

$$\begin{cases} x = ax^* - by^* + c \\ y = bx^* + ay^* + d \end{cases} \tag{17}$$

Am arătat [6]*** cum similitudinii (17) i se poate ataşa biunivoc proiectivitatea

*) p. 316.

**) Inversiunile transformă anumite cercuri în drepte şi reciproc.

***) p. 76.

din spaţiul $E_3$

$$\begin{cases} \rho x_1^* = ax_1 + bx_2 - (ac + bd)(x_3 + x_4) \\ \rho x_2^* = -bx_1 + ax_2 - (ad - bc)(x_3 + x_4) \\ \rho x_3^* = cx_1 + dx_2 + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 1}{2} x_3 + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 1}{2} x_4 \\ \rho x_4^* = -cx_1 - dx_2 + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 1}{2} x_3 + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1}{2} x_4 \end{cases} \tag{18}$$

*Această transformare formează un subgrup proiectiv cu patru parametri.*

Într-adevăr, se poate uşor verifica că determinantul transformării este $(a^2 + b^2)^2$, deci este diferit de zero. Deci, transformarea (18) are o inversă.

Transformarea identică se obţine pentru $a = 1$, $b = c = d = 0$.

Produsul a două transformări $(a,b,c,d)$ şi $(a_1,b_1,c_1,d_1)$ este o transformare de aceeaşi formă cu parametrii

$$a_2 = aa_1 - bb_1, \quad c_2 = c_1 + a_1 c - b_1 d,$$
$$b_2 = ab_1 + a_1 b, \quad d_2 = d_1 + a_1 d - b_1 c. \tag{19}$$

Teorema 3. *Forma pătratică $d\omega^2$ este invariantă conform la transformările* (18).

Aplicînd transformarea (18) suprafeţei (3), aceasta devine

$$\begin{cases} x = \bar{f}(u, v) \\ y = \bar{\varphi}(u, v) \\ z = \bar{\psi}(u, v), \end{cases} \tag{20}$$

unde am notat

$$\begin{cases} \bar{f}(u,v) = \dfrac{af(u,v) + b\varphi(u,v) - (ac + bd)[1 + \psi(u,v)]}{-cf(u,v) - d\varphi(u,v) + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 1}{2}\psi(u,v) + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1}{2}} \\ \bar{\varphi}(u,v) = \dfrac{-bf(u,v) + a\varphi(u,v) - (ad - bc)[1 + \psi(u,v)]}{-cf(u,v) - d\varphi(u,v) + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 1}{2}\psi(u,v) + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1}{2}} \\ \bar{\psi}(u,v) = \dfrac{cf(u,v) + d\varphi(u,v) + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 1}{2}\psi(u,v) + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 1}{2}}{-cf(u,v) - d\varphi(u,v) + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 1}{2}\psi(u,v) + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1}{2}} \end{cases} \tag{21}$$

Formula (11) scrisă pentru suprafaţa (20) devine

$$d\bar{\theta}^2 = \frac{1}{S^2} d\bar{\omega}^2. \tag{22}$$

Dar congruenţa de cercuri $\mathfrak{K}_2$, care corespunde în planul ecuatorial suprafeţei (21), este transformată cu ajutorul formulelor (17) a congruenţei (4). Transformarea (17) conservă unghiurile, deci avem

$$d\bar{\theta}^2 = d\theta^2$$

Rezultă că

$$\frac{1}{\bar{S}^2} d\bar{\omega}^2 = \frac{1}{S^2} d\omega^2. \tag{23}$$

Deci

$$d\bar{\omega}^2 = \left(\frac{\bar{S}}{S}\right)^2 d\omega^2. \tag{24}$$

Formula (24) demonstrează teorema 3.

Teorema 4. *Fie o congruenţă de cercuri $\mathfrak{K}_2$ şi un cerc (dreaptă) în planul ecuatorial. Dacă există cercuri ale congruenţei $\mathfrak{K}_2$ care nu intersectează cercul (dreapta), atunci ele formează o familie de $\infty^2$ cercuri.*

Fie deci congruenţa de cercuri $\mathcal{K}_2(4)$ şi un cerc (dreaptă) $k$. Congruenţei (4) îi corespunde suprafaţa (3), iar cercului $k$ îi corespunde un punct $K$ exterior sferei de bază (dacă cercul $k$ este o dreaptă, atunci punctul $K$ se află în planul $z = -1$ [3]*).

Vom considera acum conul $\Gamma$ circumscris sferei de bază cu vîrful în punctul $K$. Punctelor din interiorul acestui con le corespund în planul ecuatorial cercuri care nu intersectează cercul $k$, punctelor conului le corespund cercuri tangente la cercul $k$, iar punctelor exterioare conului le corespund cercuri care intersectează cercul $k$ în două puncte distincte.

Într-adevăr, fie $M$ un punct în spaţiu. Dreptei $KM$ îi corespunde în planul ecuatorial un fascicol de cercuri, ale cărui puncte limită corespund punctelor de intersecţie ale dreptei $KM$ cu sfera de bază [3]**).

Dacă punctul $M$ este în interiorul conului $\Gamma$, atunci dreapta $KM$ intersectează sfera de bază în două puncte reale şi distincte, deci punctele limită ale fascicolului corespunzător dreptei $KM$ sînt reale şi distincte.

Dacă $M$ este pe conul $\Gamma$, atunci dreapta $KM$ este tangentă sferei de bază, deci punctele limită ale fascicolului corespunzător dreptei $KM$ sînt confundate.

Dacă $M$ este exterior conului $\Gamma$, atunci dreapta $KM$ nu intersectează sfera de bază, deci punctele limită ale fascicolului corespunzător dreptei $KM$ sînt imaginare.

Dar după o teoremă demonstrată în lucrarea citată [3]***), dacă $p$ este numărul punctelor limită reale ale unui fascicol de cercuri, iar $i$ numărul punctelor reale de intersecţie a două cercuri din fascicol, atunci

$$p + i = 2$$

Deci, dacă punctul $M$ este în interiorul conului $\Gamma$, atunci cercul care-i corespunde nu intersectează cercul $k$; dacă $M$ este pe conul $\Gamma$, cercul care-i cores-

*) p. 243.
**) p. 244.
***) p. 245.

punde este tangent cercului $k$; iar dacă $M$ este exterior conului $\Gamma$, cercul lui corespunzător intersectează cercul $k$ în două puncte distincte.

Vom presupune acum că există cel puţin un cerc al congruenţei (4) care nu intersectează cercul $k$. Acestui cerc îi corespunde un punct al suprafeţei (3), care se află în interiorul conului $\Gamma$. Dar acest punct nu poate fi în interiorul conului $\Gamma$ decît împreună cu o vecinătate a sa de pe suprafaţa (3). Deci, dacă există un punct al suprafeţei (3) în interiorul conului $\Gamma$, există o mulţime de puterea continuului de astfel de puncte, mulţime care formează un domeniu pe suprafaţa (3). Acestei mulţimi îi corespunde în planul ecuatorial o familie de $\infty^2$ cercuri care intersectează cercul $k$.

Vom da acum formele pătratice $ds^2$ şi $d\theta^2$ şi vom vedea în ce condiţii aceste două forme pătratice determină suprafaţa (3). Pentru aceasta vom pune

$$d\theta^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2, \tag{25}$$

deci

$$\frac{E - S_u^2}{S^2} = e, \quad \frac{F - S_u S_v}{S^2} = f, \quad \frac{G - S_v^2}{S^2} = g. \tag{26}$$

Eliminînd între aceste relaţii pe $Su$, $Sv$, obţinem

$$(eg - f^2)\,S^4 - (g\,E - 2fF + e\,G)\,S^2 + \Delta = 0, \tag{27}$$

ecuaţia care determină pe $S^2$.

*Deci, date fiind formele pătratice $ds^2$ şi $d\theta^2$, $S^2$ este determinat de o ecuaţie algebrică.*

Vom deriva acum formula (5) şi vom obţine

$$\begin{aligned} ff_u + \varphi\varphi_u + \psi\psi_u &= SS_u, \\ ff_v + \varphi\varphi_v + \psi\psi_v &= SS_v, \end{aligned} \tag{28}$$

Adăugînd acestor relaţii relaţiile care definesc coeficienţii formei pătratice $ds^2$ obţinem sistemul

$$\left\{\begin{aligned} f_u^2 + \varphi_u^2 + \psi_u^2 &= E \\ f_u f_v + \varphi_u \varphi_v + \psi_u \psi_v &= F \\ f_v^2 + \varphi_v^2 + \psi_v^2 &= G \\ ff_u + \varphi\varphi_u + \psi\psi_u &= SS_u \\ ff_v + \varphi\varphi_v + \psi\psi_v &= SS_v \\ f^2 + \varphi^2 + \psi^2 &= S^2 + 1, \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Din sistemul (29) rezultă că, dacă o soluţie a acestui sistem este $f$, $\varphi$, $\psi$, atunci el este verificat de funcţiile

$$\left\{\begin{aligned} \overline{f} &= a_{11} f + a_{12}\varphi + a_{13}\psi \\ \overline{\varphi} &= a_{21} f + a_{22}\varphi + a_{23}\psi \\ \overline{\psi} &= a_{31} f + a_{32}\varphi + a_{33}\psi, \end{aligned}\right. \tag{30}$$

unde determinantul $||a_{ij}||$ este ortogonal.

*Deci, determinarea suprafeței* (3) *cînd sînt date formele pătratice* $ds^2$ *și* $d\theta^2$ *depinde de integrarea sistemului* (29). *Dacă acest sistem are soluții, suprafața este determinată, abstracție făcînd o rotație în jurul originii.*

Vom observa acum că formula (8) ne permite să definim *unghiul dintre două cercuri ale congruenței* $\mathfrak{K}_2$ (4) *de-a lungul unei congruențe* $\mathfrak{K}_1$ *care le conține, sau pe scurt unghiul de-a lungul unei congruențe* $\mathfrak{K}_1$.

Într-adevăr, *fiind date două cercuri* $C_0$ $(u_0 v_0)$ *și* $C_1$ $(u_1, v_1)$ *ale congruenței* $\mathfrak{K}_2$ (4) *și o congruență* $\mathfrak{K}_1$ *care le conține, deci a cărei ecuație*

$$v = F(u) \tag{31}$$

*satisface la relațiile*

$$\begin{aligned} v_0 &= F(u_0), \\ v_1 &= F(u_1), \end{aligned} \tag{32}$$

*putem numi unghiul cercurilor* $C_0$ *și* $C_1$ *de-a lungul congruenței* $\mathfrak{K}_1$ (31) *expresia*

$$\theta = \int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{S} \sqrt{\frac{ds^2 - dS^2}{du^2}}\, du, \tag{33}$$

*unde în expresiile lui* $ds^2$, $dS^2$ *și* $S$ *am făcut înlocuirea* (31).

*Vom numi congruență* $\mathfrak{K}_1$ *geodetică, congruența de-a lungul căreia unghiul dintre cele două cercuri este cel mai mic*

*Avînd în vedere formula* (26), *formula* (33) *devine*

$$\theta = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{e + 2fv' + gv'^2}\, du \tag{34}$$

Printr-un calcul asemănător celui făcut pentru obținerea curbelor geodetice ale unei suprafețe [7]*, se obțin ecuațiile congruențelor $\mathfrak{K}_1$ geodetice

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + a_1\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + 2a_2\dfrac{du}{dt}\dfrac{dv}{dt} + a_3\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{d^2v}{dt^2} + b_1\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + 2b_2\dfrac{du}{dt}\dfrac{dv}{dt} + b_3\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2 = 0, \end{cases} \tag{35}$$

unde $a_i$ și $b_i$ sînt simbolii lui Cristoffel de speța a doua ai coeficienților (26).

T e o r e m a 5. *Congruențele geodetice ale congruențelor* $\mathfrak{K}_2$, *corespunzătoare sferelor cu centrul în origine, corespund curbelor geodetice ale acestor sfere.*

Într-adevăr, pentru sferele cu centrul în origine avem $S^2 = \text{const}$, deci

$$d\theta^2 = \frac{ds^2}{S^2} \tag{36}$$

sau

$$e = \frac{E}{S^2},\quad f = \frac{E}{S^2},\quad g = \frac{G}{S^2} \tag{37}$$

Calculînd simbolii lui Critoffel de speța a doua a metricei (36), obținem

$$a_i = A_i,\quad b_i = B_i$$

Deci, ecuațiile (35) ale congruențelor geodetice coincid cu ecuațiile curbelor geodetice ale sferelor cu centrul în origine.

*) p. 604.

## О ГОНИОМЕТРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ СЕМЕЙСТВ КРУГОВ

### (КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении рассматриваются свойства семейств кругов и поверхностей в евклидовом пространстве трех измерений.

К поверхности в евклидовом пространстве трех измерений присоединяется путем стереографического проектирования сферы единицы на экваториальную плоскость семейство с двумя параметрами кругов, расположенных на этой плоскости, и обратно. Начертав при помощи одной из формул Кагана угол между двумя бесконечно смежными кругами семейства кругов получаем квадратную форму, связанную с поверхностью, присоединяемой к семейству кругов.

Доказываются две теоремы:

Теорема. *Не существует семейства кругов с двумя параметрами, все круги которого касались бы один другого, но каждый круг подобного семейства входит в состав двух семейств с одним параметром, принадлежащих первоначальному семейству, все круги которых касаются один другого; оба семейства реальны и различны, смешаны или мнимы.*

Теорема. *При данном семействе кругов с двумя параметрами и одним кругом (справа) в плоскости и при наличии кругов семейства, не пересекающих круг (справа), таковые образуют семейство, состоящее из $\infty^2$ кругов.*

Вводится, наконец, угол между двумя кругами семейства с двумя параметрами вдоль семейства с одним параметром и при помощи этого понятия определяется геодезическое семейство кругов, принадлежащих семейству с двумя параметрами.

## SUR LA GÉOMÉTRIE GONIOMÉTRIQUE DES FAMILLES DE CERCLES

### (RÉSUMÉ)

L'Auteur s'occupe des familles planes de cercles et des surfaces de l'espace euclidien.

Par une projection stéréographique de la sphère unitaire sur le plan équatorial, on établit une correspondance biunivoque entre les surfaces de l'espace euclidien à trois dimensions et les familles planes de cercles à deux paramètres.

En écrivant à l'aide d'une formule de Kagan l'angle de deux cercles infiniment voisins, on obtient une forme quadratique attachée à la surface.

On a démontré ensuite:

Théorème: *Il n'existe aucune famille de cercles à deux paramètres telle que tous les éléments soient tangents entre eux; mais chaque cercle d'une telle famille plane, à deux paramètres appartient à deux familles à un seul paramètre appartenant à la famille initiale et dont tous les cercles sont tangents. Les deux familles sont réelles et distinctes, confondues ou imaginaires.*

Théorème *Étant donné une famille de cercles à deux paramètres et un cercle (droite) s'il existe des cercles de la famille qui ne coupent pas ce cercle, ceux-ci constituent une famille de $\infty^2$ cercles.*

*Enfin, on introduit la notion d'angle entre deux cercles d'une famille à deux paramètres le long d'une famille à un paramètre et à l'aide de cette notion, on définit la famille géodésique d'une famille à deux paramétres.*

## BIBLIOGRAFIE

1. V. F. Kagan, *Über die metrische Dualität.* Lucrările seminarului de analiză vectorială şi tensorială. Moscova, 1937.
2. G. Vrănceanu, Gazeta Matematică şi Fizică, 1954, nr. 2, p. 54.
3. M. Stoka, Gazeta Matematică şi Fizică, 1953, nr. 6, p. 243.
4. G. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială.* Bucureşti, 1951, vol. II.
5. V. F. Kagan, Osnovî teorii poverhnostei, Moscova, 1948, vol. II.
6. M. Stoka, Revista Universităţii «C. I. Parhon», 1954, nr. 6, p. 73.
7. G. Vrănceanu, *Geometrie analitică şi proiectivă.* Bucureşti, 1947, vol. II.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul V, nr. 3—4, 1954

# FUNCŢIILE LUI POMPEIU

DE

S. MARCUS

În capitolul II al tezei sale asupra continuităţii funcţiilor de variabilă complexă [1], D. Pompeiu îşi propune să construiască un exemplu de funcţie analitică uniformă, avînd o mulţime nedensă de singularităţi, funcţia fiind mărginită în vecinătatea acestor singularităţi.

Pentru a efectua această construcţie, Pompeiu s-a folosit de existenţa unei funcţii derivate mărginite, anulîndu-se în orice interval, şi nefiind identic nulă în nici un interval, existenţă pusă în evidenţă de A. Köpcke [2], [3], [4].

La un an după publicarea tezei, Pompeiu a dat o construcţie simplă pentru obţinerea unei funcţii reale de variabilă reală, neconstantă, derivabilă, cu derivată mărginită, derivata anulîndu-se în orice interval [5]. Superioritatea exemplului dat de Pompeiu faţă de cel dat de Köpcke, care este cuprins în trei memorii, a apărut evidentă matematicienilor şi astfel o funcţie cu proprietăţile de mai sus a primit numele de «funcţia lui Pompeiu».

Pompeiu a pornit de la funcţia

$$t = F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (x - a_n)^{\frac{1}{3}}, \tag{1}$$

unde $A_n$ sînt numere pozitive, $a_n$ formează o mulţime numerabilă, densă într-un anume interval $[x', x'']$, iar seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \tag{2}$$

este convergentă. Funcţia $F(x)$, fiind continuă şi crescătoare în $[x', x'']$, admite o inversă $x = G(t)$, definită în $[t', t'']$, continuă şi crescătoare în $[t', t'']$, unde $t' = F(x')$ $t'' = F(x'')$.

Funcţia $x = G(t)$ este tocmai funcţia lui Pompeiu. Proprietăţile funcţiei $x = G(t)$ rezultă din faptul că $F(x)$ admite în orice punct din $[x', x'']$ o derivată unică, diferită de zero, finită sau infinită, iar mulţimea punctelor $x$ în care $F'(x) = \infty$ este densă în $[x', x'']$. Pentru a se stabili aceste proprietăţi, se demonstrează că:

1) În orice punct în care seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{\frac{2}{3}}} \tag{3}$$

este convergentă, funcţia $t = F(x)$ admite derivată unică, finită şi pozitivă, egală cu suma seriei (3) multiplicată cu 1/3.

2) În orice punct în care seria (3) este divergentă, funcţia $t = F(x)$ admite derivată unică infinită.

3) În orice punct $a_n$ funcţia $t = F(x)$ admite derivată unică infinită*).

Vom reproduce, cu unele ameliorări, demonstraţiile acestor-propoziţii.

*Demonstraţia punctului* 1). Fie $x$ un punct în care seria (3) este convergentă. Notînd

$$\alpha_n = \left(\frac{x + y - a_n}{x - a_n}\right)^{\frac{1}{3}},$$

avem

$$\frac{F(x+y) - F(x)}{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(\alpha_n^2 + \alpha_n + 1)(x - a_n)^{\frac{2}{3}}} < \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{\frac{2}{3}}},$$

deci seria din stînga este uniform convergentă (în raport cu $y$) în orice interval $-\eta \leqslant y \leqslant \eta$, $(\eta > 0)$. Aceasta atrage continuitatea, pentru $y = 0$, a funcţiei **)

$$\psi(y) = \begin{cases} \dfrac{F(x+y) - F(x)}{y} & \text{dacă } y \neq 0 \\ \dfrac{1}{3} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{\frac{2}{3}}} & \text{dacă } y = 0. \end{cases}$$

*) În lucrarea sa, D. Pompeiu demonstrează în prealabil că mulţimea punctelor $x$ în care seria (3) este convergentă, are o măsură egală cu lungimea intervalului $[x', x'']$. Pentru aceasta se arată că seria (3) este convergentă în orice punct în care este convergentă seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|x - a_n|} \tag{4}$$

şi se ţine seamă de o teoremă a lui Borel, după care, dacă seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{A_n} \tag{5}$$

este convergentă, atunci seria (4) este convergentă aproape peste tot în $[x', x'']$.

Însă studiul structurii metrice a mulţimii punctelor de convergenţă a seriei (3) este de prisos pentru justificarea afirmaţiilor 1), 2), 3), afirmaţii suficiente pentru stabilirea proprietăţilor funcţiei $G(t)$. Trebuie deci suprimată din prezentarea funcţiilor lui Pompeiu ipoteza convergenţei seriei (5), formate cu coeficienţii seriei (1). Această ipoteză, deşi inutilă, a fost transcrisă în tratatele care relatează despre funcţiile lui Pompeiu. A se vedea, de exemplu, [6], p. 620 şi [7], p. 542 — 546.

Pe de altă parte, după cum se va vedea spre sfîrşitul acestui articol, convergenţa aproape peste tot a seriei (3) poate fi de asemenea stabilită independent de teorema lui Borel şi fără să se utilizeze ipoteza convergenţei seriei (5).

**) Această funcţie nu este considerată explicit în [5].

*Demonstrația punctului* 2). Fie $\xi$ un punct în care seria (3) este divergentă. Funcția

$$\varphi_m(y) = \sum_{n=1}^{m} \frac{A_n}{(\xi + y - a_n)^{\frac{2}{3}} + (\xi + y - a_n)^{\frac{1}{3}}(\xi - a_n)^{\frac{1}{3}} + (\xi - a_n)^{\frac{2}{3}}}$$

este continuă în $y = 0$. Pe de altă parte, fiind dat un număr $M > 0$, există un număr $N > 0$, astfel ca, pentru $m \geqq N$.

$$\varphi_m(0) > M.$$

Există deci un număr $\varepsilon > 0$ astfel ca, pentru $|y| < \varepsilon$ și, pentru $m \geqq N$,

$$\varphi_m(y) > M.$$

Din faptul că

$$\frac{F(\xi + y) - F(\xi)}{y} = \lim_{m \to \infty} \varphi_m(y),$$

rezultă că $F(x)$ are derivată unică infinită în punctul $\xi$.

*Demonstrația punctului* 3)*. Fie $x = a_p$ un anumit număr din șirul $\{a_n\}$. Să notăm

$$\beta_n = \left(\frac{a_p + y - a_n}{a_p - a_n}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Avem

$$\frac{F(a_p + y) - F(a_p)}{y} = \frac{A_p}{y^{\frac{2}{3}}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(\beta_n^2 + \beta_n + 1)(a_p - a_n)^{\frac{2}{3}}},$$

unde accentul pus semnului $\Sigma$ arată că se evită valoarea $n = p$.

Deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(\beta_n^2 + \beta_n + 1)(a_p - a_n)^{\frac{2}{3}}} > 0,$$

avem

$$\lim_{y \to 0} \frac{F(a_p + y) - F(a_p)}{y} = +\infty.$$

Ținînd seama că punctele $a_n$ formează o mulțime densă în $[x', x'']$, iar $t = F(x)$ este continuă în $[x', x'']$, rezultă că mulțimea $t_n = F(x_n)$ este densă în $[t', t'']$. Cum pe de altă parte $F'(x_n) = \infty$, rezultă $G'(t_n) = 0$, deci $G(t)$ are toate proprietățile enunțate.

Prof. Al. Froda [8] a arătat că există funcții Pompeiu definite pe toată axa reală și care iau toate valorile reale.

Să observăm că mulțimea $Z$ a zerourilor funcției $G'(t)$ este un rezidual în intervalul $[t', t'']$, deoarece această mulțime conține mulțimea $\mathcal{C}$ a punctelor de

*) Această demonstrație este omisă în [5]. Ea trebuie însă efectuată, deoarece este de alt tip față de demonstrațiile punctelor 1) și 2).

continuitate ale funcţiei $G'(t)$, iar $\mathcal{C}$ este un rezidual, deoarece $G'(t)$ este o funcţie de prima clasă Baire*). În particular, mulţimea $Z$ (ca şi mulţimea $\mathcal{C}$) este nenumerabilă.

Mărginirea funcţiei $G'(t)$ rezultă din inegalitatea

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_n}{|x'-x''|^{\frac{2}{3}}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

Funcţia $G'(t)$ constituie un exemplu de derivată mărginită, neintegrabilă în sensul lui Riemann. Să presupunem, într-adevăr, că $G'(t)$ ar fi integrabilă în $[t', t'']$. Am avea

$$G(t'') - G(t') = \int_{t'}^{t''} G'(t)\, dt.$$

Ţinînd seama că $G(t)$ este o funcţie strict crescătoare, rezultă

$$\int_{t'}^{t''} G'(t)\, dt = 0$$

Pe de altă parte, din faptul că $G'(t)$ se anulează în orice interval, rezultă

$$\int_{t'}^{t''} G'(t)\, dt = 0,$$

ceea ce constituie o contradicţie.

Acest exemplu de derivată mărginită şi neintegrabilă Riemann are un caracter mai elementar decît exemplul dat de Volterra [9], singurul cunoscut în această privinţă.

Mulţimea $V$ a valorilor luate de funcţia $G(t)$ în punctele în care admite derivată nulă este de măsură nulă, conform unei teoreme a lui Luzin [10].

Deci, mulţimea punctelor în care $F(x)$ admite derivată infinită este de măsură nulă.

Însă, conform afirmaţiei 2), mulţimea punctelor în care seria (3) este divergentă este inclusă în mulţimea punctelor în care $F(x)$ admite derivată infinită. Cum, pe de altă parte, mulţimea $\{a_n\}$ este numerabilă, rezultă că seria (3) este convergentă aproape peste tot. (Pompeiu demonstrează această proprietate pe o cale mai complicată, sprijinindu-se pe teorema lui Borel, amintită la început, şi folosind ipoteza suplimentară a convergenţei seriei (5)).

Funcţiile lui Pompeiu nu intră în categoria aşa numitelor « funcţii singulare », a căror derivată, fără să existe obligatoriu în orice punct, se anulează de asemenea în orice interval, iar mulţimea zerourilor derivatei este de măsură egală cu a întregului interval. Funcţiile lui Pompeiu reprezintă oarecum un echivalent « calitativ » al funcţiilor singulare, deoarece mulţimea zerourilor derivatei formează, după cum s-a văzut, un rezidual.

Pe exemplul furnizat de funcţiile lui Pompeiu se constată că o funcţie derivabilă, a cărei derivată se anulează pe un rezidual (deci pentru care mulţimea punctelor în care derivata este diferită de zero este neglijabilă calitativ) nu se reduce obligatoriu la o constantă. Deci, în sens calitativ, nu este posibilă generalizarea

*) În [5] şi în [8] se spune că $Z$ este o mulţime de a doua categorie. Însă aceasta este o proprietate mai slabă decît aceea de a fi un rezidual.

teoremelor clasice asupra determinării unei funcții pînă la o constantă aditivă, cînd se cunoaște derivata ei în tot intervalul, exceptînd o mulțime numărabilă de puncte.

C. Kuratowski [11]*) a arătat că, folosindu-se graficul funcției $G'(t)$ (derivata funcției lui Pompeiu), se poate da un exemplu de spațiu topologic dispersat (adică nu conține nici o submulțime conexă care nu se reduce la un punct) și care nu este nicăieri conex (un spațiu topologic este nicăieri conex dacă fiecărei perechi de puncte $a$ și $b$ din spațiu îi corespunde o mulțime în același timp, închisă și deschisă, care conține pe $a$ și nu conține pe $b$).

Graficul derivatei funcției lui Pompeiu constituie un exemplu de spațiu complet, separabil, conex și punctiform (un spațiu este punctiform dacă nu conține nici un continuu care nu se reduce la un punct) [11] **).

B. Knaster și C. Kuratowski [12] au arătat că problema construirii unei mulțimi $G_\delta$ biconexă (o mulțime este biconexă dacă este conexă și nu se poate descompune în două mulțimi conexe și disjuncte) este rezolvată, dacă se construiește o funcție derivată mărginită în $[0,1]$, anulîndu-se în orice interval și nefiind constantă în nici un interval. Ei au atras atenția că derivata funcției lui Pompeiu îndeplinește toate aceste condiții.

Prof. Al. Froda [8] a arătat că ecuația diferențială

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F'(y)},$$

unde $F(y)$ este inversa funcției lui Pompeiu, este o ecuație diferențială de tipul celei găsite de M. Lavrentiev în anul 1925. Dacă $F(y)$ este definită în $[y', y'']$ și ia valori în $[x', x'']$, atunci prin orice punct din dreptunghiul $x' < x < x''$, $y' < y < y''$ trec o infinitate de integrale distincte ale ecuației diferențiale.

Exemplul dat de prof. Al. Froda nu conține exemplul dat de M. Lavrentiev, deoarece acesta din urmă a considerat o ecuație în care membrul drept este o funcție continuă.

## ФУНКЦИИ ПОМПЕЮ

### (КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении излагается способ построения Помпею дифференцируемой функции непостоянной с ограниченной производной, аннулирующейся в любом интервале. Пусть $T = F(x)$ представляет собой данную (1) функцию, где $a_n$ образует счетную серию, плотную в $[x', x'']$, $A_n$ положительные числа, а ряд (2) сходящийся. Эта функция допускает конечную и положительную производную в любой точке, где ряд (3) является сходящимся; во всех остальных точках $F(x)$ допускает бесконечную производную. Функция $x = G(t)$, обратная функции $t = F(x)$, является функцией Помпею.

Наряду с некоторыми небольшими дополнениями, внесенными в доказательства, автор делает следующие замечания:

*) p. 95.
**) p. 130.

Предположение о сходимости ряда (5), предложенное Помпею и вошедшее в литературу [4] и [5], является излишним.

Использование одной из теорем Бореля для установления почти повсеместной сходимости ряда (3) может быть избегнуто при использовании одной из теорем Лузина, более простой и устраняющей необходимость требования сходимости ряда (5).

Множество нулей в $G'(t)$ является резидуальным, каковая особенность преобладает над принадлежностью ко второй категории, указанной в [3] и [10].

Функция $G(t)$ показывает, что дифференцируемая функция, производная от которой аннулируется на резидуале (то есть почти «повсюду» с качественной точкой зрения), не обязательно сводится к постоянной.

Функция $G'(t)$ является примером римановой неинтегрируемой ограниченной производной. Этот пример более простой и более элементарный, чем пример, приведенный Вольтерра, единственно известный в этом отношении.

Функции Помпею представляют собой в некоторой мере качественный эквивалент сингулярных функций. Эти последние, хотя и не дифференцируемые в любой точке, допускают почти повсюду, и следовательно в любом интервале, нулевую производную.

Отмечаются топологические свойства графика производной от функции Помпею, показанные в [7] и [8], а также свойства, показанные в [10].

## LES FONCTIONS DE POMPEIU

(RÉSUMÉ)

Dans cet article, on expose la manière dont Pompeiu a construit une fonction dérivable non constante, à dérivée bornée et s'annulant dans tout intervalle. Soit $t = F(x)$ la fonction donnée par (1) où $a_n$ forme un ensemble dénombrable dense en $[x', x'']$, $A_n$ sont des nombres positifs et la série (2) est convergente. Cette fonction admet une dérivée finie et positive en tout point où la série (3) est convergente; dans tous les autres points $F(x)$ admet une dérivée infinie. L'inverse $x = G(t)$ de la fonction $t = F(x)$ est la fonction de Pompeiu.

Outre quelques légères améliorations qu'il apporte aux démonstrations, l'Auteur de l'article fait les observations suivantes:

L'hypothèse sur la convergence de la série (5), demandée par Pompeiu et transcrite dans les traités, (voir [4] et [5]) est superflue.

L'utilisation d'un théorème de Borel pour établir la convergence presque partout de la série (3) peut être évitée par l'utilisation d'un théorème de Luzin, plus simple, et qui dispense ici encore de demander la convergence de la série (5).

L'ensemble des zéros de $G'(t)$ est un résiduel, propriété plus forte que celle d'être de la seconde catégorie signalée dans [3] et [10].

La fonction $G(t)$ montre qu'une fonction dérivable, dont la dérivée s'annule sur un résiduel (donc « presque partout » au point de vue qualitatif) ne se réduit pas obligatoirement à une constante.

La fonction $G'(t)$ constitue un exemple de dérivée bornée, non intégrable Riemann. Cet exemple est plus simple et plus élémentaire que l'exemple donné par Volterra, le seul connu dans ce sens.

Les fonctions de P o m p e i u représentent en quelque sorte un équivalent qualitatif des fonctions singulières. Ces dernières, sans être dérivables en tout point, admettent presque partout, donc dans tout intervalle, une dérivée nulle.

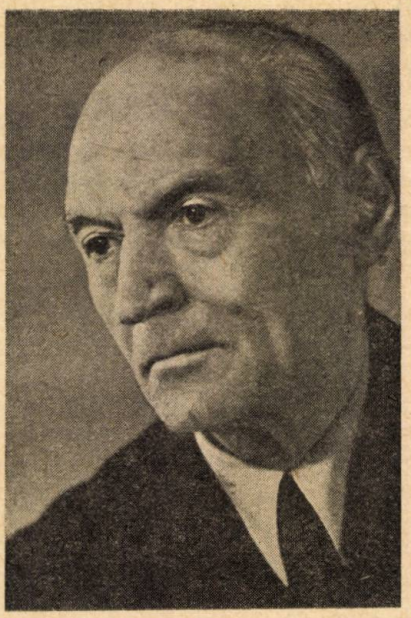
On signale les propriétés topologiques du graphique de la dérivée de la fonction de P o m p e i u, propriétés montrées dans [7] et [8], ainsi que certaines propriétés montrées dans [10].

## BIBLIOGRAFIE


1. D. P o m p e i u. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1905, seria a 2-a, t. VII, p. 265.
2. A. K ö p c k e, Mathematische Annalen, 1887, t. 29, p. 123.
3. — Mathematische Annalen, 1889, t. 34, p. 161.
4. — Mathematische Annalen, 1890, t. 35, p. 104.
5. D. P o m p e i u, Mathematische Annalen, 1907, t. 63, p. 326.
6. E. W. H o b s o n, *The theory of functions of a real variable*, Cambridge, 1907.
7. J. P i e r p o n t, *Lectures on the theory of functions of real variables*. 1911, Londra, vol. II.
8. Al. F r o d a, Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R., 1952, t. 4, p. 801.
9. H. L e b e s g u e, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, 1928.
10. N. L u z i n, Integral i trigonometriceski riad, Moscova-Leningrad, 1951.
11. C. K u r a t o w s k i, *Topologie*. Warszawa, 1952, vol. II.
12. B. K n a s t e r, C. K u r a t o w s k i, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1925, t. XLIX, p. 385.

# DIMITRIE POMPEIU

Comitetul de redacţie al revistei Studii şi cercetări matematice are durerea să aducă la cunoştinţă încetarea din viaţă, survenită în noaptea de 7 octombrie 1954, a academicianului profesor Dimitrie Pompeiu.



Cu Dimitrie Pompeiu Institutul de matematică al Academiei pierde pe iniţiatorul şi pe directorul său iubit, cu a cărui reputaţie ştiinţifică acest Institut s-a putut mîndri încă de la începutul activităţii sale. Academia Republicii Populare Romîne pierde pe unul din cei mai de seamă oameni de ştiinţă, care a contribuit în mod deosebit la prestigiul ei, iar Patria noastră pierde pe unul din cei mai străluciţi reprezentanţi ai ştiinţei şi ai culturii sale.

Opera matematică a lui Dimitrie Pompeiu este variată şi adîncă. Este un an numai de cînd Academia R.P.R., împreună cu numeroşi elevi, admiratori şi prieteni, au sărbătorit a optzecea aniversare a vieţii sale. Cu acest prilej, volumul din

Studii şi cercetări matematice, apărut în primul semestru al acestui an şi închinat academicianului D. Pompeiu, a publicat, împreună cu o listă completă a titlurilor lucrărilor sale, articole care analizează unele din principalele aspecte ale acestei opere. O analiză mai completă şi mai adîncă a lucrărilor fundamentale ale marelui matematician romîn va trebui să însoţească publicarea operei sale matematice, hotărîtă de Academia Republicii Populare Romîne.

În ştiinţa matematică mondială, numele lui Pompeiu rămîne legat de descoperiri importante, de cîteva concepte noi şi fecunde, pe care desfăşurarea ulterioară a ştiinţei le-a valorificat şi le-a consacrat. Să reamintim numai rezultatele sale, azi clasice, asupra singularităţilor funcţiilor analitice, sau — în teoria funcţiilor de variabilă reală — cele asupra funcţiilor derivate, rezultate care au făcut obiectul unor cercetări din cele mai variate, în ţară ca şi peste hotare. Noţiuni introduse de el, ca aceea de «distanţă» între mulţimi, sau aceea de «derivată areolară», sînt azi instrumente de cercetare curente în diverse domenii ale matematicii moderne.

În ţară, se poate spune că Dimitrie Pompeiu a exercitat o influenţă adesea hotărîtoare asupra formării multora dintre colegii noştri matematicieni. În cursul îndelungatei şi fructuoasei sale cariere ştiinţifice şi didactice, el nu a încetat să întreţină un contact permanent cu matematicienii noştri de toate generaţiile. Firea sa comunicativă şi sensibilă, ca şi cugetarea sa nuanţată, care îmbrăca adesea, în formele cele mai atrăgătoare şi mai sugestive, idei profunde, au făcut din el, timp de mulţi ani, centrul în jurul căruia evolua o mare parte din tînăra noastră şcoală matematică.

Şcoala matematică romînească, azi în plină dezvoltare, preia de la Dimitrie Pompeiu, unul din creatorii şi îndrumătorii săi, o moştenire bogată şi preţioasă. Această bogăţie de rezultate, variate şi profunde, bogăţie de idei şi de gîndire ştiinţifică, şcoala noastră matematică va şti s-o folosească din plin, pentru rodnica dezvoltare a muncii sale, pentru continuul progres al ştiinţei şi al culturii noastre, pentru cinstea şi pentru prestigiul patriei noastre.

*Comitetul de redacţie al revistei*
*Studii şi cercetări matematice*

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE
PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII